

Фундаментальные и прикладные проблемы информатики и информационных технологий

УДК 616.12-07

А.Н. Данилин, В.В. Комяк, В.М. Комяк, А.В. Панкратов

Упаковка эллипсов в прямоугольник минимальных размеров

Рассмотрена задача упаковки набора эллипсов в прямоугольник минимальных размеров. Для моделирования отношений непересечения эллипсов и его принадлежности контейнеру использованы phi -функции и квази- phi -функции. Построена математическая модель в виде задачи нелинейной оптимизации. Предложен эффективный алгоритм поиска локально-оптимальных решений.

Ключевые слова: упаковка, эллипсы, непрерывные повороты, квази- phi -функции, математическая модель, нелинейная оптимизация.

Розглянуто задачу упаковки набору еліпсів у прямокутник мінімальних розмірів. Для моделювання відносин неперетинання еліпсів і його належності контейнеру використано phi -функції і квазі- phi -функції. Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійної оптимізації. Запропоновано ефективний алгоритм пошуку локально-оптимальних рішень.

Ключові слова: упаковка, еліпси, безперервні повороти, квазі- phi -функції, математична модель, нелінійна оптимізація.

Введение. Задачи упаковки и раскроя (*Cutting & Packing*) – предмет исследования вычислительной геометрии, а методы их решения – новое направление теории исследования операций. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений. В данной статье рассматривается класс задач упаковки заданного набора эллипсов в прямоугольный контейнер минимальных размеров, представляющий интерес, например, в порошковой металлургии при моделировании движения сыпучих веществ и задачах логистики при моделировании оптимальных упаковок объектов, имеющих форму цилиндра с эллиптическим основанием.

Задачи оптимальной упаковки эллипсов относятся к классу NP -сложных. Для решения задач такого класса используются, как правило, эвристические алгоритмы. Разработка эффективных алгоритмов, основанных на применении методов локальной и глобальной оптимизации, требует построения адекватных математических моделей, основанных на аналитическом описании отношений эллипсов с учетом их непрерывных трансляций и вращений.

Анализ новейших исследований и публикаций

Верхняя оценка плотности упаковки эллипсов в контейнер получена в работе [1]. Для решения

задач данного класса применяется метод дискретного элемента [2, 3]. Однако этот метод достаточно ресурсоемкий, что ограничивает размерность пространства решения и количество используемых частиц. Математическая модель упаковки двух эллипсов исследуется в статье [4]. Эффективный численный алгоритм для определения факта пересечения эллипсов приводится в статье [5], там же исследуется влияние размеров эллипсов на плотность упаковки.

В статье [6] предлагается метод решения задачи упаковки эллипсов, допускающих вращения, с использованием современных NLP решателей (*solvers*), доступных в $GAMS$. В этой статье приводится достаточно полный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. Для аналитического описания условий непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [7] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В [6] получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ($N \leq 4$), однако при $n > 14$ авторам не удалось получить допустимого решения. В этой связи авторы предлагают эвристический *polyhedral*-алгоритм для размещения большего числа эллипсов (до 100) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины.

Задача оптимальной упаковки эллипсов, допускающих непрерывные вращения, рассмотрена в [8], [9]. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази-*phi*-функции и псевдонормализованные квази-*phi*-функции [10, 11]. В этих работах строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагаются эффективные алгоритмы поиска локальных экстремумов. Подход, изложенный в работах [8, 9], позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования и получать локально-оптимальные решения при $N \leq 120$. Авторам [9] удалось улучшить результаты по времени и значению функции цели для многих тестовых примеров, приведенных в статье [6].

В фундаментальном исследовании [12] рассмотрены вопросы упаковки как эллипсов, так и эллипсоидов в различных выпуклых областях. При моделировании условий непересечения объектов исследуются два подхода: первый основан на идее разделяющей прямой (плоскости) из [6], а второй – на использовании аффинных преобразований пространства R^n , $n = 2, 3$. При использовании второго подхода один из эллипсов (эллипсоидов) преобразуется в круг (шар), второй – в некоторый эллипс (эллипсоид). После аффинных преобразований для формализации условий непересечения полученных объектов используется идея метода, разработанного в [13] для моделирования геометрических отношений круга и эллипса. Генерация хороших стартовых точек и применение солвера *Algencan* [14] для решения задач нелинейного программирования позволило авторам [12] улучшить большинство результатов работ [6, 9].

Оригинальный подход к моделированию задачи упаковки эллипсов, основанный на использовании множителей Лагранжа, предложен в работах [15, 16], однако тестирование показало меньшую эффективность предложенного метода, чем в работах [9, 12]. К тому же описание в аналитическом виде условий раз-

мещения эллипса в круге, предложенные в [15], содержат ошибку.

Однако запись в аналитическом виде условий непересечения каждой пары эллипсов в перечисленных работах довольно громоздка и/или осуществляется при помощи системы нелинейных неравенств.

В статье предлагается подход, основанный на математическом моделировании отношений между эллипсами (непересечение и расположение на минимально допустимом расстоянии) с использованием новой квази-*phi*-функции, что позволило сформулировать такие условия в виде единственного сравнительно несложного нелинейного неравенства. Данный подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования и эффективно получать локально-оптимальные решения задачи.

Постановка задачи и ее решение

Предмет исследования данной статьи – задача упаковки в следующей постановке. Пусть задана прямоугольная область $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W\}$ переменной длины L , переменной ширины W и набор эллипсов E_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\} = I_N$, которые должны размещаться внутри области Ω . Очевидно, что система координат контейнера Ω фиксирована и совпадает с глобальной системой координат. Каждый эллипс E_i задан большой и малой полуосями a_i и b_i . Центр эллипса E_i совпадает с началом его собственной системы координат. Положение эллипса E_i характеризуется вектором переменных параметров размещения объекта $t_i = (x_i, y_i, q_i)$, где (x_i, y_i) – вектор трансляции, q_i – угол поворота. Обозначим $E_i(t_i)$ – эллипс E_i , повернутый на угол q_i и транслированный на вектор (x_i, y_i) .

Между эллипсами E_i и E_j могут быть заданы ограничения на минимально допустимые расстояния ρ_{ij} , а между эллипсом E_i и границей контейнера Ω – ограничения на минимально ρ_i допустимые расстояния.

Задача упаковки эллипсов разместить с учетом ограничений на заданные допустимые расстояния множество эллипсов $E_i(t_i)$, $i \in I_N$, в прямоугольном контейнере Ω минимальной площади $F = L \cdot W$.

В данном исследовании, как и в работах [8] и [9], в качестве эффективного средства математического моделирования отношений непересечения пары эллипсов предлагается использовать функцию из класса квази-*phi*-функций [10, 11]).

Согласно определению, квази-*phi*-функцией $\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij})$ для объектов $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ называется всюду определенная непрерывная по всем переменным функция, для которой функция $\max_{t_{ij} \in U \subset R^m} \Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij})$ есть *phi*-функцией объектов $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$, где t_{ij} – вектор вспомогательных переменных, принадлежащих некоторому подмножеству U пространства R^m (как будет показано ниже, в данном случае $m = 1$, а U совпадает с R^1).

Далее мы используем следующую важную характеристику квази-*phi*-функции: если для некоторого t_{ij} выполняется $\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) \geq 0$, то $\text{int } E_i(t_i) \cap \text{int } E_j(t_j) = \emptyset$ ([9, 10] для более подробной информации).

Предлагаемая квази-*phi*-функция основывается на использовании следующего утверждения: если выпуклые объекты не пересекаются, то существует такая проходящая через центр системы координат прямая, что проекции объектов на эту прямую не пересекаются.

В самом деле, пусть выпуклые объекты $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ не имеют общих внутренних точек (рис. 1). Тогда, согласно теореме о разделяющей прямой, существует прямая L_{ij} , разбивающая плоскость на две полуплоскости таким образом, что объекты $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ лежат в разных полуплоскостях. Следовательно, проекции множеств $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ на любую

прямую, перпендикулярную L_{ij} , не пересекаются (не имеют общих внутренних точек в R^1). Обозначим L_{ij}^\perp прямую, перпендикулярную L_{ij} и проходящую через центр системы координат, и t_{ij} – угол между прямой L_{ij}^\perp и осью OX .

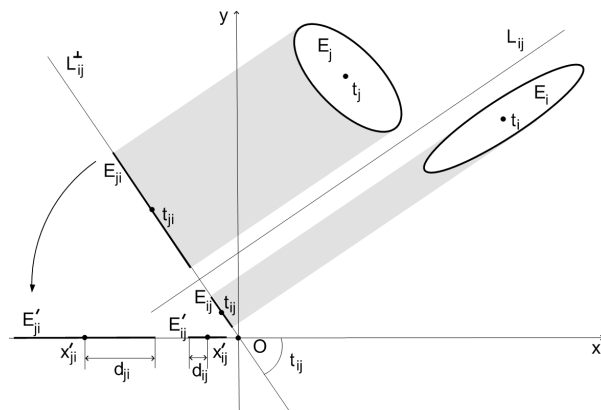


Рис. 1. Иллюстрация к построению квази-*phi*-функции $\Phi^{E_i E_j}$

Повернув прямую L_{ij}^\perp вместе с проекциями эллипсов E_{ij} и E_{ji} (с центрами в точках t_{ij} и t_{ji} соответственно) вокруг точки O на угол $-t_{ij}$, получим повернутые проекции эллипсов E'_{ij} и E'_{ji} с центрами в точках x'_{ij} и x'_{ji} .

Таким образом, условие непересечения эллипсов $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ эквивалентно условию

$$x'_{ij} - x'_{ji} \geq d_{ij} + d_{ji}, \quad (1)$$

$$x'_{ij} = x_i \cos t_{ij} - y_i \sin t_{ij}, \quad (2)$$

$$x'_{ji} = x_j \cos t_{ij} - y_j \sin t_{ij} \quad (3)$$

$$d_{ij} = \sqrt{a_i^2 \cos^2(q_i - t_{ij}) + b_i^2 \sin^2(q_i - t_{ij})} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(q_i - t_{ij})}, \quad (4)$$

$$d_{ji} = \sqrt{a_j^2 \cos^2(q_j - t_{ij}) + b_j^2 \sin^2(q_j - t_{ij})} = \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(q_j - t_{ij})}. \quad (5)$$

Замечание. Если эллипсы не пересекаются и после приведенных операций $x'_{ij} \leq x'_{ji}$, то в качестве угла поворота прямой L_{ij}^\perp следует взять угол $t_{ij} + \pi$.

С учетом этого условия взаимного непересечения эллипсов описываются неравенством $\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) \geq 0$, где квази-*phi*-функция

$\Phi^{E_i E_j}$ может быть записана в виде $\Phi^{E_i E_j} = x'_{ij} - x'_{ji} - d_{ij} - d_{ji}$, или, учитывая (1) – (5),

$$\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) = (x_i - x_j) \cos t_{ij} + (y_j - y_i) \sin t_{ij} - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(q_i - t_{ij})} - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(q_j - t_{ij})}. \quad (6)$$

Следует отметить, что квази-*phi*-функция (6) нормализована, т.е. $\max_{t_{ij} \in U \subset R^1} \Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij})$ есть нормализованная *phi*-функция объектов $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ и по значению совпадает с расстоянием между объектами $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$. Предположим, что расстояние между $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ равно ρ_{ij} . Это означает, что существуют две точки $e_i \in E_i$ и $e_j \in E_j$ такие, что расстояние между ними равно ρ_{ij} (рис. 2).

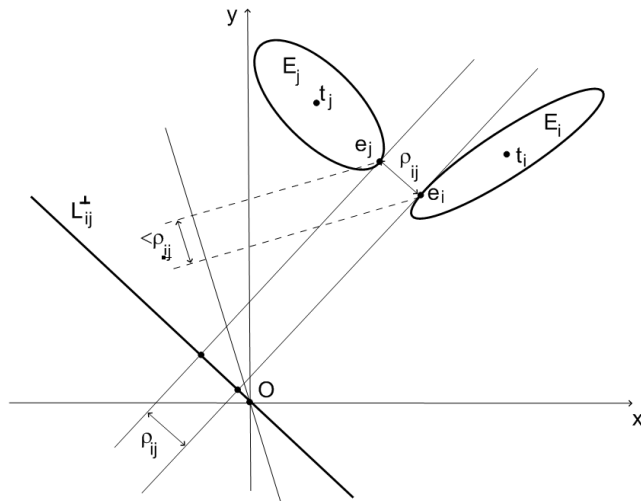


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству нормализованности квази-*phi*-функции $\Phi^{E_i E_j}$

Построим отрезок $e_i e_j$. Отметим, что по способу построения отрезок $e_i e_j$ параллелен нормали к объекту E_i в точке e_i и нормали к объекту E_j в точке e_j . Тогда в качестве прямой L_{ij}^\perp мо-

жет быть выбрана прямая, проходящая через точку O параллельно отрезку $e_i e_j$.

Очевидно, что расстояние между проекциями точек e_i и e_j на прямую L_{ij}^\perp равно ρ_{ij} и что при любом другом угле наклона прямой расстояние между проекциями точек на прямую будет меньше ρ_{ij} .

Нормализованность квази-*phi*-функции (6) означает, что соблюдение условий минимально допустимых расстояний между эллипсами $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$ обеспечивается выполнением неравенства $\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) \geq \rho_{ij}$.

Для формализации условий принадлежности эллипса $E_i(t_i)$ области Ω воспользуемся нормализованной *phi*-функцией $\Phi^{E_i \Omega^*}(t_i)$, описывающей условия непересечения объектов $E_i(t_i)$ и $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int} \Omega$. Функцию $\Phi^{E_i \Omega^*}(t_i)$ предлагается построить на основе аналитического описания условий принадлежности Ω проекций $E_i(t_i)$ на оси глобальной системы координат (рис. 3).

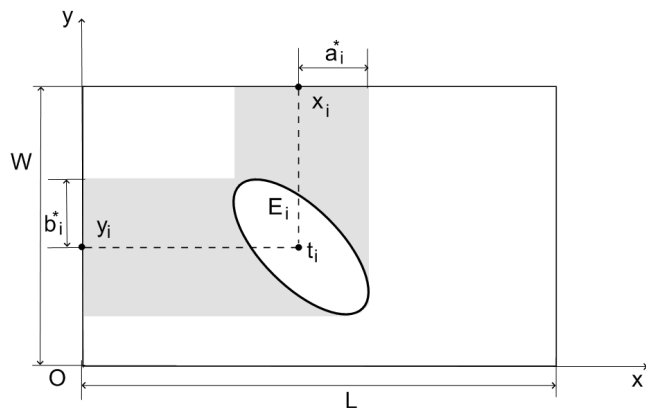


Рис. 3. Формализация условий размещения эллипса в области

Так, эллипс $E_i(t_i)$ принадлежит прямоугольной области с размерами $L \times W$, если неотрицательна *phi*-функция

$$\Phi^{E_i \Omega^*}(t_i) = \min_{k=1, \dots, 4} f_{ik}(t_i), \quad (7)$$

где

$$f_{i1}(t_i) = x_i - a_i^*,$$

$$f_{i2}(t_i) = y_i - b_i^*,$$

$$f_{i3}(t_i) = L - x_i - a_i^*,$$

$$f_{i4}(t_i) = W - y_i - b_i^*,$$

$$a_i^* = \sqrt{a_i^2 \cos^2 q_i + b_i^2 \sin^2 q_i} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 q_i},$$

$$b_i^* = \sqrt{a_i^2 \sin^2 q_i + b_i^2 \cos^2 q_i} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 q_i}.$$

Таким образом, с учетом нормализованности функций (6) и (7), математическая модель задачи упаковки эллипсов в прямоугольный контейнер Ω минимальной площади может быть сформулирована в виде

$$F(t^*) = \min_{t \in \Theta \subset R^n} F(t), \quad (8)$$

$$\Theta = \{t \in R^n : \Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) \geq \rho_{ij}, \quad (9)$$

$$\Phi^{E_i \Omega^*}(t_i) \geq \rho_i, i < j \in I_N\},$$

где

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_N, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{N, N-1}, L, W),$$

$$n = 3N + \frac{N(N-1)}{2} + 2,$$

$$F(t) = L \cdot W,$$

$$\Phi^{E_i E_j}(t_i, t_j, t_{ij}) = (x_i - x_j) \cos t_{ij} +$$

$$+ (y_j - y_i) \sin t_{ij} - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 (q_i - t_{ij})} -$$

$$- \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2 (q_j - t_{ij})},$$

$$\Phi^{E_i \Omega^*}(t_i) = \min_{k=1, \dots, 4} f_{ik}(t_k),$$

$$f_{i1}(t_i) = x_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 q_i},$$

$$f_{i2}(t_i) = y_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 q_i},$$

$$f_{i3}(t_i) = L - x_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 q_i},$$

$$f_{i4}(t_i) = W - y_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 q_i}.$$

Следует отметить, что хотя в неравенствах, описывающих область допустимых решений Θ , и встречаются радикалы, подкоренные выражения строго положительны на всей области определения.

Задача условной оптимизации (8) – (9) – *NP*-трудная задача нелинейного программирования. Область допустимых решений Θ имеет сложную структуру: это несвязное множество, каждая компонента связности Θ есть много-

связной, граница Θ состоит из нелинейных поверхностей, содержащих овраги. Матрица системы неравенств, задающих Θ , сильно разрежена и имеет блочную структуру.

Задача (8) – (9) представляет собой точную формулировку задачи упаковки эллипсов. Построенная модель описывает невыпуклую и непрерывную задачу нелинейного программирования. Область определения содержит все глобально-оптимальные решения. Можно, по крайней мере теоретически, использовать для решения такой задачи глобальные решатели задач нелинейного программирования и получить решение, которое становится оптимальной упаковкой.

Однако на практике мы имеем дело с большим числом переменных и количеством неравенств в модели. В результате поиск даже локально-оптимального решения, не говоря уже о глобальном экстремуме, при большом числе (> 20) эллипсов становится труднореализуемой задачей для *NLP* решателей при решении задачи вида (8) – (9) непосредственно. Так, авторам [6] не удалось получить допустимое решение задачи упаковки эллипсов при использовании решателей *BARON*, *LindoGlobal* и *GloMIQO* при $N > 14$. Для поиска *достаточно хорошей* локально-оптимальной упаковки эллипсов за разумное время вычислений в [8, 9] предложен и разработан подход, позволяющий существенно повысить вероятность нахождения локального экстремума задачи при одновременном значительном сокращении затрат вычислительных ресурсов.

В соответствии с разработанной в [8, 9] методикой, стратегия решения задачи (8) – (9) состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Генерируется набор стартовых точек из области допустимых решений Θ задачи (8) – (9), используя модифицированный алгоритм *SPA* из [8]. При этом изменению подвергнут только шаг алгоритма, касающийся поиска допустимых значений дополнительных переменных для квази-*phi*-функции.

Шаг 2. Осуществляется поиск локального минимума функции цели $F(t)$ задачи (8) – (9), стартуя из точек, полученных на шаге 1, с при-

менением описанной в [8] процедуры *LOFRT* локальной оптимизации с преобразованием области допустимых решений.

LOFRT процедура позволяет сократить затраты вычислительных ресурсов благодаря сведению задачи (8) – (9) к последовательности подзадач меньшей размерности и с меньшим количеством ограничений. В то время как имеется $2O(n^2)$ пар эллипсов, предложенный подход в большинстве случаев позволяет оперировать на каждом этапе $O(n)$ парами, так как после ввода системы дополнительных ограничений, налагаемых на параметры размещения эллипсов, достаточно проверять для каждого эллипса только условия непересечения с ближайшими соседями.

Шаг 3. В качестве приближения к оптимальному решению задачи (8) – (9) выбирается лучшее локальное решение из вариантов, полученных на шаге 2.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов. Так, для тестового примера *TC50*, предложенного в [6], применение новой квази-*phi*-функции привело к уменьшению среднего времени получения одного локального экстремума (301,25 с, [9]) в 2,5 раза. При этом в ходе тестирования было достигнуто рекордное на сегодняшний день значение функции цели 152,602 для задачи *TC50*. Полученное решение представлено на рис. 4.

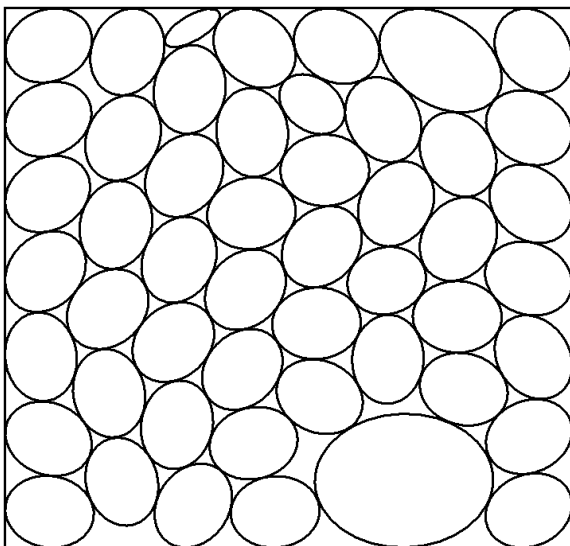


Рис. 4. Локальный экстремум задачи упаковки 50 эллипсов

Вычислительные эксперименты проводились на *AMD Athlon 64x2 Dual 5200+*. Решение подзадач нелинейного программирования осуществлялось с помощью программы *IPOPT* [17], доступной на открытом некоммерческом ресурсе (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>).

В соответствии с результатами тестирования, предложенная стратегия решения задачи (8) – (9) позволяет эффективно получать локально оптимальные решения при $N < 300$. Для задач с большим числом эллипсов решение возможно, но с большими затратами вычислительных ресурсов.

Следует отметить, что процедура *LOFRT* представляет собой реализацию так называемого *compaction*-алгоритма и может быть использована непосредственно для улучшения приближенных решений, полученных другими авторами и методами.

Заключение. Предложенная новая квази-*phi*-функция для аналитического описания условий непересечения эллипсов, допускающая непрерывные вращения и трансляции объектов и учитывающая возможность наличия между ними минимально допустимых расстояний, а также эффективный алгоритм поиска локально-оптимальных решений позволяют существенно сокращать затраты вычислительных ресурсов, что дает возможность решать практические задачи большей размерности и улучшать приближенные решения, полученные другими авторами и их методами.

1. Toth L.F. Packing of ellipses with continuously distributed area // *J. of Discrete Mathematics* – 1986. – **60**. – P. 263–267. – doi:10.1016/0012-365X(86)90018-X.
2. An ellipse-based discrete element model for granular materials / J.M. Ting, M. Khwaja, L.R. Meachum et al. // *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 1993. – **17** (9). – P. 603–623. – doi:10.1002/nag.1610170902.
3. Feng Y., Han K., Owen D. An Advancing Front Packing of Polygons, Ellipses and Spheres // *Discrete Element Methods* – 2002. – P. 93–98. – doi:10.1061/40647(259)17.
4. Vickers G.T. Nested Ellipses // *Appl. Probab. Trust.* – 2009. – **41** (3). – P. 131–137.
5. Xu W.X., Chen H.S., Lv Z. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical

- particles // *Physica*. – 2011 – **390**. – P. 2452–2467. – doi:10.1016/j.physa.2011.02.048.
6. *Kallrath J., Rebennack S.* Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles // *J. of Global Optimization*. – 2013. – **59** (2–3). – P. 405–437. – doi:10.1007/s10898-013-0125-3.
 7. *Kallrath J.* Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles // *Ibid.* – 2008. – **43** (2–3). – P. 299–328. – doi:10.1007/s10898-007-9274-6.
 8. *Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А.* Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний // *Журнал обчислювальної математики*. – 2014. – Т. 1. – С. 27–42.
 9. *Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T.* Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses // *J. of Glob. Optim.* 2015. – P. 283–307. – DOI: 10.1007/s10898-015-0331-2.
 10. *Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова и др. // Доп. Нац. акад. наук України.* – 2014. – Т. 9. – С. 49–54.
 11. *Optimized Object Packings Using Quasi-Phi-Functions / Yu. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov et al. // Vol. 105 of the series Springer Optimization and Its Applications.* – 2015. – P. 265–293.
 12. *Birgin E.G., Lobato R., Martínez J.M.* Packing Ellipsoids by Nonlinear Optimization // *J. of Global Optim.* – 2016. – **65**. – P. 709–743.
 13. *Packing circles within ellipses / E.G. Birgin, L.H. Bustamante, H.F. Callisaya et al. // Int. transactions in operational res.* – 2013. – **20** (3). – P. 365–389. – doi:10.1111/itor.12006.
 14. *Birgin E.G., Martínez J.M.* Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization // *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2014.*
 15. *General Ellipse Packings in an Optimized Circle Using Embedded Lagrange Multipliers (Submitted for publication January 2016) / Frank J. Kampas, János D. Pintér, Ignacio Castillo et al. // Global Optimization Submissions.* – 2016. – http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2016/01/5293.pdf.
 16. *Kampas Frank J., Castillo Ignacio, Pintér János D.* General Ellipse Packings in Optimized Regular Polygons, (Submitted for publication Feb. 2016) // *Ibid.* – 2016. – http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2016/03/5348.pdf.
 17. *Wachter A., Biegler L.T.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Mathematical Programming*. – 2006. – **106** (1). – P. 25–57. – doi:10.1007/s10107-004-0559-y.
 18. *Математическая модель индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков / А.Н. Данилин, В.В. Комяк, В.М. Комяк и др. // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та.* – Херсон: ХНТУ, 2016. – № 3(58). – С. 501–505.

Поступила 06.09.2016

E-mail: vkomyak@ukr.net

© А.Н. Данилин, В.В. Комяк, В.М. Комяк,
А.В. Панкратов, 2016

UDC 519.6

A.N. Danilin, V.V. Komyak, V.M. Komyak, A.V. Pankratov

The Ellipses Packing in a Rectangle of the Minimal Size

Keywords: packaging, ellipses, continuous turns, quasi-phi-function, mathematical model, nonlinear optimization.

Introduction. In this paper, we deal with the optimal ellipse packing problem, which is a part of operational research and computational geometry. Ellipse packing problems have a variety of real world applications. However, the problem has received relatively little attention in the literature so far. Finding high quality ellipse packings is a difficult computational problem.

Methods and results. The problem is formulated as follows: the set of ellipses is to be placed without overlapping, free of any orientation restrictions, on a rectangular plate such that the area of the rectangle is minimized.

The ellipses are described by the coordinates of their center and an orientation angle to allow their rotation. Two types of constraints are necessary to be modeled: the non-overlapping ellipses and the bounds placing the ellipses inside the rectangle. A new quasi-phi-function is developed for an analytical description of non-overlapping ellipses. An additional variable is introduced for each quasi-phi-function. Already known phi-function is applied to hold the containment constraint.

A new mathematical programming formulations for this problem in the form of a nonlinear programming problem are presented. The constrained optimization problem is NP-hard nonlinear programming problem. The solution space Θ has a complicated structure. A matrix of the inequality system which specifies Θ is strongly sparse and has a block structure. Our LOFRT procedure allows us to reduce the problem with $O(n^2)$ inequalities and $O(n^2)$ -dimensional solution space to a sequence of sub-problems, each with $O(n)$ inequalities and a $O(n)$ -dimensional solution subspace. This reduction is of a paramount importance, since it deals with non-linear optimization problems.

Conclusion. The ellipse packing problem in the form of a nonlinear programming problem is formulated and an efficient solution algorithm is developed. The presented algorithm allows to reduce the computational cost of the researched problem.