УДК 519.17

З.А. Шерман

О квадратной суммарной разметке некоторых графов

Рассмотрены методы построения квадратной суммарной разметки одноточечного соединения любого квадратного суммарного графа с цепью, реберного соединения n копий цикла C_3 и цепи, а также графа, полученного в результате цепного соединения циклов. Доказано существование квадратной суммарной разметки тотального графа цепи и дизъюнктивного объединения любых двух квадратных суммарных графов.

Ключевые слова: квадратная суммарная разметка, квадратный суммарный граф, тотальный граф.

Розглянуто методи побудови квадратної сумарної розмітки одноточкового з'єднання будь-якого квадратного сумарного графа з ланцюгом, реберного з'єднання n копій циклу C_3 з ланцюгом, а також графа, отриманого в результаті ланцюгового з'єднання циклів. Доведено існування квадратної сумарної розмітки тотального графа ланцюга та диз'юнктивного об'єднання будь-яких двох квадратних сумарних графів.

Ключові слова: квадратна сумарна розмітка, квадратний сумарний граф, тотальний граф.

Введение. Исследования, проводимые Аджифа и другими авторами в области теории чисел, мотивировали их к созданию двух новых типов разметок: квадратной суммарной и квадратной разностной. Квадратная суммарная разметка впервые определена в 2009 году в работе [1]. Ее авторы доказали существование этой разметки для таких классов графов, как деревья, цепи, циклы, полные графы K_n для $n \leq 5$, решетки, одноточечное соединение t копий цикла C_n. Джермина и Себастьян определили новые классы графов, допускающие квадратную суммарную разметку, к ним относятся: графы без циклов, циклы с хордой; дизъюнктивное объединение циклов mC_n, цепное соединение k копий цикла C_n [2]. В 2012 году Сомашекара и Вина [3] использовали термин квадратной суммарной разметки для определения строгой квадратной суммарной разметки. Они доказали, что цепи, дизъюнктивное объединение звезд, полное n-арное дерево, лобстеры допускают строгую квадратную суммарную разметку. Сведения о квадратной суммарной и строгой квадратной суммарной разметках, как и о большинстве других разметок, представлены в обзоре Гальяно [4].

В статье продолжено изучение квадратных суммарных графов. Предметом исследования есть новые типы графов, полученные в результате одноточечного соединения, реберного соединения или дизъюнктивного объединения графов.

Постановка задачи

Решается задача о существовании квадратной суммарной разметки для новых типов графов, полученных в результате одноточечного соединения любого квадратного суммарного графа с цепью, реберного соединения n копий цикла C_3 и цепи, а также цепного соединения циклов. Кроме этого, исследуются на наличие квадратной суммарной разметки, тотальный граф цепи и дизъюнктивное объединение любого числа квадратных суммарных графов.

Предварительные сведения

Рассмотрим конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G=(V,E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Если не указана их мощность, то будем считать $|V(G)|=p|$, $|E(G)|=q|$.

Определение 1. Функцию f называют квадратной суммарной разметкой графа G с p вершинами, если f – биекция из $V(G)$ на множество $\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v)=[f(u)]^2+[f(v)]^2$, где $u,v \in E(G)$ есть инъекцией из $E(G)$ на множество натуральных чисел [1].

Граф, допускающий квадратную суммарную разметку, называется квадратным суммарным графом.

Определение 2. Пусть заданы графы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ($n \geq 2$). Цепным соединением графов называется граф $G = \langle G_1 : G_2 : \ldots : G_n \rangle$, полученный из цепи P_{n+1} путем замены каждого ребра цепи на граф C_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$ [2].

Определение 3. Граф, полученный отождествлением произвольной вершины в каждом из заданных графов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ($n \geq 2$), называется одноточечным соединением этих графов [5].

Определение 4. Пусть задан граф $G = (V, E)$. Тотальным графом *T*(*G*) называется граф, у которого множеством вершин – $V(G) \cup E(G)$ и множеством ребер – $E''(G)$, где $E''(G) = E \bigcup \{(e_1, e_2) | e_1, e_2 \in E$ и e_1, e_2 смежные в графе $G\} \cup$ $\cup \{(v,e) \mid v \in V,\ e \in E$ и v – конечная вершина ребра e графа $G\}$ [5].

Определение 5. Дизъюнктивным объединением графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, … …, $G_n = (V_n, E_n)$ называется граф $G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup \ldots \bigcup G_n$ с множеством вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ и множеством ребер $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, где $V_1 \bigcap V_2 \bigcap \ldots \bigcap V_n = \varnothing$ [5].

Цепное, реберное и одноточечное соединения графов

Теорема 1. Граф $G = < C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots C_{n_m} >$ допускает квадратную суммарную разметку для любых натуральных чисел $n_i \geq 3$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Рассмотрим граф $G = < C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots C_{n_m} >$, образованный цепным соединением циклов $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_m}$. Обозначим $V(C_{n_1}) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \ldots, v_{n_1}^1\}$, $V(C_{n_2}) = \{v_1^2 = v_{n_1}^1, v_2^2, v_3^2, \ldots, v_{n_2}^2\}, \ldots, V(C_{n_m}) = \{v_1^m = v_{n_{m-1}}^{m-1}, v_2^m, v_3^m \ldots, v_{n_m}^m\}$ – множества вершин циклов $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_m}$, как показано на рис. 1.

Зададим вершинную разметку f графа $G = < C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots C_{n_m} >$ порядка $|V(G)| = n_1 + (n_2 - 1) + \ldots + (n_m - 1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_m - m + 1$ следующим образом:

$$f(v_j^1) = j - 1, \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n_1,$$

$$f(v_j^i) = f(v_{j-1}^i) + 1, \text{ для } i > 1,\ j = 2, \ldots, n_i. \quad (1)$$

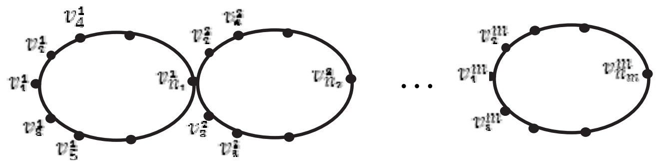

Рис. 1. Цепное соединение циклов $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_m}$

Функция f задает биективное отображение из множества вершин на множество $\{0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n_1 + n_2 + \ldots + n_m - m + 2\}$.

Пусть функция f порождает реберную разметку f^*, согласно определению 1. Из рекуррентных уравнений (1) получаем неравенства $f(v_1^1) + f(v_2^1) < f(v_j^1) + f(v_{j+2}^1) < f(v_{j+1}^1) + f(v_{j+3}^1)$ для $j = 1, 2, \ldots, n_1$, где функция f индуцирует различные метки ребер цикла C_{n_1}.Таким образом, метки ребер цикла C_{n_1}, образуют множество $S_1 = \{1, 4, 10, \ldots, (n_1 - 2)^2 + (n_1 - 1)^2\}$.

Выполняя аналогичные рассуждения для всех циклов, входящих в цепное соединение, получаем попарно не пересекающиеся множества реберных меток $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Следовательно, функция f^*, порожденная разметкой f, представляет собой инъекцию из *E*(*G*) на некоторое подмножество натуральных чисел. Согласно определению 1, разметка f для графа G – квадратная суммарная разметка, а граф G – квадратный суммарный. **Теорема доказана**.

Под реберным соединением *n* копий цикла C_3 и цепи P_n будем понимать граф, образованный соединением произвольной вершины *i*-й копии цикла C_3 с *i*-й вершиной цепи P_n, ребром, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2. Реберное соединение *n* копий цикла C_3 и цепи P_n допускает квадратную суммарную разметку для любого натурального числа *n*.

Доказательство. Рассмотрим граф G, представленный на рис. 2.

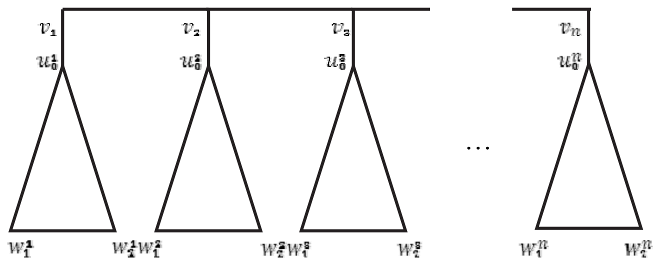

Рис. 2. Реберное соединение n копий цикла C_3 и цепи P_n

Обозначим $u_0^1, u_0^2, \ldots, u_0^n$ изоморфные образы вершины u цикла C_3, выбранной произвольным образом. Пусть $V(G) = \{v_i, u_0^i, w_1^i, w_2^i\}$ – множество вершин графа G, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Зададим вершинную разметку f графа G порядка $|V(G)| = 4n$ следующим образом:

$$f(v_i) = 4i - 4,$$
$$f(u_0^i) = 4i - 3,$$
$$f(w_1^i) = 4i - 2,$$
$$f(w_2^i) = 4i - 1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, f представляет собой биективное отображение множества вершин графа G на множество чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 4n-1\}$.

Найдем реберную разметку f^*, порождаемую функцией f, в соответствии с определением 1:

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = [f(v_i)]^2 + [f(v_{i+1})]^2, \qquad (2)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

$$f^*(u_0^i, v_i) = [f(u_0^i)]^2 + [f(v_i)]^2, \qquad (3)$$

$$f^*(w_1^i, w_2^i) = [f(w_1^i)]^2 + [f(w_2^i)]^2, \qquad (4)$$

$$f^*(w_1^i, u_0^i) = [f(w_1^i)]^2 + [f(u_0^i)]^2, \qquad (5)$$

$$f^*(w_2^i, u_0^i) = [f(w_2^i)]^2 + [f(u_0^i)]^2, \qquad (6)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Метки ребер, вычисленные с использованием формул (2) и (3), образуют множества чисел $S_1 = \{16, 80, \ldots, 32n^2 - 96n + 80\}$, $S_2 = \{1, 41, \ldots, 32n^2 - 56n + 25\}$. Метки ребер, полученные по формулам (4)–(6), составляют множества

$$S_3 = \{13, 85, \ldots, 32n^2 - 24n + 5\},$$
$$S_4 = \{5, 61, \ldots, 32n^2 - 40n + 13\},$$
$$S_5 = \{10, 74, \ldots, 32n^2 - 32n + 10\}.$$

Элементы множества $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \subset N$ различные, где N – множество натуральных чисел. Значит f^* представляет собой инъекцию в N. Согласно определению 1, f – квадратная суммарная разметка графа G. **Теорема доказана**.

Теорема 3. Одноточечное соединение любого квадратного суммарного графа G с цепью P_k, есть квадратным суммарным графом для любого k.

Доказательство. Рассмотрим граф $G_1 = \langle G : P_k \rangle$, который есть одноточечным соединением квадратного суммарного графа G и цепи P_k. Обозначим $V(G) = \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ – множество вершин графа G, $V(P_k) = \{v_1 = w_l, v_2, \ldots, v_k\}$ – множество вершин цепи P_k. Пусть f есть квадратной суммарной разметкой G и вершина w_l имеет наибольшую метку, т.е. $f(w_l) = l - 1$. Зададим вершинную разметку f_1 графа G_1, следующим образом:

$$f_1(w_j) = f(w_j), \text{ где } j = 1, 2, \ldots, l.$$
$$f_1(v_i) = f_1(v_{i-1}) + 1, \text{ где } i = 2, \ldots, k. \qquad (7)$$

Отображение f_1 будет биекцией из $V(G_1)$ на множество $\{0, 1, 2, \ldots, k+l-2\}$.

Пусть функция f_1 порождает реберную разметку f^*, согласно определению 1.

Из рекуррентных уравнений (7) получаем неравенство $f_1(v_i) + f_1(v_{i+1}) < f_1(v_{i+1}) + f_1(v_{i+2})$ для $i = 1, 2, \ldots, k-2$, где функция f_1 индуцирует различные метки ребер цепи P_k, образующие множество $S = \{(l-1)^2 + l^2, \ldots, (l+k-3)^2 + (l+k-2)^2\}$.

Метки ребер изоморфного образа графа G в графе G_1, индуцируемые разметкой f_1, образуют множество чисел с максимальным элементом, не превышающим минимальный элемент из множества S. Следовательно, f^* представляет собой инъекцию. Согласно определению 1, f_1 – квадратная суммарная разметка графа G_1. **Теорема доказана**.

Тотальный граф и дизъюнктивное объединение произвольных графов

Теорема 4. Тотальный граф $T\left(P_n\right)$ цепи P_n – квадратный суммарный граф.

Доказательство. Обозначим $V\left(P_n\right)=\{u_1,u_2,\ldots$ $\ldots,u_n\}$, $E\left(P_n\right)=\left\{u_i\,u_{i+1}\,\middle|\,1\le i\le n-1\right\}$ – множество вершин и множество ребер цепи соответственно. Пусть граф $G=T\left(P_n\right)$ будет тотальным графом цепи P_n. Обозначим вершину $v_i \in V(G)$, инцидентную вершинам u_i и u_{i+1}, где $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$. Зададим вершинную разметку f графа G порядка $|V(G)| = 2n-1$ и размера $|V(G)| = 4n-5$ следующим образом:

$$f\left(u_i\right)=2i-2, \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f\left(v_i\right)=2i-1, \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, f представляет собой биективное отображение множества вершин графа G на множество чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 2n-2\}$.

Найдем реберную разметку f^*, порождаемую функцией f, в соответствии с определением 1:

$$f^*\left(u_i,u_{i+1}\right)=\left[f\left(u_i\right)\right]^2+\left[f\left(u_{i+1}\right)\right]^2, \qquad (8)$$

$$f^*\left(v_i,v_{i+1}\right)=\left[f\left(v_i\right)\right]^2+\left[f\left(v_{i+1}\right)\right]^2, \qquad (9)$$

$$f^*\left(u_i,v_i\right)=\left[f\left(u_i\right)\right]^2+\left[f\left(v_i\right)\right]^2, \qquad (10)$$

$$f^*\left(u_{i+1},v_i\right)=\left[f\left(u_{i+1}\right)\right]^2+\left[f\left(v_i\right)\right]^2, \qquad (11)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Метки ребер, вычисленные с использованием формул (8) и (9), образуют множество четных чисел $S_1 = \{4, 10, \ldots, 8n^2-24n+20)\}$. Метки ребер, полученные по формулам (10), (11) составляют множество нечетных чисел $S_2 = \{1, 5, 13, 25, \ldots, 8n^2-20n+13\}$.

Элементы множества $S=S_1\bigcup S_2\subset N$ различны, где N – множество натуральных чисел. Таким образом, функция f^* представляет собой инъекцию из $E(G)$ на множество S. Разметка f, согласно определению 1, есть квадратной суммарной разметкой, а граф G – квадратным суммарным. **Теорема доказана**.

Теорема 5. Дизъюнктивное объединение квадратных суммарных графов $G_1,G_2,\ldots,G_n$ – квадратный суммарный граф для любого n.

Доказательство. Пусть G будет дизъюнктивным объединением графов $G_1,G_2,\ldots,G_n$ с $\left|V\left(G\right)\right|==m_1+m_2+\ldots+m_n$, где $|V(G_i)| = m$ и $i=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим случай, когда $n = 2$. Обозначим $V(G_1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m_1}\}$, $V(G_2) = \{w_1, w_2, \ldots, v_{m_2}\}$ – множества вершин графов G_1 и G_2 соответственно. Пусть f и g – квадратные суммарные разметки G_1 и G_2. Зададим вершинную разметку f_1 графа $G_1\bigcup G_2$ следующим образом:

$$f_1\left(v_i\right)=f\left(v_i\right), \text{ где } i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$g_1\left(w_j\right)=g\left(w_j\right)+m_1, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, m_2.$$

Отображение f_1 будет биекцией из $V(G_1\cup G_2)$ на множество $\{0, 1, 2, \ldots, m_1+m_2-1\}$.

Введем реберную разметку f_1^* графа $G_1\cup G_2$ на основании определения 1. Очевидно, что элементы множеств $f_1^*(E(G_1))$ и $f_1^*(E(G_2))$ различны. Покажем, что эти множества не пересекаются.

Для меток ребер графа G_1 выполняется неравенство

$$f_1^*\left(v_i,v_j\right)=\left[f_1^*\left(v_i\right)\right]^2+\left[f_1^*\left(v_j\right)\right]^2\le$$
$$\le 2m_1^2-6m_1+5,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m_1, j = 1, 2, \ldots, m_1, i \neq j$.

Пусть w_t, w_l – любые смежные вершины G_2 с метками $g(w_t) = t$, $g(w_l) = l$, где $t, l \in \{1, \ldots, m_2\}$, $t \neq l$.

Найдем метку ребра w_tw_l:

$$f_1^*\left(w_t,w_l\right)=\left[f_1^*\left(w_t\right)\right]^2+\left[f_1^*\left(w_l\right)\right]^2=$$
$$=\left(t+m_1\right)^2+\left(l+m_1\right)^2=$$

$$= t^2 + 2tm_1 + m_1^2 + l^2 + 2lm_1 + m_1^2 =$$
$$= t^2 + l^2 + 2m_1^2 + 2m_1(t+l).$$

Так как $2m_1^2 + 2m_1(t+l) > 2m_1^2 - 6m_1 + 5$ для $\forall t, l \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$, то $f_1^*(w_1, w_2) > 2m_1^2 - 6m_1 + 5$. Следовательно, метки ребер графа $G_1 \cup G_2$, различны. Значит f_1^* представляет собой инъекцию. Согласно определению 1, f_1 – квадратная суммарная разметка графа $G_1 \cup G_2$.

Далее предположим, что $n = k$ и $k > 2$. Поскольку $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k = (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{k-1}) \cup G_k$, то рассмотрим дизъюнктивное объединение квадратных суммарных графов $H = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$ $\ldots \cup G_{k-1}$ и G_k. Выполняя рассуждения, аналогичные для случая $n = 2$, получаем квадратную суммарную разметку графа $H \cup G_k$. Следовательно, граф $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$ – квадратный суммарный граф. **Теорема доказана**.

Заключение. В данной статье расширен класс квадратных суммарных графов. Доказано существование квадратной суммарной разметки для тотального графа цепи, а также новых типов графов, полученных в результате одноточечного соединения, реберного соединения и дизъюнктивного объединения графов. Разработанные методы построения квадратной суммарной разметки могут быть использованы в дальнейших теоретических исследованиях.

1. *On square* difference Graphs . V. Ajitha, K. Princy K., V. Lokesha et al. // Int. J. of Mathematical Combinatorics. – 2012. – **1**(1). – P. 31–40.
2. *Germina K.*, *Sebastian R.* On square sum graphs // Proyecciones. – 2013. – **2**, N 32. – P. 107–117.
3. *Somashekara D.D.*, *Veena C.R.* On square sum labelings of graphs // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2012. – **15**(1). – P. 69–78.
4. *Gallian J.A.* A dynamic survey of graph labeling // The Electronic j. of Combinatorics. – 2014. – **DS6**. – P. 1–84.
5. *Harary F.* Graph Theory. – Reading, Massachusetts: Addison Wesley, 1973. – P. 1–384.

Поступила 19.10.2016

E-mail: *sherman.zoya@gmail.com*

UDC 519.17

Z.A. Sherman

Square Sum Labeling of Some Graphs

Keywords: Square sum labeling, square sum graph, total graph.

Research studies conducted by Ajitha and colleagues in the field of number theory inspired them to create two new types of labeling: square sum labeling and square difference labeling. For the first time square sum labeling was introduced to the scientific world in 2009. Its authors proved the existence of this labeling for such classes of graphs as trees, paths, cycles, complete graphs K_n (for $n \leq 5$), lattices, one-point union of n copies of the cycle C_n. Germina and Sebastian identified new classes of graphs that had square sum labeling, such as: Unicycle graphs, mC_n, cycle with a chord, the graph defined by path union of k copies of C_n. In 2012, Somashekara and Veena used the term “square sum labeling” in the meaning “strongly square sum labeling”. They proved that paths, disjoint union of stars, complete n-ary trees and lobsters had strongly square sum labeling. These labelings, as well as majority of others, are well presented in the review published by Gallian.

The existence of square sum labeling for new types of graphs, which were obtained using: i) one-point union of any square sum graph with the path, ii) edge union of n copies of the cycle C_3 with the path; iii) path union of cycles is proved. In addition, the total graph of the path and disjoint union of two square sum graphs are square sum graphs is shown.

●