УДК 519.14

Н.К. Тимофієва

Про симетрію комбінаторних множин

Исследована симметрия в комбинаторике, в частности свойственная упорядоченным по определенным правилам комбинаторным множествам. Ее математическая формулировка проводится с использованием конечных последовательностей, которые характеризуются приближенной или точной симметрией. Приведены примеры построенных последовательностей для комбинаторных множеств, которые упорядочиваются подмножествами изоморфных комбинаторных конфигураций. Показано, что для задачи коммивояжера распределение тождественных маршрутов в их множестве симметрично.

Ключевые слова: симметрия комбинаторных множеств, задача коммивояжера, комбинаторная конфигурация, комбинаторная оптимизация, целевая функция.

Досліджено симетрію в комбінаториці, зокрема властиву упорядкованим за певними правилами комбінаторним множинам. Її математичне формулювання проводиться з використанням скінченних послідовностей, які характеризуються наближеною або точною симетрією. Подано приклади побудованих послідовностей для комбінаторних множин, які упорядковуються підмножинами ізоморфних комбінаторних конфігурацій. Показано, що для задачі комівояжера розподілення тотожних маршрутів у їхній множині – симетричне.

Ключові слова: симетрія комбінаторних множин, задача комівояжера, комбінаторна конфігурація, комбінаторна оптимізація, цільова функція

Вступ. Відомо, що симетрія характерна для різноманітних структур як неживої, так і живої природи. В комбінаториці та комбінаторній оптимізації також має місце симетрія. В літературі розглядаються симетрії розбиття n-елементної множини на підмножини [1]. Ця комбінаторна конфігурація є аргументом цільової функції в різних задачах розбиття, зокрема в задачах класифікації та кластеризації. Для них вводяться класи еквівалентності, однією з умов яких є симетрія. Виділяють та досліджують групи симетрії на перестановках, визначають їхній порядок [2]. Зроблено спробу використати властивість симетрії при прийнятті оптимальних рішень в багатокритеріальній оптимізації, класифікації, кластеризації [3]. Але в літературі симетрія упорядкованих комбінаторних множин не аналізується. Комбінаторна конфігурація як аргумент цільової функції та закономірність зміни її значень в залежності від симетрії комбінаторних множин в літературі не розглядається.

Розглянемо симетрію множини комбінаторних конфігурацій, упорядкованих за певними правилами, та симетричне розподілення гамільтонових циклів у множині перестановок. Основну увагу приділено не виділенню симетричних груп та визначенню кількості їхніх видів, а вивченню деяких симетричних властивостей цієї множини, визначенню кількості однакових та різних маршрутів для задачі комівояжера, аналізу їх симетричного розподілення в упорядкованій множині перестановок.

Симетрія в комбінаториці

Симетрія передусім – *геометричне поняття*, однак воно застосовується також щодо негеометричних об'єктів у *математиці* та інших *науках*. В залежності від типу перетворень розрізняють різні її види. Найпростіші види симетрії – дзеркальна та осьова. Але це лише частковий випадок. Деякі симетрії ще не досліджено та не описано. Строге її означення навести також досить складно. Для вивчення різних видів симетрії використовують геометричний (зокрема в біології [4]) та алгебраїчний підходи [2, 5] (теорія груп). В теорії груп залежно від перетворень виділяють такі види симетрії: перенос, відображення, поворот, ковзна симетрія, обертання, гвинтова симетрія тощо. Симетрії характеризуються розміром, а число елементів групи називають порядком групи. Симетрії можуть бути точними або наближеними.

В комбінаториці також наявна симетрія як точна, так і наближена, зокрема вона властива комбінаторним множинам. Її математичне формулювання виконуємо з використанням скінченної послідовності чисел, яка будується за заданими правилами. Розглянемо симетрію, яка ґрунтується на рівності двох частин певного об'єкта. Уявна площина, яка ділить такий об'єкт навпіл, називається *площиною симетрії*. Під наближеною симетрією в комбінаториці маємо на увазі скінченну послідовність чисел, значення яких збільшується до найбільшого з них, а потім зменшується. Площина, яка проходить через найбільше число послідовності, ділить її на дві частини, значення яких від центру рівномірно зменшується, але ці частини необов'язково дзеркально симетричні. При точній симетрії уявна площина ділить послідовність чисел або по найбільшому числу, або проходить між двома найбільшими. Дві розділені частини – дзеркально симетричні.

Утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ [6]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1, ..., n\}$ – кількість елементів у w^k (в подальшому η позначатимемо і як η^k), $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, ..., q\}$) у w^k – порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W. В подальшому комбінаторну конфігурацію позначатимемо як з верхнім індексом w^k, так і без індексу.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за якими з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція та арифметичний [6, 7].

Означення 1. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i, ..., w_{\eta^i}^i)$ назвемо *ізоморфними*, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Означення 2. Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо *підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій*, якщо її елементи є такими.

Розглянемо комбінаторні конфігурації, множину W яких утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами. В цьому разі одним із операторів виступає або операція вибирання або арифметична. Вони утворюють як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації. Тому множина W, елементи якої утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами, складаються з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Існує скінченне число множин W, кожна з яких упорядкована по-своєму. Значна частина цих множин – структурована. Структуровані характеризуються різними видами симетрії як точними, так і наближеними. Такі комбінаторні множини впорядковуються рекурентно-періодичним методом, що ґрунтується на властивості періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій w і полягає в упорядковані цих множин інтервалами, в кожному з яких w утворюються за одними і тими ж правилами [7]. Для генерування комбінаторних множин з урахуванням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються:

- інтервал нульового рангу;
- обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу);
- інтервал σ-го рангу.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma - 1)$-го рангу, а інтервал першого рангу – з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього утворення та впорядкування, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині (комбінаторне число).

Упорядкуємо множину W підмножинами W_η, починаючи з $\eta = 1$ та закінчуючи $\eta = n$ за правилами, які визначаються алгоритмами [8, 9]. Знаючи правила впорядкування комбінаторних конфігурацій в $W_\eta \subset W$, визначимо кількість w у $W_\eta \subset W$ та побудуємо з цих чисел упорядковану скінченну послідовність. Очевидно, що для різних типів комбінаторних конфігурацій ці послідовності характеризуються як наближеною, так і точною симетрією. Для сполучень без повторень для різних значень n ці послідовності утворюють арифметичний трикутник і характеризуються точною симетрією. Для розбиття натурального числа або n-елементної множини на підмножини утворені скінченні послідовності характеризуються наближеною симетрією.

Приклад. Покладемо $n = 7$. Для сполучення без повторень отримаємо таку скінченну послідовність: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Для розбиття натурального числа вона має вигляд 1, 3, 4, 3, 2, 1, 1. Для розбиття n-елементної множини на підмножини – відповідно 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1.

Для множини перестановок з усіх видів симетрії виділимо ту, яка описується законами евклідової геометрії. Вважатимемо, що перестановка симетрична, якщо вона збігається сама з собою при русі без деформацій. Існує єдиний спосіб перемістити симетричну послідовність так, щоб вона збіглася з початковою. Це – її поворот на 180°. Уведемо такі означення.

Означення 3. Інверсією перестановки $w=(1, 2, \ldots, n-1, n)$ назвемо перестановку $\widetilde{w}=(n, n-1,..., 2, 1)$, тобто $w \in W$ та $\widetilde{w} \in W$, симетричні одна відносно другої.

Означення 4. Під симетрією упорядкованої комбінаторної множини розуміємо таку її структуру, коли числові значення кількості комбінаторних конфігурацій підмножин $W_\eta \subset W$ утворюють скінченну послідовність чисел, яка характеризується точною або наближеною симетрією.

Означення 5. Назвемо *прямою* та *оберненою* скінченні послідовності, які симетричні відносно лінії, паралельній осі абсцис або осі ординат.

Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [6]. Задачі цього класу, як правило, задані однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \widetilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\widetilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \widetilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо *вагами*. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач з елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,..., n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення за виконання заданих обмежень.

Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),\ldots$ $\ldots, \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)\,|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)\,|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\ \tilde{n}$). Функцію цілі $F(w^k)$ запишемо як $F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j)$.

Упорядкування множини перестановок підмножинами для задачі комівояжера [10]. Задача комівояжера: задано деяку кількість міст, відстань між якими відома. Необхідно знайти найкоротший шлях, який є гамільтоновим циклом. Під цим циклом розуміємо шлях в графі, який починається в заданій вершині, проходить через усі вершини один раз і повертається в початкову. Цей цикл в задачі комівояжера назвемо *маршрутом*.

Опишемо правила, за якими множину перестановок у задачі комівояжера можна упорядкувати підмножинами. Для цього розглянемо, яким чином беруть участь в утворенні маршруту елементи h наддіагоналей матриці C, $h = \overline{1, n-1}$.

Покладемо, що $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, тобто значення комбінаторної функції збігаються зі значеннями натурального аргументу та є номерами адрес матриці $Q(w^k)$ (або C). У задачах комбінаторної оптимізації комбінаторною матрицею може бути будь-яка із заданих. При цьому значення розв'язку задачі не змінюється. Помножимо функцію $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ на $\varphi(j)\,|_1^m$. З утвореної послідовності виділимо ті значення, для яких $\varphi(j) \neq 0$. Запишемо їх як $u(w^k, l)|_1^n = u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$, де $u_l\,(w^k, l) = \beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j)$, а $\varphi(j) \neq 0$. Назвемо $u(w^k, l)\,|_1^n$ маршрутом, а $H_u = (u(w^k, l)\,|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n)), w^k \in W,$ $u_l\,(w^k, l) \neq 0,\ k = \overline{1, n!})$ – множиною всіляких маршрутів.

Два маршрути $u(w^k, l)|_1^n$ та $u(w^i, l)|_1^n$ назвемо нетотожними, якщо вони відрізняються хоча б одним своїм значенням. При цьому порядок $u_l(w^k, l)$ в $u(w^k, l)|_1^n$ не враховується.

Лема 1. У множині H_u містяться маршрути $u(\widetilde{w}^k, l)|_1^n \in H_u$, які є інверсією маршрута $u(w^k, l)|_1^n \in H_u$.

Доведення. Для перестановки $w^k = (w_1^k, ..., w_n^k)$ за матрицею C побудуємо маршрут $u(w^k, l)|_1^n$. Для перестановки $\widetilde{w}^i = (\widetilde{w}_1^i, ..., \widetilde{w}_n^i)$, яка є інверсією w^k, також побудуємо маршрут $u(\widetilde{w}^i, l)|_1^n$. Оскільки порядок елементів у перестановках w^k, $\widetilde{w}^i$ не порушено, то елементи в маршрутах $u(w^k, l)|_1^n$ та $u(\widetilde{w}^i, l)|_1^n$ збігаються, причому маршрут $u(\widetilde{w}^i, l)|_1^n$ є інверсією $u(w^k, l)|_1^n$, що і доводить лему 1.

Наслідок **1**. Множина H_u складається з підмножин, кожна з яких містить тотожні маршрути. Назвемо їх *підмножинами тотожних маршрутів*.

Лема 2. Тотожні маршрути у будь-якій підмножині тотожних маршрутів множини H_u можна впорядкувати так, що наступний її маршрут утворюється з попереднього операцією циклу довжиною n.

Доведення. Розглянемо перестановку $w_k = (w_1^k, ..., w_n^k)$. Для неї за матрицею C побудуємо маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$. Операцією циклу одержимо наступну перестановку $w^{k+1} = (w_n^k, w_1^k, ..., w_{n-1}^k)$. Для w^{k+1} утворимо маршрут $u(w^{k+1}, l)|_1^n$. Оскільки порядок елементів у перестановці w^{k+1} не порушується в порівнянні з w^k, то $u_1(w^{k+1}, 1) = u_n(w^k, n)$, $u_2(w^{k+1}, 2) = u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^{k+1}, n) = u_{n-1}(w^k, n-1)$, що і доводить лему 2.

Наслідок **2**. Кількість тотожних маршрутів у будь-якій підмножині тотожних маршрутів множини H_u дорівнює $2n$.

Лема 3. Кількість нетотожних маршрутів у множині H_u дорівнює $\frac{(n-1)!}{2}$ [10].

Доведення. Кількість усіх маршрутів у множині H_u дорівнює $n!$. Множина H_u складається з підмножин, кожна з яких, згідно з наслідком 2, містить $2n$ тотожних маршрутів. Тоді $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$, що і доводить лему 3.

Теорема 1. Якщо у множині перестановок W наступну перестановку утворено з попередньої транспозицією двох елементів (алгоритм [11]), то всі нетотожні маршрути множини H_u знаходяться в інтервалі $[1,\ (n-2)(n-2)!]$.

Доведення. Множину перестановок W подамо прямокутною таблицею, k-й рядок якої є k-та перестановка, а p-й стовпець складається з елементів p-ї позиції w^k-ї перестановки.

Спочатку доведемо, що нетотожні маршрути в H_u розміщені в інтервалі $[1,(n-1)!]$. В n-му рядку перших $(n-1)!$ рядків таблиці W елементи не змінюють свого значення, а для позицій $1,\dots,(n-1)$ проводиться їх повний перебір. Тоді для будь-якої перестановки в інтервалі $[1,(n-1)!]$ її інверсію розміщено в наступних $(n-1)!+1,\dots,n!$ рядках таблиці W.

Розглянемо інтервал перестановок таблиці W $[(n-2)(n-2)!+1,(n-1)]$, де в $(n-1)$-му стовпці елемент w_{n-1}^k свого значення не змінює. Як відомо [10], будь-який стовпець таблиці W містить n різних символів, кожен з яких повторюється в ньому $(n-1)!$ раз. З цього випливає, що елемент w_{n-1}^k в $(n-1)$-му стовпці в інтервалі $[(n-2)(n-2)!,\ (n-1)!]$ повторюється $(n-2)!$ раз, в інтервалі $[1,(n-2)(n-2)!]$ елемент w_{n-1}^k в кожному стовпці інтервалу $[1,(n-3)(n-2)!]$ також повторюється $(n-2)!$ раз. Отже для будь-якої перестановки w^k з інтервалу $[(n-2)(n-2)!+1,\ (n-1)!]$ знайдеться їй інверсія $\widetilde{w}^k$, розміщена в інтервалі $[1,(n-2)(n-2)!]$, тобто маршрути, побудовані для перестановок в інтервалі $[1,(n-2)(n-2)!]$ нетотожні, що і доводить теорему 1.

***Наслідок* 3.** Якщо множину всіляких перестановок W упорядковано алгоритмом [11], то нетотожні маршрути в інтервалі $[1,(n-2)\times$ $\times(n-2)!]$ розміщені так. В інтервалі $[1,(n-2)!]$ кількість нетотожних маршрутів дорівнює $(n-2)!$, в інтервалі $[(n-2)!+1, 2(n-2)!]$ їхня кількість дорівнює $(n-2)!-(n-3)!$, в інтервалі $[(n-3)(n-2)!,(n-2)(n-2)!]$ також дорівнює $(n-2)!-(n-3)(n-3)!$.

Отже, множина H_u складається з підмножин, кожна з яких містить тотожні маршрути. Назвемо їх *підмножинами тотожних маршрутів*. Із H_u виділимо нетотожні маршрути і подамо їх множиною $\widetilde{H}$. Кількість нетотожних маршрутів у H_u дорівнює $\frac{(n-1)!}{2}$. Упорядкуємо $u(w^k,l)|_1^n$ так, що $u_1(w^k,1) < u_2(w^k,2) <$ $< \dots u_{n-1}(w^k,n-1) < u_n(w^k,n)$. Розглянемо деякі властивості множини $\widetilde{H}$.

Теорема 2. Множина $\widetilde{H}$ складається з підмножин $\widetilde{H}_r$, $r=\overline{1,n-2}$, кожна з яких містить маршрути $u(w^k,l)|_1^n$, $u(w^i,l)|_1^n$, найменші значення яких однакові, тобто $u_1(w^k,1)=$ $=u_1(w^i,1)$ та $u_1(w^k,1),\ u_1(w^i,1)\in\{1,\dots,n-2\}$. Кількість маршрутів у підмножині $\widetilde{H}_r$, у яких $u_1(w^k,1)=1$, дорівнює $(n-2)!$ Якщо найменше значення $u_1(w^k,1)=n-2$, то кількість таких маршрутів у $\widetilde{H}_r$ дорівнює $(n-3)!$.

Доведення. Те, що найменші значення $u_1(w^k,1)\in\{1,\dots,n-2\}$, випливає із структури перестановки w^k. Зафіксуємо у перестановці w^k елементи w_s^k, w_1^k. З іншими w_t^k елемент w_1^k має $(n-2)$ комбінації, $s,t\in\{2,\dots,n-1\}$, $s\neq t$. Будь-який маршрут для цих перестановок містить два елементи з першого рядка h наддіагоналей, $h=\overline{1,n-1}$, а $u_1(w^k,1)\in\{1,\dots,n-2\}$, що і доводить першу частину теореми 2.

Оскільки найменші значення у маршруті $u_1(w^k,1) \in \{1,...,n-2\}$, то за цією ознакою розділимо $\widetilde{H}$ на підмножини так, що $\widetilde{H}_r \bigcap \widetilde{H}_s = \varnothing$, $\widetilde{H}_s, \widetilde{H}_r \neq \varnothing$, $\bigcup_{r=1}^{n-2} \widetilde{H}_r = \widetilde{H}$, $s, r \in$ $\in \{1,...,n-2\}$, $s \neq r$. В $\widetilde{H}_1$ входять маршрути, найменше значення елемента у кожного з яких $u_1(w^k,1) = 1$, в $\widetilde{H}_2$ входять маршрути, найменше значення елемента у кожного з яких $u_1(w^k,1) = 2$, а $\widetilde{H}_{n-2}$ – містить підмножину маршрутів, найменше значення кожного з яких $u_1(w^k,1) = n-2$.

За структурою перестановок нескладно визначити, що підмножина $\widetilde{H}_r$ містить $(n-2)!$ маршрутів, найменше значення елементів у яких $u_1(w^k,1) = 1$. Якщо елемент $u_1(w^k,1) = 1$ в $u(w^k,l)|_1^n$, то він у сполученні з одним із елементів $\{2,...,n-1\}$ зустрічається в $(n-3)!$ маршрутах. Тоді кількість маршрутів, які містять найменше значення елемента $u_1(w^k,1) = 2$, дорівнює $(n-2)!-(n-3)! = (n-1)(n-3)!$ Для $u_1(w^k,1) = 3$ їхня кількість дорівнює $(n-2)!-2(n-3)!$ Відповідно, якщо $u_1(w^k,1) =$ $= n-2$, то кількість таких маршрутів у $\widetilde{H}_r$ дорівнює $(n-2)!-(n-1)(n-3)! = (n-2)!-(n-2)!+$ $+(n-3)! = (n-3)!$, що і доводить теорему 2.

Елементи рядків h наддіагоналей матриці C подамо підмножинами S_t, $t \in \{1,...,n-1\}$. В першу підмножину S_1 занесемо перші $n-1$ елементи першого рядка матриці C. У множину S_2 занесемо наступні $n-2$ елементи, належні другому рядку матриці C, і т.д. Підмножина S_{n-1} складається з одного, $\frac{n(n-1)}{2}$-го елемента.

Теорема 3. Утворення маршрутів $u(w^k,l)|_1^n \in$ $\in H_u$ проводиться вибиранням із S_t, $t \in \{1,...$ $..., n-1\}$, по одному, по два елементи або не вибирається жоден елемент.

Доведення. Будь-яка підмножина S_t містить значення, які визначають відстані між вершинами a_s та a_r, $a_s, a_r \in A$ (відповідно між елементами w_t^k перестановки w^k). Згідно з визначенням маршруту, w_t^k перестановки w^k має зв'язок лише з двома сусідніми елементами w_{t-1}^k та w_{t+1}^k. Тому в утворенні маршруту $u(w^k,l)|_1^n \in H_u$ може брати участь не більше двох елементів із будь-якої підмножини S_t. З іншого боку, підмножини S_t, містять не всі значення відстані між w_s^k-м та w_t^k-м елементами. Для цих випадків в утворенні деяких маршрутів $u(w^k,l)|_1^n$ вибирається з S_t тільки один елемент. Якщо утворення маршруту відбувається вибиранням по два елементи з двох і більше підмножин із $S_1,...,S_\zeta$, $\zeta = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, то з будь-якої із $S_{\zeta+1},...,S_{n-1}$ не вибирається жоден елемент, що і доводить теорему 3.

***Наслідок* 4.** Підмножина $\widetilde{H}_1 \subset \widetilde{H}$ містить маршрути, утворені з елементів матриці C, взятих по одному з кожної підмножини S_t, $t \in \{1,...,n-1\}$, виключаючи першу.

***Наслідок* 5.** Підмножина $\widetilde{H}_{n-2} \subset \widetilde{H}$ містить маршрути, утворені з елементів матриці C, взятих по два з перших ς підмножин S_t, $t \in \{1,...,\zeta\}$, причому, якщо n – парне, то із підмножини S_ς береться лише один елемент.

Відповідно, множина перестановок W розділяється на $n-2$ підмножини. Позначимо їх K_r. Якщо $u(w^k,l)|_1^n \in H_r$, то $w^k \in K_r$.

Розділення множини маршрутів, відповідно і перестановок, на підмножини з урахуванням незалежних від вхідних даних параметрів дозволяє при знаходженні оптимального маршруту визначати підмножину, яка містить глобальний розв’язок. До того ж така структуризація множини комбінаторних конфігурацій дозволяє визначати розподілення в ній тотожних маршрутів.

Т а б л и ц я 1. Розподіл тотожних маршрутів у множині H_u для $n = 4$

Номери перестановок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Номери маршрутів	1	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1

Для деяких впорядкувань комбінаторних множин вони розподілені у W симетрично.

Розподіл тотожних маршрутів для множини перестановок W . Упорядкуємо множину перестановок за певними правилами (наприклад алгоритмом [11]). Для неї побудуємо множину маршрутів H_u. Виділимо в ній підмножини нетотожних маршрутів, які перенумеруємо від одиниці до $\frac{(n-1)!}{2}$. Для t-го маршруту із нетотожних вирахуємо інтервал – кількість маршрутів, розміщених між однаковими маршрутами у множині H_u , враховуючи перший і останній, $t \in \left(1,...,\frac{(n-1)!}{2}\right)$. З отриманих числових значень інтервалів тотожних маршрутів побудуємо скінченну послідовність. Побудовані послідовності характеризуються як точною симетрією, так і наближеною. Серед них виділимо прямі, для яких існують обернені скінченні послідовності. Прямі та обернені послідовності симетричні відносно одна до другої.

Наведемо розподіл маршрутів у множині H_u, впорядковані алгоритмом [11] для значень $n = 4$ та $n = 5$. Для $n = 4$ кількість нетотожних маршрутів дорівнює трьом. Тобто перестановкам 1) 1, 2, 3, 4; 2) 2, 1, 3, 4; 3) 2, 3, 1, 4 відповідають маршрути: 1) 1, 3, 4, 6; 2) 1, 2, 5, 6; 3) 2, 3, 4, 5. Останні будуються за матрицею C . Елемент маршруту містить номер адреси матриці C , за якою визначається відстань між певними містами. Множина маршрутів H_u складається з трьох підмножин, кожна з яких містить вісім тотожних маршрутів. У табл. 1 та на рис. 1 наведено розподілення у множині H_u тотожних маршрутів. Як видно з рис. 1, їх розміщення в H_u характеризується дзеркальною симетрією.

Для кожного із тотожних маршрутів вирахуємо інтервал – кількість маршрутів, розміщених між однаковими маршрутами, включаючи перший і останній. Результати подамо в табл. 2, 3 та рис. 2, 3. Перший рядок табл. 2 та 3 містить номер інтервалу між тотожними маршрутами, а другий – кількість маршрутів у інтервалі для певного маршруту.

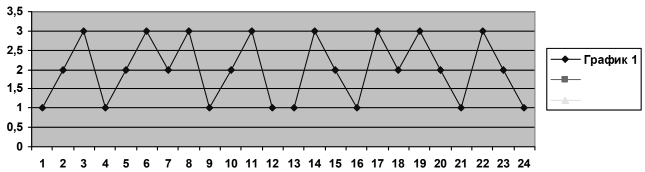

Рис. 1. Розподіл першого, другого та третього маршрутів у множині H_u для $n = 4$

Т а б л и ц я 2

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7
1	4	6	4	2	4	6	4
2	4	3	4	6	4	3	4

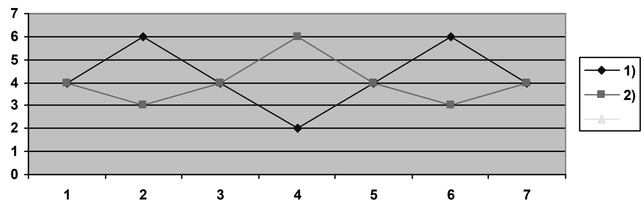

Рис. 2. Розподіл першого та другого маршрутів у множині H_u для $n = 4$

Т а б л и ц я 3

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7
3	4	3	4	4	4	3	4

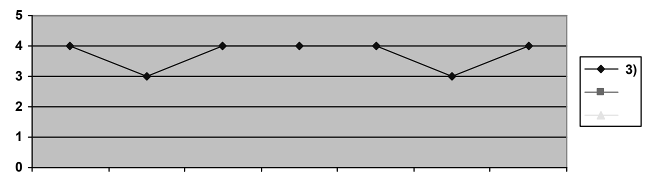

Рис. 3. Розподіл третього маршруту у множині H_u для $n = 4$

Як видно з рис. 2 та 3, для $n = 4$, тотожні маршрути розподілені у множині H_u з інтервалами симетрично відносно його середини.

Для $n = 5$ однакові маршрути розподілено у такий спосіб. Значення інтервалів між маршрутами підмножин другої та четвертої, сьомої та 11-ї, першої та п'ятої, восьмої та 10-ї утворюють числові послідовності, які відносно одна до одної є прямими та оберненими. Відповідно, вони розміщені у множині H_u дзеркально симетрично. Маршрути підмножин третьої та 12-ї, шостої та дев'ятої розміщені з інтервалами симетрично відносно середини множини H_u. Значення чисел в табл. 4–9 аналогічне, як і в табл. 2 та 3.

Таблиця 4

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	24	6	14	21	9	6	9	21	14
5	14	21	9	6	9	21	14	6	24

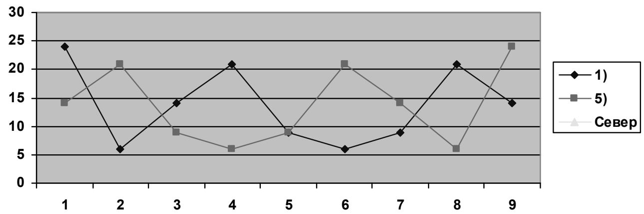

Рис. 4. Розподіл першого та п'ятого маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Таблиця 5

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	9	30	9	6	10	20	10	20	10
4	10	20	10	20	10	6	9	30	9

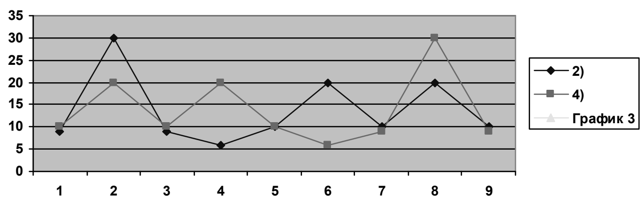

Рис. 5. Розподіл другого та четвертого маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Таблиця 6

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	9	21	14	6	24	6	14	21	9
12	9	6	10	20	10	20	10	6	9

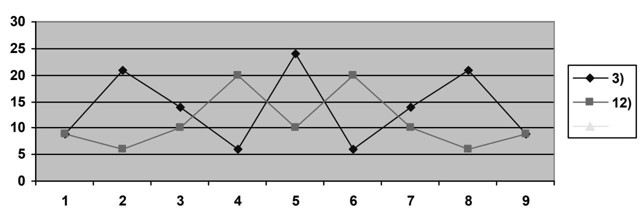

Рис. 6. Розподіл третього та 12-го маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Таблиця 7

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	14	12	14	12	14	12	14	12	14
9	8	18	8	18	8	18	8	18	8

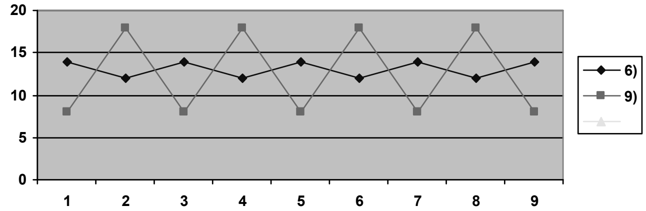

Рис. 7. Розподіл шостого та дев'ятого маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Таблиця 8

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	14	6	24	6	14	21	9	6	9
11	9	6	9	21	14	6	24	6	14

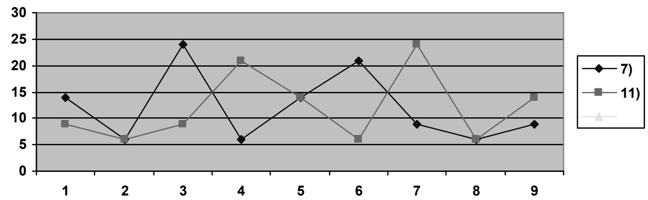

Рис. 8. Розподіл сьомого та 11-го маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Таблиця 9

№ інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	10	20	10	6	9	30	9	6	10
10	10	6	9	30	9	6	10	20	10

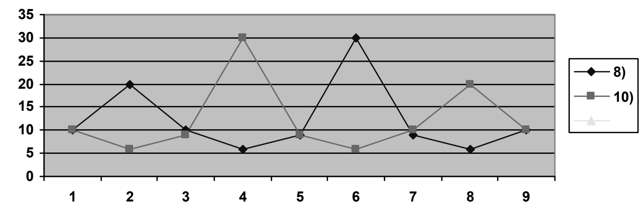

Рис. 9. Розподіл восьмого та 10-го маршрутів у множині H_u для $n = 5$

Висновок. Комбінаторні множини характеризуються як точною, так і наближеною симетрією. Множина перестановок впорядковується багатьма способами та може бути як структурованою, так і не структурованою, серед яких існують такі структуровані, у яких тотожні маршрути розподілено симетрично. Результати можна використовувати при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації різних класів для аналізу зміни значень цільової функції в залежності від структури вхідних даних з урахуванням симетрії комбінаторних конфігурацій та при вивченні різних природних явищ, яким властива симетрія та які мають комбінаторну природу [12].

1. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В*. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
2. *Фрид Э*. Элементарное введение в абстрактную алгебру. – М.: Мир, 1979. – 230 с.
3. *Козин И.В*. Принципы симметрии в теории принятия решений. – Запорожье: Поліграф, 2008. – 164 с.
4. *Петухов С.В*. Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации. – М.: Знание, Серия Математика, кибернетика. – 1988. – № 6. – 48 с.
5. *Наварро Хоакин*. Зазеркалье. Симметрия в математике. Мир математики. Том 17. – Москва, 2014. – 159 с.
6. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
7. *Тимофієва Н.К.* Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого Міжвуз. наук.-практ. сем. (15–16 жовт. 2010 р.). – Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т. – 2010. – С. 138–141.
8. *Тимофеева Н.К.* Об особенностях формирования и упорядочения выборок // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 3. – С. 174–182.
9. *Тимофеева Н.К.* О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества // УСиМ. – 2002. – № 5. – С. 6–23.
10. *Тимофеева Н.К.* О гамильтоновом цикле и задаче коммивояжера / Киев, 1990. – 29 с. Деп. в ВИНИТИ 14.11.90, № 5742-В90.
11. *Тимофеева Н.К.* Упорядочение множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ.– 1998. – № 6. – С. 78–88.
12. *Тимофієва Н.К.* Про симетрії комбінаторних множин та біологічних форм // System Analysis and Information Technologies, 16-th Int. Conf. SAIT 2014, Kyiv, Ukraine, May 26–30, 2014. Proc. / Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine “Kyiv Politechnic Institute”. Kyiv, Ukraine. 2014. – P. 160–161.

Поступила 11.01.2017

Тел. для справок: +38 044 502-6365 (Киев)
E-mail: *tymnad@gmail.com*

Н. К. Тимофеева

О симметрии комбинаторных множеств

Введение. Известно, что симметрия характерна для различных структур как неживой, так и живой природы. В комбинаторике и комбинаторной оптимизации также наблюдается симметрия. В литературе рассматривают симметрии разбиения n-элементного множества на подмножества [1]. Эта комбинаторная конфигурация является аргументом целевой функции в разных задачах разбиения, в частности в задачах классификации и кластеризации. Для них вводятся классы эквивалентности, одним из условий которых выступает симметрия. Выделяют и исследуют группы симметрии на перестановках, определяют их порядок [2]. Предпринимается также попытка использовать свойство симметрии при принятии оптимальных решений в многокритериальной оптимизации, классификации, кластеризации [3]. Но в литературе симметрия упорядоченных комбинаторных множеств не анализируется. Комбинаторная конфигурация как аргумент целевой функции и закономерность изменения ее значений в зависимости от симметрии комбинаторных множеств в литературе также не рассматривается.

Рассмотрим симметрию множества комбинаторных конфигураций, упорядоченных по определенным правилам, и симметричное распределение гамильтоновых циклов на множестве перестановок. Основное внимание уделено не выделению симметричных групп и определению количества их видов, а изучению некоторых симметричных свойств этого множества, определению количества одинаковых и разных маршрутов для задачи коммивояжера, анализу их симметричного распределения в упорядоченном множестве перестановок.

Симметрия в комбинаторике

Симметрия прежде всего – *геометрическое понятие*, однако оно применяется также относительно негеометрических объектов в *математике* и других *науках*. Самые простые виды симметрии – зеркальная и осевая. Но это лишь частный случай. Некоторые симметрии еще не исследованы и не описаны. Строгое ее определение сформулировать также достаточно сложно. Для изучения разных видов симметрии используют геометрический (в частности в биологии [4]) и алгебраический подходы [2, 5] (теория групп). В теории групп в зависимости от превращений выделяют такие виды симметрии: перенос, отображение, поворот, скользящая симметрия, вращение, винтовая симметрия и др. Симметрии характеризуются размером, а число элементов группы называют *порядком* группы. Симметрии могут быть точными или приближенными.

В комбинаторике также существует симметрия как точная, так и приближенная, что в частности свойственно упорядоченным комбинаторным множествам. Ее математическую формулировку выполняем, используя конечную последовательность чисел, которая строится по заданным правилам. Рассмотрим симметрию, основанную на равенстве двух частей определенного объекта. Мнимая плоскость, которая делит такой объект пополам, называется *плоскостью симметрии*. Под приближенной симметрией в комбинаторике подразумеваем конечную последовательность чисел, значения которых увеличиваются к наибольшему из них, а затем уменьшаются. Плоскость, проходящая через наибольшее число последовательности, делит ее на две части, значения которых от центра равномерно уменьшаются, но они необязательно зеркально симметричны. При точной симметрии мнимая плоскость делит последовательность чисел или по наибольшему числу, или проходит между двумя наибольшими. Две разделенные части – зеркально симметричны.

Образование и упорядочение комбинаторных конфигураций. Под комбинаторной конфигурацией понимаем любую совокупность элементов, которая образуется из всех или из некоторых элементов заданного базового множества $A=\{a_1,...,a_n\}$ [6]. Обозначим ее упорядоченным множеством, где $\eta\in\{1,...,n\}$ – количество элементов в w^k (далее η будем обозначать и как η^k), $W=\{w^k\}_1^q$ – множество комбинаторных конфигураций. Верхний индекс k ($k\in\{1,...,q\}$) в w^k – порядковый номер w^k в *W*, *q* – количество w^k в *W*. В дальнейшем комбинаторную конфигурацию будем обозначать как с верхним индексом w^k, так и без индекса.

Рекуррентным комбинаторным оператором назовем совокупность правил, по которым из элементов базового множества *A* образуется комбинаторная конфигурация w^k. Различные типы комбинаторных конфигураций образуются тремя рекуррентными комбинаторными операторами: выбирание, транспозиция и арифметический [6, 7].

Определение 1. Две нетождественные комбинаторные конфигурации $w^k=(w_1^k,...,w_{\eta^k}^k)$ и $w^i=(w_1^i,...,w_{\eta^i}^i)$ назовем изоморфными, если $\eta^k=\eta^i$.

Определение 2. Подмножество $W_{\eta^k}\subset W$ назовем *подмножеством изоморфных комбинаторных конфигураций*, если ее элементы являются таковыми.

Рассмотрим комбинаторные конфигурации, множество *W* которых образовано несколькими рекуррентными комбинаторными операторами. В этом случае одним из операторов выступает или операция выбирания или арифметическая. Они образуют как изоморфные, так и неизоморфные комбинаторные конфигурации. Поэтому множество *W*, элементы которого образованы несколькими рекуррентными комбинаторными операторами, состоят из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций.

Существует конечное число *W*, каждое из которых упорядочено по-своему. Значительная часть этих множеств – структурированная и характеризуется разными видами симметрии как точными, так и приближенными. Такие комбинаторные множества упорядочиваются рекуррентно-периодическим методом, основанным на свойстве периодичности, которое следует из рекуррентного способа образования комбинаторных конфигураций W и заключается в том, что эти множества упорядочены интервалами, в каждом из которых *w* образуются по одним и тем же правилам [7]. Для генерирования комбинаторных множеств с учетом свойства периодичности необходимо сформулировать три правила, по которым образуются:

- интервал нулевого ранга,
- ограничительная комбинаторная конфигурация (первая в интервале нулевого ранга),
- интервал σ-го ранга.

Поскольку интервал σ-го ранга состоит из интервалов $(\sigma-1)$-го ранга, а интервал первого ранга – из интервалов нулевого ранга, несложно, зная правила их образования и упорядочения, определить количество комбинаторных конфигураций в их множестве (комбинаторное число).

Упорядочим множество *W* подмножествами W_η, начиная с $\eta=1$ и заканчивая $\eta=n$ по правилам, которые определяются алгоритмами [8, 9]. Зная правила упорядочения комбинаторных конфигураций в $W_\eta\subset W$, определим количество *w* в $W_\eta\subset W$ и построим из этих чисел упорядоченную конечную последовательность. Очевидно, что для разных типов комбинаторных конфигураций эти последовательности характеризуются как приближенной, так и точной симметрией. Для сочетаний без повторений для разных значений *n* эти последовательности образуют арифметический треугольник и характеризуются точной симметрией. Для разбиения натурального числа или разбиения *n*-элементного множества на подмножества, образованные конечные последовательности характеризуются приближенной симметрией.

Пример. Положим $n=7$. Для сочетаний без повторений получим такую конечную последовательность: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Для разбиения натурального числа она имеет вид 1, 3, 4, 3, 2, 1, 1. Для разбиения *n*-элементного множества на подмножества соответственно 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1.

Для множества перестановок из всех видов симметрии выделим ту, которая описывается законами евклидовой геометрии. Примем, что перестановка симметрична, если она совпадает сама с собой при движении без деформаций. Существует единственный способ переместить симметричную последовательность так, чтобы она совпала с начальной. Это – ее поворот на 180°. Сформулируем такие определения.

Определение 3. Инверсией перестановки $w=(1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1, n)$ назовем перестановку $\tilde{w}=(n, n-1,..., 2, 1)$, т.е. $w\in W$ и $\tilde{w}\in W$ симметричны одна относительно другой.

Определение 4. Под симметрией упорядоченного комбинаторного множества понимаем такую его структуру, когда числовые значения количества комбинаторных конфигураций подмножеств $W_\eta \subset W$ образуют конечную последовательность чисел, которая характеризуется точной или приближенной симметрией.

Определение 5. Назовем *прямой* и *обратной* конечные последовательности, симметричные относительно линии, параллельной оси абсцисс или оси ординат.

Общая математическая постановка задачи комбинаторной оптимизации

Сформулируем общую постановку задачи комбинаторной оптимизации [6]. Задачи этого класса, как правило, задаются одной или несколькими множествами, например *A* и *B*, элементы которых имеют любую природу. Назовем эти множества *базовыми*. Имеются два типа задач. В *первом* типе каждое из этих множеств представим в виде графа, вершинами которого являются его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число $c_{lt} \in R$, которое назовем *весом* ребра (*R* – множество вещественных чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – количество элементов множества *A*, $\tilde{n}$ – количество элементов множества *B*. Положим, что $n = \tilde{n}$. Между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых назовем *весами*. Величины c_{lt} назовем *входными* данными и зададим их матрицами. Во *втором* типе задач между элементами заданного множества связей не существует, а весами являются числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов, числовые значения которых задаются конечными последовательностями, которые также являются входными данными. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одной или нескольких заданных множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, образуется комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки разных типов, разбиения и др.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого $F(w)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений.

Представим элементы h наддиагоналей симметричной комбинаторной матрицы $Q(w^k)$ комбинаторной функцией $\beta(f(j),w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1),w^k),...,\beta_m(f(m),w^k))$, а элементы h наддиагоналей симметричной матрицы C – функцией натурального аргумента $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1),..., \varphi(m))$, где $m = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$ – количество элементов h наддиагоналей матриц C и $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Если матрицы $Q(w^k)$ и C – несимметричные, то $\beta(f(j),w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$ содержат все их элементы, а $m = n^2$ (или $m = n\,\tilde{n}$). Функцию цели $F(w^k)$ запишем как $F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\,(f\,(j), w^k)\,\varphi\,(j)$.

Упорядочение множества перестановок подмножествами для задачи коммивояжера

Задача коммивояжера: задано некоторое количество городов, расстояние между которыми известно. Необходимо найти кратчайший путь, который является гамильтоновым циклом [10]. Под гамильтоновым циклом понимаем путь в графе, который начинается в заданной вершине, проходит через все вершины один раз и возвращается в начальную. Этот цикл в задаче коммивояжера назовем *маршрутом*.

Опишем правила, по которым множество перестановок в задаче коммивояжера можно упорядочить подмножествами. Для этого рассмотрим, каким образом участвуют в образовании маршрута элементы h наддиагоналей матрицы C, $h = \overline{1, n-1}$.

Положим, что $\beta(f\,(j), w^1)|_1^m = (1,..., m)$, т.е. значения комбинаторной функции совпадают со значениями натурального аргумента и являются номерами адресов матрицы $Q(w^k)$ (или C). В задачах комбинаторной оптимизации комбинаторной матрицей может быть любая из заданных. При этом значение решения задачи не изменяется. Умножим функцию $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ на $\varphi(j)|_1^m$. Из образованной последовательности выделим те значения, для которых $\varphi(j) \neq 0$. Запишем их как $u\,(w^k, l\,)|_1^n = (u_1(w^k, 1),..., u_n(w^k, n))$, где $u_l(w^k, l) = \beta_j\,(f\,(j), w^k)\varphi(j)$, а $\varphi(j) \neq 0$. Назовем $u(w^k,l)|_1^n$ маршрутом, а $H_u = (u(w^k,\ l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), \dots, u_n\,(w^k,\ n\,)\,)$, $w^k \in W$, $u_l(w^k,l) \neq 0$, $k = \overline{1, n!}$) – множеством всевозможных маршрутов.

Два маршрута $u\,(w^k, l\,)|_1^n$ и $u\,(w^i, l\,)|_1^n$ назовем нетождественными, если они отличаются хотя бы одним своим значением. При этом порядок $u_l(w^k, l)$ в $u\,(w^k, l\,)|_1^n$ не учитывается.

Лемма 1. Во множестве H_u содержатся маршруты $u\,(\tilde{w}^k, l\,)|_1^n \in H_u$, которые являются инверсией маршрута $u\,(w^k, l\,)|_1^n \in H_u$.

Доказательство. Для перестановки $w^k = (w_1^k,..., w_n^k)$ по матрице C построим маршрут $u\,(w^k, l)|_1^n$. Для перестановки $\tilde{w}^i = (\tilde{w}_1^i,..., \tilde{w}_n^i)$ – инверсии w^k, также построим маршрут $u\,(\tilde{w}^i, l\,)|_1^n$. Поскольку порядок следования элементов в перестановках w^k, $\tilde{w}^i$ не нарушен, то элементы в маршрутах $u\,(w^k, l\,)|_1^n$, $u\,(\tilde{w}^i, l\,)|_1^n$ совпадают, причем маршрут $u(\tilde{w}^i, l)|_1^n$ есть инверсия $u(w^k, l)|_1^n$, что и доказывает лемму 1.

***Следствие* 1.** Множество H_u состоит из подмножеств, каждое из которых содержит тождественные маршруты. Назовем их *подмножествами тождественных маршрутов*.

Лемма 2. Тождественные маршруты в любом подмножестве тождественных маршрутов множества H_u можно упорядочить так, что следующий ее маршрут образуется из предыдущего операцией цикла длиной *n*.

Доказательство. Рассмотрим перестановку $w^k = (w_1^k, ..., w_n^k)$. Для нее по матрице *C* построим маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$. Операцией цикла получим следующую перестановку $w^{k+1} = (w_n^k, w_1^k, ..., w_{n-1}^k)$. Для w^{k+1} образуем маршрут $u(w^{k+1}, l)|_1^n$. Поскольку порядок следования элементов в перестановке w^{k+1} не нарушается в сравнении с w^k, то $u_1(w^{k+1}, 1) = u_n(w^k, n)$, $u_2(w^{k+1}, 2) = u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^{k+1}, n) = u_{n-1}(w^k, n-1)$, что и доказывает лемму 2.

***Следствие* 2**. Количество тождественных маршрутов в любом подмножестве тождественных маршрутов множества H_u равно $2n$.

Лемма 3. Количество нетождественных маршрутов во множестве H_u равно $\frac{(n-1)!}{2}$ [10].

Доказательство. Количество всех маршрутов во множестве H_u равно $n!$. Множество H_u состоит из подмножеств, каждое из которых, согласно следствию 2, содержит $2n$ тождественных маршрутов. Тогда $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$, что и доказывает лемму 3.

Теорема 1. Если во множестве перестановок *W* следующая перестановка образована из предыдущей транспозицией двух элементов (алгоритм [11]), то все нетождественные маршруты множества H_u находятся в интервале $[1, (n-2)(n-2)!]$.

Доказательство. Множество перестановок *W* представим прямоугольной таблицей, *k*-я строка которой является *k*-й перестановкой, а *p*-й столбец состоит из элементов *p*-й позиции w^k-й перестановки.

Докажем, что нетождественные маршруты в H_u размещены в интервале $[1, (n-1)!]$. В *n*-й строке первых $(n-1)!$ строк таблицы *W* элементы не изменяют своего значения, а для позиций $1, ..., (n-1)$ выполняется их полный перебор. Тогда для любой перестановки в интервале $[1, (n-1)!]$ ее инверсия размещена в следующих $(n-1)!+1, ..., n!$ строках таблицы *W*.

Рассмотрим интервал перестановок таблицы *W* $[(n-2)(n-2)!+1, (n-1)]$, где в $(n-1)$-м столбце элемент w_{n-1}^k своего значения не изменяет. Как известно [10], любой столбец таблицы *W* содержит *n* разных символов, каждый из которых повторяется в нем $(n-1)!$ раз. Из этого следует, что элемент w_{n-1}^k в $(n-1)$-м столбце в интервале $[(n-2)(n-2)!, (n-1)!]$ повторяется $(n-2)!$ раз, в интервале $[1, (n-2)(n-2)!]$ элемент w_{n-1}^k в каждом столбце интервала $[1, (n-3)(n-2)!]$ также повторяется $(n-2)!$ раз. Следовательно, для любой перестановки w^k из интервала $[(n-2)(n-2)!+1, (n-1)!]$ найдется ей инверсия, размещенная в интервале $[1, (n-2)(n-2)!]$, т.е. маршруты, построенные для перестановок в интервале $[1, (n-2)(n-2)!]$, нетождественны, что и доказывает теорему 1.

***Следствие* 3.** Если множество всевозможных перестановок *W* упорядочено алгоритмом [11], то нетождественные маршруты в интервале $[1, (n-2)(n-2)!]$ размещены так. В интервале $[1, (n-2)!]$ количество нетождественных маршрутов равно $(n-2)!$, в интервале $[(n-2)!+1, 2(n-2)!]$ их количество равно $(n-2)! - (n-3)!$, в интервале $[(n-3)(n-2)!, (n-2)(n-2)!]$ – также равно $(n-2)! - (n-3)(n-3)!$.

Следовательно, множество H_u состоит из подмножеств, каждое из которых содержит тождественные маршруты. Назовем их *подмножествами тождественных маршрутов*. Из H_u выделим нетождественные маршруты и представим их множеством $\tilde{H}$. Количество нетождественных маршрутов в H_u равно $\frac{(n-1)!}{2}$. Упорядочим $u(w^k, l)|_1^n$ так, что $u_1(w^k, 1) < u_2(w^k, 2) < \ldots u_{n-1}(w^k, n-1) < u_n(w^k, n)$. Рассмотрим некоторые свойства множества $\tilde{H}$.

Теорема 2. Множество $\tilde{H}$ состоит из подмножеств $\tilde{H}_r$, $r = \overline{1, n-2}$, каждое из которых содержит маршруты $u(w^k, l)|_1^n$, $u(w^i, l)|_1^n$, наименьшие значения которых одинаковы, т.е. $u_1(w^k, 1) = u_1(w^i, 1)$ и $u_1(w^k, 1)$, $u_1(w^i, 1) \in \{1, ..., n-2\}$. Количество маршрутов в подмножестве $\tilde{H}_r$, где $u_1(w^k, 1) = 1$, равно $(n-2)!$. Если наименьшее значение $u_1(w^k, 1) = n-2$, то количество таких маршрутов в $\tilde{H}_r$ равно $(n-3)!$.

Доказательство. То, что наименьшие значения $u_1(w^k, 1) \in \{1, ..., n-2\}$, следует из структуры перестановки w^k. Зафиксируем в перестановке w^k элементы w_s^k, w_1^k. С другими w_t^k элемент w_1^k имеет $(n-2)$ комбинации, $s, t \in \{2, ..., n-1\}$ $s \neq t$. Любой маршрут для этих перестановок содержит два элемента из первой строки h наддиагоналей, $h = \overline{1, n-1}$, а $u_1(w^k, 1) \in \in \{1, ..., n-2\}$, что и доказывает первую часть теоремы 2.

Поскольку наименьшие значения в маршруте $u_1(\mathrm{w}^k, 1) \in \{1, ..., n-2\}$, то по этому признаку разделим $\tilde{H}$ на подмножества так, что $\tilde{H}_r \cap \tilde{H}_s = \varnothing$, $\tilde{H}_s, \tilde{H}_r \neq \varnothing$, $\bigcup_{r=1}^{n-2} \tilde{H}_r = \tilde{H}$, $s, r \in \{1, ..., n-2\}$, $s \neq r$. В $\tilde{H}_1$ входят маршруты, наименьшее значение элемента в каждом из которых $u_1(w^k, 1) = 1$, в $\tilde{H}_2$ входят маршруты, наименьшее значение элемента в каждом из которых $u_1(w^k, 1) = 2$, а $\tilde{H}_{n-2}$ – содержит подмножество маршрутов, наименьшее значение каждого из которых $u_1(w^k, 1) = n-2$.

По структуре перестановок несложно определить, что подмножество $\tilde{H}_r$ содержит $(n-2)!$ маршрута, наименьшее значение элементов в которых $u_1(w^k, 1) = 1$. Если элемент $u_1(w^k, 1) = 1$ в $u(w^k, l)|_1^n$, то он в сочетании с одним из элементов $\{2, ..., n-1\}$ встречается в $(n-3)!$ маршрутах. Тогда количество маршрутов, содержащих наименьшее значение элемента $u_1(w^k, 1) = 2$, равно $(n-2)! - (n-3)! = (n-1)(n-3)!$. Для $u_1(w^k, 1) = 3$ их количество равно $(n-2)! - 2(n-3)!$. Соответственно, если $u_1(w^k, 1) = n-2$, то количество таких маршрутов в $\tilde{H}_r$ равно $(n-2)! - (n-1)(n-3)! = (n-2)! - - (n-2)! + (n-3)! = (n-3)!$, что и доказывает теорему 2.

Элементы строк h наддиагоналей матрицы C представим подмножествами S_t, $t \in \{1, ..., n-1\}$. В первое подмножество S_1 внесем первые $n-1$ элементы первой строки матрицы C. В множество S_2 внесем следующие $n-2$ элементы, принадлежащие второй строке матрицы C и т.д. Подмножество S_{n-1} состоит из одного, $\frac{n(n-1)}{2}$-го элемента.

Теорема 3. Образование маршрутов $u(w^k, l)|_1^n \in H_u$ выполняется выбиранием из S_t, $t \in \{1, ..., n-1\}$ по одному элементу, по два или не выбирается ни один элемент.

Доказательство. Любое подмножество S_t содержит значения, определяющие расстояния между вершинами a_s и a_r, $a_s, a_r \in A$ (соответственно между элементами w_t^k перестановки w^k). Согласно с определением маршрута, w_t^k перестановки w^k имеет связь лишь с двумя соседними элементами w_{t-1}^k и w_{t+1}^k. Поэтому в образовании маршрута $u(w^k, l)|_1^n \in H_u$ может участвовать не больше двух элементов из любого подмножества S_t. С другой стороны, подмножества S_t, содержат не все значения, определяющие расстояния между w_s^k-м и w_t^k-м элементами. Для этих случаев в образовании некоторых маршрутов $u(w^k, l)|_1^n$ выбирается из S_t только один элемент. Если образование маршрута проводится выбиранием по два элемента из двух и более подмножеств из $S_1, ..., S_\zeta$, $\zeta = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, то из любой $S_{\zeta+1}, ..., S_{n-1}$ не выбирается ни один элемент, что и доказывает теорему 3.

***Следствие* 4.** Подмножество $\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}$ содержит маршруты, образованные из элементов матрицы C, взятых по одному из каждого подмножества S_t, $t \in \{1, ..., n-1\}$, исключая первое.

***Следствие* 5.** Подмножество $\tilde{H}_{n-2} \subset \tilde{H}$ содержит маршруты, образованные из элементов матрицы C, взятых по два из первых ς подмножеств S_t, $t \in \{1, ..., \zeta\}$, причем, если n – четное, то из подмножества S_ς берется лишь один элемент.

Соответственно, множество перестановок W разделяется на $n-2$ подмножества. Обозначим их K_r. Если $u(w^k, l)|_1^n \in H_r$, то $w^k \in K_r$.

Разделение множества маршрутов, соответственно и перестановок, на подмножества с учетом независимых от входных данных параметров позволяет при поиске оптимального маршрута определять подмножество, которое содержит глобальное решение. К тому же такая структуризация множества комбинаторных конфигураций позволяет определять распределение в ней тождественных маршрутов. Для некоторых упорядочений комбинаторных множеств они распределены симметрично.

Распределение тождественных маршрутов для множества перестановок *W*

Упорядочим множество перестановок по определенным правилам (например, алгоритмом [11]). Для него построим множество маршрутов H_u. Выделим в нем подмножества тождественных маршрутов, которые перенумеруем от единицы до $\frac{(n-1)!}{2}$. Для t-го тождественного маршрута вычислим интервал – количество маршрутов в множестве H_u, размещенных между одинаковыми маршрутами, включая первый и последний, $t \in \left\{1, ..., \frac{(n-1)!}{2}\right\}$. Из полученных числовых значений интервалов тождественных маршрутов построим конечную последовательность. Построенные последовательности характеризуются как точной симметрией, так и приближенной. Среди них выделим прямые, для которых существуют обратные конечные последовательности. Прямые и обратные последовательности симметричны относительно друг друга.

Т а б л и ц а 1. Распределение тождественных маршрутов во множестве H_u для $n = 4$

Номера перестановок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Номера маршрутов	1	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1

Приведем распределение маршрутов во множестве H_u, упорядоченные алгоритмом [11], для значений $n = 4$ и $n = 5$. Для $n = 4$ количество нетождественных маршрутов равно трем, т.е. перестановкам 1) 1, 2, 3, 4; 2) 2, 1, 3, 4; 3) 2, 3, 1, 4 соответствуют маршруты: 1) 1, 3, 4, 6; 2) 1, 2, 5, 6; 3) 2, 3, 4, 5. Последние строятся по матрице *C*. Элемент маршрута содержит номер адреса матрицы *C*, по которому находят расстояние между определенными городами. Множество маршрутов H_u состоит из трех подмножеств, каждое из которых содержит восемь тождественных маршрутов. В табл. 1. и на рис. 1 приведено распределение во множестве H_u тождественных маршрутов. Как видно из графика (рис. 1), их размещение в H_u характерно зеркальной симметрией.

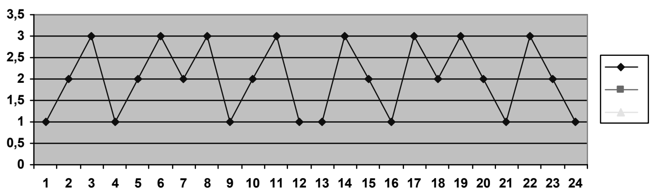

Рис. 1. Распределение первого, второго и третьего маршрутов во множестве H_u для $n = 4$

Для каждого из тождественных маршрутов вычислим интервал – количество маршрутов, размещенных между одинаковыми маршрутами, включая первый и последний. Результаты представим в табл. 2, 3 и рис. 2, 3. Первая строка табл. 2, 3 содержит номер интервала между тождественными маршрутами, а вторая – количество маршрутов в интервале для определенного маршрута.

Т а б л и ц а 2

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7
1	4	6	4	2	4	6	4
2	4	3	4	6	4	3	4

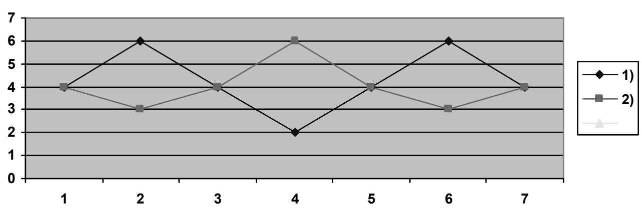

Рис. 2. Распределение первого и второго маршрутов во множестве H_u для $n = 4$

Т а б л и ц а 3

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7
3	4	3	4	4	4	3	4

Как видно из графиков (рис. 2 и 3), для $n = 4$ тождественные маршруты распределены во множестве H_u с интервалами симметрично относительно его середины.

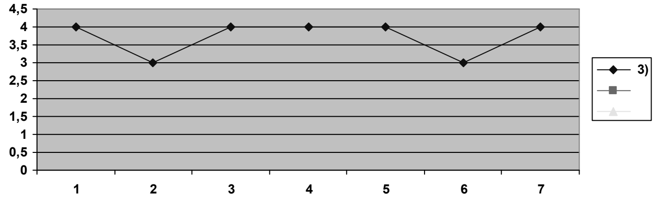

Рис. 3. Распределение третьего маршрута во множестве H_u для $n = 4$

Для $n = 5$ одинаковые маршруты распределены так. Значение интервалов между маршрутами подмножеств второго и четвертого, седьмого и 11-го, первого и пятого, восьмого и 10-го образуют числовые последовательности, которые относительно друг друга – прямые и обратные. Соответственно они размещены во множестве H_u зеркально симметрично. Маршруты подмножеств третьего и двенадцатого, шестого и девятого размещены с интервалами симметрично относительно середины множества H_u. Значения чисел в табл. 4 – 9 аналогичны, как и в табл. 2 и 3.

Т а б л и ц а 4

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	24	6	14	21	9	6	9	21	14
5	14	21	9	6	9	21	14	6	24

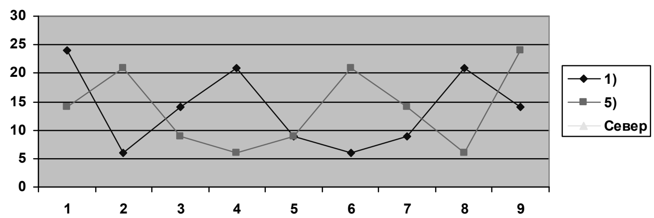

Рис. 4. Распределение первого и пятого маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Т а б л и ц а 5

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	9	30	9	6	10	20	10	20	10
4	10	20	10	20	10	6	9	30	9

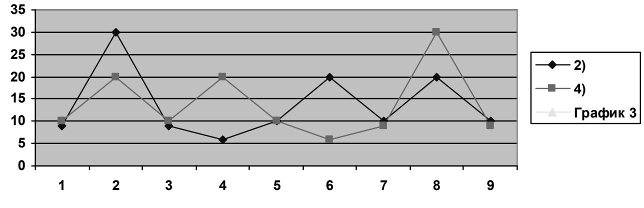

Рис. 5. Распределение второго и четвертого маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Таблица 6

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	9	21	14	6	24	6	14	21	9
12	9	6	10	20	10	20	10	6	9

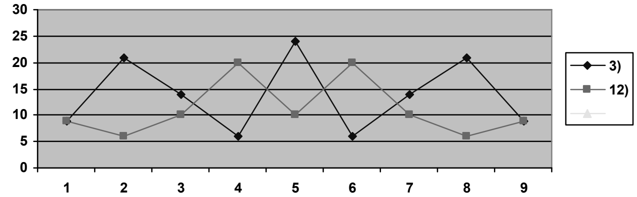

Рис. 6. Распределение третьего и 12-го маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Таблица 7

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	14	12	14	12	14	12	14	12	14
9	8	18	8	18	8	18	8	18	8

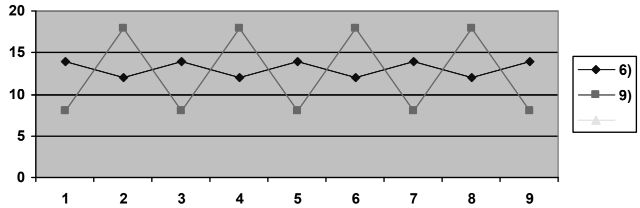

Рис. 7. Распределение шестого и девятого маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Таблица 8

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	14	6	24	6	14	21	9	6	9
11	9	6	9	21	14	6	24	6	14

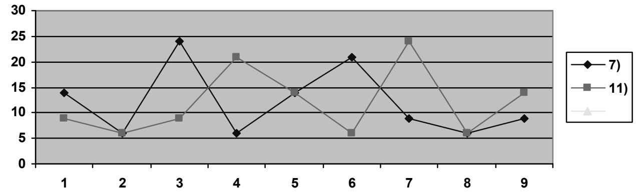

Рис. 8. Распределение седьмого и 11-го маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Таблица 9

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	10	20	10	6	9	30	9	6	10
10	10	6	9	30	9	6	10	20	10

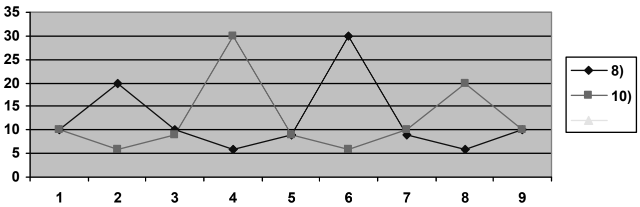

Рис. 9. Распределение восьмого и 10-го маршрутов во множестве H_u для $n = 5$

Заключение. Комбинаторные множества характеризуются как точной, так и приближенной симметрией. Множество перестановок упорядочивается многими способами и может быть как структурированным, так и не структурированным, среди которых существуют такие структурированные, в которых тождественные маршруты распределены симметрично. Результаты можно использовать при решении задач комбинаторной оптимизации разных классов для анализа изменения значений целевой функции в зависимости от структуры входных данных с учетом симметрии комбинаторных конфигураций и при изучении разных природных явлений, которым свойственна симметрия и которые имеют комбинаторную природу [12] .

UDC УДК 519.816

N.K. Tymofijeva

About Symmetry of the Combinatorial Sets

Keywords: symmetry of combinatorial sets, traveling salesman problem, combinatorial configuration, combinatorial optimization, objective function.

Symmetry is typical for the various structures (animate and inanimate nature). In combinatorics we can also find symmetry, as the exactness is so approximate, in particular it is common for the combinatorial sets.. Its mathematical formulation is conducted with the use of the finite sequence of numbers which are characterized by the approximate or exact symmetry and are built according to the certain rules. The plane, which passes through the greatest number of sequences, divides it into two parts, the value of which decreases uniformly from the center but not approximate symmetry in the combinatorics mean a finite sequence of numbers, whose values increased to necessarily those of the mirror symmetric. With strict symmetry of the imaginary plane divides the sequence of numbers or the largest number or passes between the two larges. Two parted parts is mirror symmetric.

In the article the symmetry of the combinatorial set of configurations is ordered by the certain rules. We don’t focus on the release of symmetric groups and the identification number of their species. We has studied some properties of the symmetric sets.

For combinatorial sets of different types of combinatorial configurations the finite sequence is built, which is defined as the approximate and exact symmetry. For combination without repetition for different values n of these sequences the arithmetical triangle is formed and it is characterized by exact symmetry. For integer partitioning or partitioning n-element set into subsets the finite sequence is created, it is characterized by the approximate symmetry. For the traveling salesman problem the number of identical and different routes are defined. It is shown that in their set they are distributed symmetrically.

The results can be used in solving the combinatorial optimization problems of different classes to analyze changes in the values of the objective function depending on the structure of input data sets based on the combinatorial symmetry configurations and the study of various natural phenomena, which have symmetry and the combinatorial nature.

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza, M.: Nauka, 1981, 543 p (In Russian).
2. Frid Je. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuju algebru [per. s vengerskogo], M.: Mir, 1979, 230 p (In Russian).
3. Kozin I.V. Principy simmetrii v teorii prinjatija reshenij, Zaporozh'e, Poligraf, 2008, 164 p.
4. Petuhov S.V. Geometrii zhivoj prirody i algoritmy samoorganizacii, M.: Znanie, Serija Matematika, Kibernetika, 1988, N 6, 48 p (In Russian).
5. Navarro Hoakin. Zazerkal'e. Simmetrija v matematike, Mir matematiki, Tom 17, Moskva, 2014, 159 p (In Russian).
6. Timofijeva N.K. Teoretiko-chislovi metodi rozv'yazannya zadach kombinatornoyi optimizatsiyi. Avtoref. dis... dokt. tehn. nauk. In-t kibernetiki im. V.M. Glushkova NAN Ukrayini, Kiyiv, 2007, 32 p (In Ukrainian).
7. Timofijeva N.K. Rekurentno-periodichniy metod dlya generuvannya kombinatornih konfiguratsiy. Kombinatorni konfiguratsiyi ta yih zastosuvannya: Materiali desyatogo Mizhvuzivskogo naukovo-praktichnogo seminaru (15-16 zhovtnya 2010), Kirovograd: Kirovogr. tehn. un-t, 2010, P. 138–141 (In Ukrainian).
8. Timofejeva N.K. Ob osobennostjah formirovanija i uporjadochenija vyborok, Kibernetika i sistem. analiz, 2004, N 3, P. 174–182 (In Russian).
9. Timofejeva N.K. O nekotoryh svojstvah razbienij mnozhestva na podmnozhestva. Upr. sist. mas., 2002, N 5, P. 6–23 (In Russian).
10. Timofejeva N.K. O gamil'tonovom cikle i zadache kommivojazhera, Kiev, 1990, 29 p. Dep.v VINITI 14.11.90, № 5742-V90 (In Russian).
11. Timofejeva N.K. Uporjadochenie mnozhestva znachenij argumenta celevoj funkcii v kombinatornoj optimizacii, Kibernetika i sistem. analiz, 1998, N 6, P. 78–88 (In Russian).
12. Timofijeva N.K. Pro simetriї kombinatornih mnozhin ta biologichnih form. System Analysis and Information Technologies, 16-th International Conference SAIT’2014, Kyiv, Ukraine, May 26-30, 2014. Proceedings of Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine, Kyiv Politechn. Inst., Kyiv, Ukraine, 2014, P. 160–161 (In Ukrainian).

●