DOI: https://doi.org/10.15407/usim.2018.05.003
УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА, д-р техн. наук, ст. наук. співробітник, гол. наук. співробітник,
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН та МОН України, пр. Академіка Глушкова, 40, Київ 03187, Україна,
tymnad@gmail.com

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Для задачі комівояжера описано спосіб упорядкування маршрутів (відповідно і перестановок) підмножинами, який не залежить від структури вхідних даних певної задачі. Для одержаного упорядкування розроблено стратегію визначення тих підмножин, які містять глобальний розв'язок. Показано, що для подібних структур глобальні мінімум та максимум знаходяться в одних і тих же підмножинах. Використання цієї властивості дозволяє звужувати область пошуку оптимального розв'язку.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, комбінаторна конфігурація, цільова функція, задача комівояжера, упорядкування комбінаторних конфігурацій підмножинами.*

Вступ

Існує багато літературних джерел, присвячених дослідженню та розв'язанню задачі комівояжера, наприклад [1—9]. Формулюється така задача досить просто, але пошук її оптимального розв'язку (мінімального за довжиною маршруту) належить до складних задач. Вона має не лише практичне значення. Її досліджують як модель для розробки нових алгоритмів дискретної (комбінаторної) оптимізації. Для її розв'язання використовуються різні методи і породжені ними алгоритми, як точні, так і наближені. Це — методи повного перебору, метод гілок і меж, динамічне програмування, евристичні алгоритми, зокрема такі, які породжуються методами Монте—Карло, «найближчого сусіда», "жадібний алгоритм", генетичні алгоритми, симуляції відпалу, мурашиної колонії, штучні нейронні мережі тощо [9—13].

Відомі методи і алгоритми пошуку оптимального розв'язку в задачах комбінаторної оптимізації шляхом відтинання неефективних розв'язків полягають в установленні залежності значення цільової функції від вхідних даних, які мають випадковий характер. Як показує аналіз їхньої роботи, існує одна і та ж проблема: розроблення стратегії розбиття множини значень цільової функції на підмножини з наступним виключенням тих підмножин, які не містять оптимального розв'язку Незважаючи на те, що таке розбиття для різних індивідуальних задач різне і не ґрунтується на строгих законах, постає запитання: з якою властивістю пов'язане таке розбиття.

Як показано у [14], в задачах комбінаторної оптимізації закономірність зміни значень цільової функції залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій. Враховуючи цю властивість, поставимо задачу відтинання неефективних варіантів інакше: проведемо розбиття на підмножини не множини значень цільової функції, а множину комбінаторних конфігурацій (аргументу), використовуючи незалежні від вхідних даних параметри. В задачі комівояжера цей порядок можна встановити для підмножин, з яких складається множина маршрутів (відповідно і перестановок). Для певних вхідних даних ця множина упорядковується підмножинами так, що для одержаного порядку можна встановити деяку закономірність зміни значень функції цілі. Опишемо спосіб упорядкування комбінаторних конфігурацій підмножинами, який не залежить від структури вхідних даних певної задачі. Для одержаного упорядкування виробимо правило (або алгоритм) визначення закономірності зміни значень цільової функції, що ґрунтується на розпізнаванні структури вхідних даних. Цей підхід орієнтований на широкий клас задач.

Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації

Така задача, як правило, задається на одній або кількох множинах, наприклад $A=\{a_1,..., a_n\}$ та $B=\{b_1,..., b_{\tilde{n}}\}$, елементи яких мають будь-яку природу [14]. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В першому типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt}\in R$, яке називають *вагою* ребра (R — множина дійсних чисел); $l\in\{1,..., n\}$ $t\in\{1,..., \tilde{n}\}$, n— кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ — кількість елементів множини B. Покладемо, що $n=\tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких названо *вагами*. Величини c_{lt} є *вхідними* даними і задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j\in R$, $j\in\{1,..., n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох базових множин, наприклад $a_l\in A$, $l\in\{1,..., n\}$, утворюється комбінаторна множина W — сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального (мінімального або максимального) значення при виконанні заданих обмежень.

Моделювання вхідних даних функціями натурального аргументу

Для задання цільової функції в явному вигляді та зведення її до одного виразу для різних класів задач комбінаторної оптимізації вхідні дані змоделюємо скінченними послідовностями. Для першого типу задач елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ подамо комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)\big|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), ..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C — функцією натурального аргументу $\varphi(j)\big|_1^m=(\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m=\dfrac{n(n-1)}{2}$ — кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h=\overline{1, n-1}$, k — порядковий номер w^k в упорядкованій множині W, $k\in\{1,...,q\}$, q — кількість w^k у W. Якщо матриці $Q(w^k)$ і C — несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)\big|_1^m$ та $\varphi(j)\big|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\,\tilde{n}$). Для множини перестановок та підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій цільову функцію запишемо в явному вигляді так:

$$F(w^k)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j). \qquad (1)$$

Правила розбиття множини маршрутів у задачі комівояжера

Розглянемо задачу комівояжера, яка формулюється так. Задано n міст, відстань між якими відома. Координати входу та виходу кожного міста збігаються. Необхідно знайти найкоротший шлях, який проходить через усі міста один раз і повертається в початковий пункт. Нагадаємо, що гамільтоновим циклом називають шлях у зв'язному графі, який починається в заданій початковій вершині, проходить через усі вершини один раз і повертається в початкову. Маршрутом називається послідовність ребер графа, що з'єднують вершини гамільтонового циклу.

Далі доведено, що в залежності від різних комбінацій елементів комбінаторної матриці множина маршрутів у задачі комівояжера розділяється на підмножини. Із наведених теорем випливає, що маршрути, для яких цільова функція набуває або найбільшого, або найменшого значення можуть належати до різних таких підмножин. Використання цієї властивості дозволяє звужувати область пошуку оптимального розв'язку.

Для фіксованого аргументу послідовність величин добутку значень функції натурального аргументу та комбінаторної функцій є комбінаціями елементів заданої матриці. Якщо одна з них — бінарна послідовність, то з матриці вибираються не всі елементи. Цю послідовність назвемо *варіантом* розв'язку задачі. Для задачі комівояжера назвемо його маршрутом. За способом утворення множина варіантів розв'язку задачі розділяється на підмножини. У першій підмножині містяться послідовності, значення яких вибрані з матриці, починаючи з елемента за адресою "один", у другій підмножині — починаючи з адреси "два" і т.д. Кількість таких підмножин для різних класів задач — різна. Відповідно, упорядковується і множина комбінаторних конфігурацій. Утворені підмножини складаються з менших підмножин. Таке розбиття множини комбінаторних конфігурацій можна проводити по двох, трьох і більше значеннях цієї послідовності і не залежить від вхідних даних.

Визначимо правила утворення маршрутів з елементів комбінаторної матриці, якою задаються вхідні дані, та в залежності від них проведемо аналіз закономірності зміни значень цільової функції.

Послідовність елементів першої верхньої наддіагоналі матриці C і елемент останньої наддіагоналі утворюють гамільтонів цикл. Назвемо першу наддіагональ симетричної матриці *гамільтоновою* діагоналлю.

Опишемо правила, за якими множина перестановок у задачі комівояжера розбивається на підмножини. Для цього дослідимо, яким чином беруть участь в утворенні варіанту розв'язку задачі елементи h наддіагоналей матриці C, $h=\overline{1,n-1}$. Вважатимемо, що елементи гамільтонової діагоналі та елемент $(n-1)$ матриці C дорівнюють одиниці.

Покладемо, що $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, \ldots, m)$ а $\varphi(j) \in \{0,1\}$. Значення $\beta(f(j), w^k)$ комбінаторної функції збігаються зі значеннями натурального аргументу і нумерацією наддіагональних елементів матриці $Q(w^1)$. Помножимо функцію $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ на $\varphi(j)|_1^m$. Із утвореної послідовності виділимо ті значення, для яких $\varphi(j) \neq 0$, та зпишемо їх як $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), \ldots, u_n(w^k, n))$, де $u_1(w^k, l) = \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j)$, а $\varphi(j) \neq 0$. Назвемо $u(w^k, l)|_1^n$ маршрутом, а $H = (u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), \ldots, u_n(w^k, n)),\ w^k \in W,\ u_1(w^k, l) \neq 0$ $k=\overline{1, n!}$) — множиною всіляких маршрутів.

Два маршрути $u(w^k, l)|_1^n$ та $u(w^i, l)|_1^n$ назвемо *нетотожними*, якщо вони відрізняються хоча б одним елемантом, вибраним з різних адрес матриці $Q(w^1)$. При цьому порядок $u_l(w^k, l)$ в $u(w^k, l)|_1^n$ не враховується.

Означення 1. Інверсією комбінаторної конфігурації $w=(w_1, \ldots, w_\eta)$ назвемо $\tilde{w}=(\tilde{w}_\eta, \ldots, \tilde{w}_1)$, тобто $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$ симетричні одна відносно другої.

Лема 1. У множині H містяться маршрути $u(\tilde{w}^k, l)|_1^n \in H$, які є інверсією маршрута $u(w^k, l)|_1^n \in H$, тобто ці маршрути симетричні.

Доведення. Для перестановки $w^k=(w_1^k, \ldots, w_n^k)$ з елементів матриці $Q(w^k)$ побудуємо маршрут $u(w^k, l)|_1^n$. Для симетричної перестановки $\tilde{w}^i=(\tilde{w}_1^i, \ldots, \tilde{w}_n^i)$, яка є інверсією w^k, також побудуємо маршрут $u(\tilde{w}^i, l)|_1^n$. Оскільки порядок елементів у перестановках w^k та $\tilde{w}^i$ не порушений, то елементи в маршрутах $u(w^k, l)|_1^n$, $u(\tilde{w}^i, l)|_1^n$ збігаються, причому маршрут $u(\tilde{w}^i, l)|_1^n$ симетричний $u(w^k, l)|_1^n$, що і доводить лему 1.

Наслідок 1. Множина H складається з підмножин, кожна з яких містить тотожні маршрути. Назвемо їх підмножинами тотожних маршрутів.

Лема 2. Тотожні маршрути у будь-якій підмножині тотожних маршрутів множини H можна упорядкувати так, що наступний її маршрут утворюється з попереднього операцією циклу довжиною n.

Доведення. Розглянемо перестановку $w^k = (w_1^k, ..., w_n^k)$. Для неї за матрицею $Q(w^k)$ побудуємо маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n)$. Операцією циклу одержимо наступну перестановку $w^{k+1} = (w_n^{\,k}, w_1^{\,k}, ..., w_{n-1}^k)$. Для w^{k+1} утворимо маршрут $u(w^{k+1}, l)|_1^n$. Оскільки порядок елементів у перестановці w^{k+1} не порушується порівняно з w^k то $u_1(w^{k+1}, 1) = u_n(w^k, n)$, $u_2(w^{k+1}, 2) = u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^{k+1}, n) = u_{n-1}(w^k, n-1)$, що і доводить лему 2.

Наслідок 2. Кількість тотожних маршрутів у будь-якій підмножині тотожних маршрутів множини H дорівнює $2n$.

Лема 3. Кількість нетотожних маршрутів у множині H дорівнює $\frac{(n-1)!}{2}$ [5, 9, 15].

Доведення. Кількість усіх маршрутів у множині H дорівнює $n!$. Множина H складається з підмножин, кожна з яких, згідно з наслідком 2, містить $2n$ тотожних маршрутів. Тоді $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$, що і доводить лему 3.

Із H виділимо нетотожні маршрути і подамо їх множиною H_u. Упорядкуємо значення множни $u(w^k, l)|_1^n$ так, що $u_1(w^k, 1) < u_2(w^k, 2) < ... ... < u_{n-1}(w^k, n-1) < u_n(w^k, n)$.

Розділимо множину H_u на підмножини так, щоб варіанти $u(w^k, l)|_1^n$ і $u(w^i, l)|_1^n$, які містяться в одній і тій же підмножині, містили елемент, вибраний з одних і тих же адрес першого рядка матриці $Q(w^1)$, яка задає вхідні дані. Нескладно помітити, що кількість таких підмножин дорівнює $n-2$. Відповідно множина перестановок також розділяється на n підмножин, які позначимо $K_1, K_2, ..., K_n \subset W$. Індекс 1 у K_1 означає, що для $w^k \in K_1$, $k = \overline{1,(n-1)!}$, усі маршрути $u(w^k, l)|_1^n$ містять елемент першого рядка матриці $Q(w^1)$ з адресою 1, індекс 2 у K_2 — з адресою 2 і т.д.

Деякі властивості множини H_u

Розглянемо деякі властивості множини маршрутів H_u. Маршрут $u(w^k, l)|_1^{\,n}$ є функцією перестановки, тому множина H_u упорядковується за правилами утворення комбінаторної матриці транспозиції *$Q(w^k)$*. Подамо множину H_u у вигляді таблиці, рядками якої є маршрути $u(w^k, l)|_1^{\,n} = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$. Позначимо її $\tilde{H}_u$. Стовпцем таблиці $\tilde{H}_u$ назвемо упорядковану множину Δ_t, що складається з елементів, кожен з яких є значеням t-ї позиції k-го маршруту (рядка), $t \in \{1, ..., n\}$.

Теорема 1. Будь-який стовпець Δ_t таблиці $\tilde{H}_u$ містить m різних елементів, вибраних із матриці $Q(w^1)$, причому кожен із символів m повторюється в Δ_t $2(n-2)!$ разів.

Доведення. Суміжні елементи в перестановках (гамільтонових циклів) $w^k = (w_1^{\,k}, ..., a_s, a_r, ..., ..., w_n^{\,k})$ або $w^i = (w_1^{\,i}, ..., a_r, a_s, ..., w_n^{\,i})$ мають між собою зв'язок, а маршрути $u(w^k, l)|_1^n$, $u(w^i, l)|_1^n$ містять значення $u_t(w^k, t)$, яке визначає відстань між a_s, a_r. У перестановці w^k зафіксуємо a_s, a_r. Відповідно значення $u_t(w^k, t)$, що визначає відстань між a_s, a_r, зафіксоване у позиції t маршруту $u(w^k, l)|_1^n$. Проведемо повний перебір інших $(n-2)$ елементів w^k. Кількість таких перестановок дорівнює $(n-2)!$, а значення $u_t(w^k, t)$ у таблиці $\tilde{H}_u$ в позиції t з'являється $(n-2)!$ раз. Аналогічні операції проведемо з $w^i = (w_1^{\,i}, ..., a_r, a_s, ..., w_n^{\,i})$. У відповідній підмножині маршрутів кількістю $(n-2)!$ значення $u_t(w^k, t)$ посідає позицію t також $(n-2)!$ рази.

Зафіксувавши послідовно пари w_j^k, w_{j+1}^k в усіх позиціях перестановки w^k та виконавши для них описані операції побудови маршрутів, одержимо в кожному стовпці Δ_t таблиці $\tilde{H}_u$ m різних значень $u_t(w^k, t)$, причому кожне з них повторюється в ньому $2(n-2)!$ разів, що і доводить теорему 1.

Теорема 2. У множині H_u маршрути, що відповідають перестановкам w^k, у яких проведено повний перебір $(n-2)$ елементів при двох фіксованих w_j^k, w_{j+1}^k, нетотожні. Кількість таких маршрутів дорівнює $(n-2)!$.

Доведення. У перестановці w^k зафіксуємо два сусідні елементи w_{n-1}^k, $w_n^{\,k}$. Для інших проведемо їх повний перебір. Одержимо підмножину перестановок, кількість w в якій $(n-2)!$. Підмножину маршрутів, побудовану для кожної перестановки з $L_{(n-2)!} \subset W$ позначимо $L'_{(n-2)!} \subset H_u$. Перестановки, що є аргументом тотожних маршрутів, утворюються операцією циклу довжиною n. Оскільки два сусідні елементи в усіх перестановках підмножини $L_{(n-2)!}$ перебувають в одних і тих же позиціях, то в $L'_{(n-2)!}$ не знайдеться маршруту інверсного будь-якому іншому маршруту, або таких $u(w^k, l)|_1^n$, для яких w^k утворена з другої w^i операцією циклу довжиною n.

Отже, підмножина $L'_{(n-2)!}$ не містить однакових маршрутів, що і доводить першу частину теореми 2.

Доведемо, що таких маршрутів не більше, ніж $(n-2)!$. Дійсно, будь-яка перестановка $w^{(n-2)!+1}$, у якої два сусідні елементи $w_{n-1}^{(n-2)!+1}$, $w_n^{(n-2)!+1}$ позиції не змінили, повторить одну з перестановок підмножини $L_{(n-2)!}$. Тим самим маршрут, що відповідає перестановці $w^{(n-2)!+1}$, повторить один із попередніх. Отже, кількість різних маршрутів у множині H_u, що відповідають перестановкам w^k, у яких два сусідні елементи w_j^k, w_{j+1}^k фіксовані, дорівнює $(n-2)!$, що і доводить теорему 2.

Упорядкуємо елементи в рядках таблиці $\tilde{H}_u$ так, що $u_t(w^k, t) < u_{t+1}(w^k, t+1)$.

Теорема 3. Будь-яке значення $\beta_j(f(j), w^1)$ зустрічається в таблиці $\tilde{H}_u$ $(n-2)!$ разів.

Доведення. Згідно з лемою 3 таблиця $\tilde{H}_u$ містить $\frac{(n-1)!}{2}$ маршрутів, кожен з яких містить n символів. Всього в $\tilde{H}_u$ міститься $n\frac{(n-1)!}{2} = \frac{n!}{2}$ елементів, причому кількість різних символів дорівнює $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Тоді будь-яке значення $\beta_j(f(j), w^1)$ у таблиці $\tilde{H}_u$ може зустрічатися $\frac{2n!}{2n(n-1)} = (n-2)!$ раз. До того, згідно з теоремою 2, будь-яке значення $\beta_j(f(j), w^1)$ не може зустрічатися більше, ніж $(n-2)!$ раз. Якщо їх у таблиці $\tilde{H}_u$ менше, то кількість маршрутів у $\tilde{H}_u$ менша, ніж $\frac{(n-1)!}{2}$, що суперечить лемі 3. З цього випливає, що будь-яке значення $\beta_j(f(j), w^1)$ зустрічається у таблиці $\tilde{H}_u$ $(n-2)!$ разів.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. В кожному рядку таблиці $\tilde{H}_u$ міститься лише один елемент матриці $Q(w^1)$ з номером адреси $\{1, \dots, n-1\}$. Кількість рядків, які містять значення $\beta_j(f(j), w^1) \in \{1, \dots, n-2\}$ і один з адресою $\{2, \dots, n-1\}$, дорівнює $(n-3)!$.

Доведення. Зафіксуємо в перестановці w^k три елементи такі, щоб у маршруті $u(w^k, l)|_1^n$ містилися $\beta_j(f(j), w^1) \in \{1, \dots, n-2\}$ і $\beta_j(f(j), w^1) \in \{2, \dots, n-1\}$. Запишемо перестановку $w^k = (w_1^k, \dots, b, a, c, \dots, w_n^k)$. Для інших $(n-3)$ елементів проведемо їх повний перебір. Всі одержані маршрути, згідно з теоремою 2, нетотожні, а їх кількість, що нескладно помітити, дорівнює $(n-3)!$, де $a = 1$, $c \in \{a+1, \dots, n\}$, $b \in \{c+1, \dots, n\}$.

Як видно з матриці $Q(w^k)$, в маршруті $u(w^k, l)|_1^n \in H$ значення $\beta_j(f(j), w^1) \in \{1, \dots, n-1\}$ зустрічаються тоді, коли $a = 1$, $c \in \{2, \dots, n\}$.

Проведемо аналіз перестановки $w^k = (w_1^k, \dots, b, a, c, \dots, w_n^k)$. Нехай $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Відповідний їй маршрут $u(w^k, l)|_1^n$ містить значення $\beta_j(f(j), w^k) = 1$ і $\beta_j(f(j), w^k) = 2$. Але, оскільки елемент $a = 1$ зафіксовано між b та c, то маршрут $u(w^k, l)|_1^n$ не містить значень $\beta_j(f(j), w^1) \in \{3, 4, \dots, n-1\}$, які визначають вагу між вершиною $a = 1$ та іншими $a_4, \dots, a_n$ вершинами, що і доводить теорему 4.

Позначимо Δ'_j підмножину різних елементів, які зустрічаються в j-му стовпці таблиці $\tilde{H}_u$. Нескладно відзначити, що елементи стовпців цієї таблиці набувають таких значень (елементи Δ'_j номера адреси матриці):

$$\Delta'_1 = \{1, 2, \dots, n-2\},$$
$$\Delta'_2 = \{2, 3, \dots, n-1\},$$
$$\Delta'_3 = \{n, n+1, \dots, 2, n-3\},$$
$$\dots$$
$$\Delta'_j = \left\{\gamma,\ \gamma+1, \dots, \gamma'\right\},$$

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{(j-1)\,n - 3\,j + 11}{2} & \text{для} \quad j \in Z_1,\ j > 5, \\ \dfrac{(j-2)\,n - 2\,j + 10}{2} & \text{для} \quad j \in Z,\ j \geq 4, \end{cases}$$

$\gamma' = (j-1)\,(n - \frac{j}{2})$ для $j \geq 2$, $Z = \{2, 4, \dots, 2\,j\}$

$Z_1 = \{1, 3, \dots, 2\,j-1\}$.

Теорема 5. Множина H_u складається з підмножин H_r, $r = \overline{1, n-2}$, кожна з яких містить маршрути $u(w^k, l)|_1^n$, $u(w^i, l)|_1^n$, найменші їхні значення, що відповідають адресам елементів наддіагоналей матриці $Q(w^1)$, однакові, тобто $u_1(w^k, l) = u_1(w^i, 1)$, де $u_1(w^k, l)$, $u_1(w^i, l) \in \{1, \dots, n-2\}$. Кількість маршрутів у підмножині H_r, кожен з яких містить найменше значення елемента $u_1(w^k, 1) = 1$, дорівнює $(n-2)!$. Якщо найменше значення елемента в $u(w^k, l)|_1^n$ $u_1(w^k, 1) = n-2$, то їх кількість в H_u дорівнює $(n-3)!$.

Доведення. У першому стовпці Δ'_j таблиці $\tilde{H}_u$ елементи набувають значень $\{1,...,n-2\}$. За цією ознакою розділимо $\tilde{H}_u$ на підмножини так, що $H_r \cap H_s = \varnothing$, $H_s, H_r = \varnothing$, $\bigcup_{r=1}^{n-2} H_r = \tilde{H}_u$, $s, r \in \{1,...,n-2\}$, $s \neq r$.

Те, що підмножина H_r містить $(n-2)!$ маршрутів, найменше значення елементів у яких $u_1(w^k,1)=1$, випливає з теорем 3 та 4. Згідно з теоремою 4, якщо елемент $u_1(w^k,1)=1$ в $u(w^k,l)|_1^n$, то він у сполученні з одним із елементів $\{2,...$ $...,n-1\}$ зустрічається в $(n-3)!$ маршрутах. Тоді кількість маршрутів, які містять найменше значення елемента $u_1(w^k,1)=2$, дорівнює $(n-2)!-$ $-(n-3)!=(n-1)(n-3)!$, для $u_1(w^k,1)=3$ їх кількість дорівнює $(n-2)!-2(n-3)!$.

Відповідно, якщо $u_1(w^k,1)=n-2$, то кількість таких маршрутів у H_r дорівнює $(n-2)!-$ $-(n-1)(n-3)! = (n-2)! - (n-2)! + (n-3)! =$ $=(n-3)!$, що і доводить теорему 5.

Позначимо H_1 підмножину маршрутів, найменше значення елемента у кожного з яких $u_1(w^k,1)=1$, а H_{n-2} — підмножину маршрутів, найменше значення елементів у кожного з яких $u_1(w^k,1)=n-2$.

Елементи наддіагональних рядків матриці $Q(w^1)$ подамо підмножинами S_t, $t\in\{1,...,n-1\}$. В першу підмножину S_1 занесемо перші $n-1$ елементи, що являють собою елементи першого рядка елементів h наддіагоналей матриці $Q(w^1)$, $h=\overline{1,n-1}$. У множину S_2 занесемо наступні n-2 елементи, які належать другому рядку матриці $Q(w^1)$ і т.д. Підмножина S_{n-1} складається з $\frac{n(n-1)}{2}$- го елемента.

Теорема 6. Утворення маршрутів $u(w^k,l)|_1^n \in$ $\in H_u$ проводиться вибиранням із підмножин S_t, $t\in\{1,...,n-1\}$, по одному, по два елементи, або не вибирається жоден.

Доведення. Будь-яка підмножина S_t містить елементи, які визначають вагу між вершинами a_s та a_r. Згідно з визначенням маршруту, елемент w_t^k перестановки w^k має зв'язок лише з двома сусідніми елементами w_{t-1}^k і w_{t+1}^k. Тому в утворенні маршруту $u(w^k,l)|_1^n \in H_u$ може брати участь не більше двох значень із будь-якої підмножини S_t. З іншого боку, підмножини S_t, крім S_1, містять не всі значення, що визначають вагу між w_s^k-м і w_t^k-м елементами. Для цих випадків в утворенні деяких маршрутів $u(w^k,l)|_1^n$ бере участь тільки одне значення з S_t. Якщо утворення маршруту проводиться вибиранням по два елементи з двох і більше підмножин з $S_1,...,S_\zeta$, $\zeta=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$, то з будь-якої із $S_{\zeta+1},...,S_{n-1}$ може не вибиратися жоден елемент.

Теорему 6 доведено.

Наслідок 3. Підмножина $H_1 \subset H_u$ містить маршрути, утворені сполученням елементів $Q(w^1)$, взятих по одному з кожної підмножини S_t, $t\in\{1,...,n-1\}$, виключаючи першу.

Наслідок 4. Підмножина $H_{n-2} \subset H_u$ містить маршрути, утворені сполученням n елементів, взятих по два з перших ζ підмножин S_t, $t\in\{1,...$ $...,\zeta\}$, причому, якщо n парне, то із S_ζ підмножини вибирається лише один елемент. Отже, в підмножині H_u містяться маршрути, куди входять елементи, вибрані з різних комірок матриці, тобто вони не перетинаються. Цю властивість задачі комівояжера можна використовувати для розроблення однакових алгоритмів для її розв'язання з подібною структурою вхідної інформації.

Приклади підкласів розв'язних задач з класу задачі комівояжера з різною структурою вхідної інформації

Виходячи з викладеного, на підкласах розв'язних задач можна побачити як в залежності від структури вхідних даних змінюється розміщення глобального розв'язку в підмножинах H_r.

Означення 2. Назвемо прямою та оберненою функції, симетричні відносно лінії, паралельній осі абсцис або осі ординат. Якщо ці функції змінюються як монотонні або лінійні, то паралельна лінія проходить через точку їхнього перетину.

Пряма та обернена функції мають однакові множини визначення та множини значень. Наприклад, для прямої функції натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m=(1,...,m)$ оберненою є $\varphi(j)|_1^m=$ $=(m,...,1)$. Тобто, ці функції симетричні одна відносно другої.

Сформулюємо такі теореми, доведення яких подано у [14].

Теорема 7. Якщо комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, то функція цілі набуває найбільшого значення для перестановки

$$w^{i^*} = (1, 2, 3, 4, ..., n), \tag{2}$$

для якої $u(w^{i^*}, l)|_1^n \in K_1$, а найменшого значення — для перестановки

$$w^{k^*} = \begin{cases} (1, n-1, 3, n-3, 5, n-5, 7, ..., 4, n-2, 2, n), \\ \quad \text{якщо } n \in Z_1, \\ (1, n-1, 3, n-3, 5, n-5, 7, ..., \frac{n+2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2, n-\frac{n}{2}), \\ \quad \text{якщо } n \in Z, \end{cases} \tag{3}$$

для якої $u(w^{k^*}, l)|_1^n \in K_{n-2}$.

Найбільше значення цільової функції дорівнює $F(w^{i^*}) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) + n - 1 = \frac{n(n^2-3n+5)}{3} + n - 1$, а найменше дорівнює $F(w^{k^*}) = \sum_{j=1}^{d} 2\left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) + \frac{(n-1)(3n-1)}{8} + 1 + \frac{(n-1)^2}{2}$, якщо $n \in Z_1$ і $F(w^{k^*}) = \sum_{j=1}^{d} 2\left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) + \frac{n(n-2)}{2}$, якщо $n \in Z$, $d = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Теорема 8. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m, ..., 1)$, то функція цілі набуває найбільшого значення для перестановки (3), для якої $u(w^{k^*}, l)|_1^n \in K_{n-2}$, а найменшого — для перестановки (2), для якої $u(w^{i^*}, l)|_1^n \in K_1$. Найбільше значення $F(w^{k^*})$ дорівнює $F(w^{k^*}) = \frac{n(n^2-1)}{6} + \frac{(n-2)^2+n}{2}$, а найменше дорівнює $F(w^{i^*}) = \sum_{j=1}^{d} 2\left(\frac{(n-j)(n-j+1)}{2} - (n-2j) \right) + \frac{(n-1)(n+1)}{8} + 1$, якщо $n \in Z_1$, і $F(w^{i^*}) = \sum_{j=1}^{d} 2\left(\frac{(n-j)(n-j+1)}{2} - (n-2j) \right)$, якщо $n \in Z$.

Теорема 9. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \left(1, 2, 3, ..., \frac{m+1}{2}, ..., 3, 2, 1\right)$ для $m \in Z_1$ і $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \left(1, 2, 3, ..., \frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}-1, ..., 3, 2, 1\right)$ для $m \in Z$, то $F(w^k)$ набуває найбільшого значення для w^k, для якої $u(w^k, l)|_1^n \in K_{n-2}$ а найменше значення — для w^i, для якої $u(w^i, l)|_1^n \in K_1$.

Теорема 10. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} - 1, ..., 2, 1, 2, ... \frac{m+1}{2} - 1, \frac{m+1}{2}\right)$ для $m \in Z_1$ і $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2} - 1, ..., 2, 1, 1, 2, ..., \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}\right)$ для $m \in Z$ то цільова функція набуває найбільшого значення для w^i, для якої $u(w^i, l)|_1^n \in K_1$, а найменшого — для перестановки w^k, для якої $u(w^k, l)|_1^n \in K_{n-2}$.

Теорема 11. (справедлива для $n > 6$). Якщо вхідні дані в задачі комівояжера задані функцією $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (c, b, c, b, ..., c_{m-1}, b_m)$ і $c < b$, то для найменшого значення $F(w^{k^*})$ перестановка $w^{k^*} \in K_s$, де $s \in Z_1$. Для найбільшого значення $F(w^{i^*})$ перестановка $w^{i^*} \in K_t$, де $t \in Z$.

Теорема 12. Якщо вхідні дані задаються функцією $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (c, b, c, b, ..., c'_{m-1}, b'_m)$ і $c > b$, то в задачі комівояжера для найбільшого значення $F(w^{k^*})$ перестановка $w^{i^*} \in K_t$, де $t \in Z_1$. Для найменшого значення $F(w^{i^*})$ перестановка $w^{k^*} \in K_s$, де $s \in Z$.

Наслідок 5. Якщо комбінаторна функція апроксимується монотонно неспадною або вгнутою функцією, то найбільшого значення цільова функція набуває для перестановки, маршрут якої належить K_1, а найменшого — для перестановки, маршрут якої належить K_{n-2}.

Висновок

В залежності від різних комбінацій елементів комбінаторної матриці множина маршрутів у задачі комівояжера розділяється на підмножини. Відповідно, на підмножини розділяється і множина перестановок.

З наведених теорем випливає, що маршрути, для яких цільова функція набуває найбільшого або найменшого значення можуть знаходитися у різних таких підмножинах.

Використання цієї властивості дозволяє звужувати область пошуку оптимального розв'язку.

Методами випадкового пошуку (метод Монте-Карло), такими евристичними алгоритмами як метод "найближчого сусіда" чи "жадібний алгоритм" пошук глобального розв'язку проводиться не по всіх розглянутих підмножинах, а лише в одній з них. Тому за їх використання можна знайти перестановку, для якої цільова функція набуває не найменшого, а найбільшого значення (або замість найбільшого значення отримуємо найменше). На такий результат впливають випадкові вхідні дані, які мають безладну структру. Отже, при розробці алгоритмів на основі методу "*найближчого міста*" (або "*жадібним алгоритмом*") необхідно проводити пошук оптимального розв'язку по всіх підмножинах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сигал И.Х.* Дискретные модели и методы решения задач типа коммивояжера большой размерности: исследование, комбинированные алгоритмы, вычислительный эксперимент, применения. Автореф. дис. ... докт. техн. наук / Вычислительный центр РАН. М., 1990. 33 с.
2. *Белов И.С.* Альтернированная задача коммивояжера. Доп. НАН України. 2004. № 8. с. 15-19.
3. *Сергеев С.И.* Вычислительные алгоритмы решения задачи коммивояжера. 1. Общая схема классификации. Автоматика и телемеханика. 1994. № 5. С. 66—79.
4. *Тимофеева Н.К.* О гамильтоновом цикле и задаче коммивояжера. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. К., 1990. 29с. Деп. в ВИНИТИ 14.11.90, № 5742—В90. Реф. в: Математика. 1991. № 5.
5. *Тимофеева Н.К.* Оптимизация функции цели в задаче коммивояжера. Ин-т кибернетики им.В.М. Глушкова НАН УССР. К., 1990. 35 с. 29.12.90, № 6499—В90. Реф. в: Математика. 1991. № 5.
6. *Kabadi Santosh N.* New polynomially solvable classes and a new henristic for the travelling salesman problem and its generalization. Discrete Appl. Math. 2002. 119, № 1—2. P. 149—167.
7. *Oda Yoshiaki.* An asymmetric analog of van der Veen conditions and the traveling salesman problem.II. Eur. J. Oper. Res. 2002. 138, № 1. C. 43-62.
8. *Jonsson Hakan.* The travelling salesman problem for lines in the plane. Inf. Process.Lett. 2002. 82, № 3. P. 137—142.
9. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т.1. 336 с.; Т. 2. 488 с.
10. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 510 с.
11. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 400 с.
12. *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 368 с.
13. *Сергиенко И .В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. 261 с.
14. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи. Рукопис. ІК ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, 2007. 374 с.
15. *Зыков А.А.* Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 381 с

Поступила 12.01.2018

REFERENCES

1. Sigal, I.Kh., 1990. Diskretnyye modeli i metody resheniya zadach tipa kommivoyazhera bol'shoy razmernosti: issledovaniye, kombinirovannyye algoritmy, vychislitel'nyy eksperiment, primeneniya. Avtoref. dis. ... dokt. tekhn. nauk. Vychislitel'nyy tsentr RAN. M., 33 p. (In Russian).
2. Belov, I.S., 2004. "Al'ternirovannaya zadacha kommivoyazhera". Dop. NAN Ukrainy, 8, p. 15-19. (In Russian).
3. Sergeyev, S.I., 1994. "Vychislitel'nyye algoritmy resheniya zadachi kommivoyazhera. 1. Obshchaya skhema klassifikatsii". Avtomatika i telemekhanika, 5, pp. 66—79. (In Russian).
4. Timofeyeva, N.K., 1990. "O gamil'tonovom tsikle i zadache kommivoyazhera". In-t kibernetiki im.V.M. Glushkova AN USSR. K., 29 p. [Dep. v VINITI 14.11.90, n 5742—V90. Ref. v: Matematika, 1991]. (In Russian).
5. Timofeyeva, N.K., 1990. "Optimizatsiya funktsii tseli v zadache kommivoyazhera". In-t kibernetiki im.V.M. Glushkova NAN USSR. K., 35 p. [Dep. v VINITI 12.90, n 6499—V90. Ref. v: Matematika. 1991. 5]. (In Russian).
6. Kabadi Santosh N, 2002. "New polynomially solvable classes and a new henristic for the travelling salesman problem and its generalization". Discrete Appl. Math.,119, 1—2, pp. 149—167.

7. Oda Yoshiaki, 2002. "An asymmetric analog of van der Veen conditions and the traveling salesman problem". II. Eur. J. Oper. Res., 138 (1), pp. 43-62.
8. Jonsson Hakan, 2002. "The travelling salesman problem for lines in the plane". Inf. Process. Lett., 82 (3), pp. 137—142.
9. Vagner, G., 1972. Osnovy issledovaniya operatsiy. Per. s angl. V 2 t. M.: Mir, T.1. 336 p.; T. 2. 488 p.
10. Papadimitriu, Kh., Stayglits, K., 1985. Kombinatornaya optimizatsiya. Algoritmy i slozhnost'. Per. s angl. M.: Mir, 510 p. (In Russian).
11. Bellman, R., 1960. Dinamicheskoye programmirovaniye. M.: Izd-vo inostrannoy literatury, 400 p. (In Russian).
12. Korbut, A.A., Finkel'shteyn, Yu.Yu., 1969. Diskretnoye programmirovaniye. M.: Nauka, 368 p. (In Russian).
13. Sergiyenko, I.V., Shilo, V.P., 2003. Zadachi diskretnoy optimizatsii. Problemy, metody resheniya, issledovaniya. K.: Nauk. dumka, 261 p. (In Russian).
14. Tymofiyeva, N.K., 2007. Teoretyko-chyslovi metody rozv'yazannya zadach kombinatornoyi optymizatsiyi. Dysertatsiya na zdobuttya naukovoho stupenya doktora tekhnichnykh nauk za spetsialnistyu 05.02 — matematychne modelyuvannya ta obchyslyuvalni metody. Rukopys. IK im. V.M. Hlushkova NAN Ukrayiny, Kyyiv, 374 p. (In Ukrainian).
15. Zykov, A.A., 1987. Osnovy teorii grafov. M.: Nauka, 381 p. (In Russian).

Received 12.01.2018

N.K. Tymofejeva, doctor of Technical Sciences, chief researcher,
International Research and Training Center for Information Technologies and Systems
of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine,
tymnad@gmail.com

ON SOME PROPERTIES OF THE SET OF SOLUTIONS OF THE SALESMAN PROBLEM

Introduction. For a salesman problem, a method for ordering the routes (respectively and permutations) by subsets is described, which does not depend on the structure of the input data of a particular problem. For the ordering results, a strategy for determining those subsets that contain a global solution is developed.

Formulation of the problem. Known methods for finding an optimal solution in combinatorial optimization problems are to develop a strategy for removing ineffective solutions and to establish the dependence of the objective function value on input data that are random. As the analysis shows, in the process of these approaches, the same problem arises, namely: the a strategy development for partitioning the set of values of the objective function into a subset, followed by the exclusion of those subsets that do not contain an optimal solution.

The proposed approach. A strategy for eliminating ineffective solutions is developed, which consists on not splitting the objective function values into a subset, but the set of routes for the salesman problem independently of the input data. It is shown that the various combinations of the matrix elements, which is the input data, the set of routes for the salesman problem is divided into the same subset for different individual problems with different structure of input data. Accordingly, a similar set of subsets arranges a set of permutations. The objective function acquires either the largest or the smallest values that can be in different subsets. They can contain the matrix elements, selected from its various cells, that do not intersect. A number of theorems are presented, which prove that the use of this property allows to narrow the search domain of the optimal solution. The subclasses of solvable problems show how the global result varies depending on the structure of the input data. The global minimum and maximum may belong to different subsets. It is proved that for similar structures the global minimum and maximum for the salesman problem are found in the same subsets.

Conclusion. Studying the changing regularity of the objective function values and inputs data, allows us to develop the strategies for finding the same subsets that contain a global solution for similar structures. In generated algorithms based on the method of "closest city" (or "greedy algorithm"), it is necessary to search for an optimal solution for all subsets, since these approaches can find the result far from optimal.

Keywords: combinatorial optimization, combinatorial configuration, objective function, salesman problem, ordering of combinatorial configurations by subsets.

Н.К. Тимофеева, д-р. техн. наук, ст. научн. сотруд, гл. научн. сотруд.,
Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем
НАН и МОН Украины, просп. Глушкова, 40, Киев 03187, Украина,
timnad@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Введение. Для задачи коммивояжера описывается способ упорядочения маршрутов (соответственно и перестановок) подмножествами, который не зависит от структуры входных данных определенной задачи. Для полученного упорядочения разработана стратегия определения тех подмножеств, которые содержат глобальное решение.

Постановка задачи. Известные методы нахождения оптимального решения в задачах комбинаторной оптимизации заключаются в разработке стратегии отсечения неэффективных решений и в установлении зависимости значения целевой функции от входных данных, которые носят случайный характер. Как показывает их анализ, в процессе работы этих подходов возникает одна и та же проблема, а именно: разработка стратегии разбиения множества значений целевой функции на подмножества с последующим исключением тех подмножеств, которые не содержат оптимального решения.

Предлагаемый подход. В данной статье разработана стратегия отсечения неэффективных решений, которая заключается в разбиении не множества значений целевой функции на подмножества, а в разбиении множества маршрутов задачи коммивояжера независимо от входной информации. Показано, что в зависимости от различных комбинаций элементов матрицы, которой задаются входные данные, множество маршрутов в задаче коммивояжера разделяется на одни и те же подмножества для различных индивидуальных задач с различной структурой входных данных. Соответственно, аналогичными подмножествами упорядочивается и множество перестановок. Маршруты, для которых целевая функция принимает наибольшее или наименьшее значение могут принадлежать разным таким подмножествам. Они могут содержать элементы матрицы, выбранные из разных ее ячеек, т.е. не пересекаться. Приведены теоремы, доказывающие, что использование этого свойства позволяет сужать область поиска оптимального решения. На подклассах разрешимых задач показано, как меняется поиск глобального результата в зависимости от структуры входной информации. В зависимости от входных данных глобальные минимум и максимум могут принадлежать разным подмножествам. Доказано, что для подобных структур глобальные минимум и максимум для задачи коммивояжера находятся в одних и тех же подмножествах.

Заключение. Изучение закономерности изменения значений целевой функции от различных структур входных данных позволяет разрабатывать стратегии поиска одних и тех же подмножеств, содержащих глобальное решение для подобных структур. При разработке алгоритмов на основе метода ближайшего города (или жадного алгоритма) необходимо проводить поиск оптимальных решений по всем подмножествам, поскольку таким путем можно найти результат, далекий от оптимального.

Ключевые слова: Комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация, целевая функция, задача коммивояжера, упорядочение комбинаторных конфигураций.