DOI https://doi.org/10.15407/usim.2019.03.003

УДК 519.816

Н.К. Тимофієва, д-р техн. наук, пров. науковий співробітник,
Міжнародний науко-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН та МОН України, просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03187, Україна,
tymnad@gmail.com

ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО ОЦІНКИ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

У комбінаторній оптимізації вхідні дані, за якими оцінюється результат розв'язку задачі, є випадковими величинами, які мають безладну структуру. Для оцінки результатів використовуються різні методи аналізу даних, а саме: кореляційні методи та такі, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, кореляційний підхід оцінки результату, розпізнавання структури вхідної інформації, комбінаторна конфігурація, цільова функція.*

Вступ

Для оцінки результату в комбінаторній оптимізації використовують підходи, які можна розділити на такі, що використовують кореляцію вхідних даних, які мають безладну структуру, з аргументом цільової функції, або проводять аналіз структури вхідної інформації. У *першому* способі цільову функцію моделюють в явному вигляді.

Другий спосіб використовують в евристичних алгоритмах, якщо цільова функція задається на формальному рівні. У цьому разі розв'язок (комбінаторна конфігурація) будується послідовно в процесі знаходження оптимального результату. Різні підходи до оцінки результату впливають на точність та швидкодію алгоритму.

Постановка задачі

В задачах комбінаторної оптимізації для оцінки результату розв'язку розпізнається структура вхідної інформації, яка являє собою випадкові величини з безладною структурою, або на її основі моделюється цільова функція. Тому для отримання адекватної оцінки важливо вибрати такі підходи аналізу даних, при яких можна отримати оптимальний результат у реальному часі.

У задачах розпізнавання при порівнянні еталону з вхідною інформацією використовують міру подібності. Точність результату залежить від адекватно вибраних мір.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

У наукових дослідженнях способи оцінки результату розв'язку задач комбінаторної оптимізації достатньою мірою не аналізуються. Оскільки вхідні дані в задачах цього класу — випадкові величини, які мають безладну структуру, то для оцінки використовують різні методи аналізу даних [1]. Це — розвідувальний, дисперсійний, регресійний, коваріаційний, дискримінантний, кореляційний, кластерний, факторний аналізи, які встановлюють залежність між випадковими величинами. У комбінаторній оптимізації використовують моделювання вхідних даних скінченними числовими послідовностями, а оцінка результату проводиться за виразом, в якому знаходиться сумарний добуток значень цих послідовностей, який встановлює залежність вхідної інформації від комбінаторної конфігурації (аргументу цільової функції). Цей підхід назвемо кореляційним. Але він не відображає їхньої функціональної зв'язаності. При розв’язанні задач класифікації або кластеризації для визначення функціональної зв’язаності між елементами множин вхідних даних та аргументу цільової функції використовують підходи, що ґрунтуються на розпізнаванні їхньої структури (кластерний та факторний аналіз, метод опорних векторів тощо). У процесі розв’язання цих задач послідовно будується комбінаторна конфігурація (аргумент цільової функції), яка може бути і глобальним розв’язком.

При розв’язанні задач розпізнавання використовують міри подібності, які встановлюють подібність між еталоном та вхідною інформацією [2, 3]. Їхні числові значення називають елементарними мірами подібності, які утворюють скінченну послідовність чисел, за якими моделюється вираз для обчислення інтегральної міри подібності (цільової функції). При моделюванні та розв’язанні багатьох задач комбінаторної оптимізації цільову функцію записують на формальному рівні, а оцінку результату проводять шляхом аналізу структури вхідних даних.

В ітераційних методах розроблено правила звуження кількості варіантів, які досліджуються на оптимальність. Комбінаторна конфігурація (аргумент цільової функції) знаходиться не з урахуванням структури вхідної інформації, а визначається на певній ітерації випадково або за певними правилами. Оцінка результату проводиться з використанням кореляційного підходу, який встановлює функціональну зв’язаність між елементами вхідних даних та аргументом цільової функції. Розроблені на основі цих методів алгоритми поліноміально визначають лише локальний розв’язок. При такому підході глобальний розв’язок знаходиться для задач невеликої розмірності, а для задач великої розмірності обчислюється експоненціально. Інколи знайти його неможливо навіть повним перебором через ситуації невизначеності.

Математична постановка загальної задачі комбінаторної оптимізації

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ та $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, елементи яких мають будь-яку природу [4]. Назвемо ці множини базовими. Є два типи задач. В задачах *першого* типу кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R — множина дійсних чисел); $l \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{1, \ldots, \tilde{n}\}$, n — кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ — кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв’язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{li} назвемо вхідними даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв’язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними.

Для обох типів задач з елементів однієї або кількох базових множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, утворюється комбінаторна множина W — сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Доволі часто задачі цього класу моделюються в рамках цілочислового лінійного програмування. Математична модель цього підходу формулюється так: знайти екстремум функції $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ за умов $\sum_{i=1}^{n} a_{il} x_i = b_l$, $l = \overline{1, m}$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, x_i — цілі для $i = \overline{1, p}$, $p \leq n$, де c_i, a_{il}, b_l — задані цілі числа, x_i — змінні. Вираз $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ називають лінійною функцією.

Виходячи з цієї моделі припускають, що цільова функція в комбінаторній оптимізації залежить від багатьох змінних [5], а x_i є елементами комбінаторної конфігурації $w = (w_1, ..., w_n)$, які перемножуються на задані числа c_i, a_i. Але це неможливо, оскільки w_i можуть мати будь-яку природу. Змінні x_i не є елементами w, а модель цілочислового лінійного програмування не відображає суті задач комбінаторної оптимізації. Цілочислове лінійне програмування розроблялося для економічних задач, для яких математична постановка формулюється так: задано одну множину A, елементи $a_i \in A$ якої не мають між собою звя'зків.

Натомість кожен елемент $a_i \in A$, $i \in \{1, ..., n\}$ характеризується певною властивістю (вагою) x_i. Зазвичай аргументом цільової функції є вибірки (сполучення, розміщення), а вхідні дані — послідовність значень ваг $x_1, ..., x_n$ елементів a_i заданої множини A, кількість яких збігається з кількістю елементів у w. Звідси випливає твердження, що аргументом цільової функції в цих задачах є послідовність вхідних даних $x_1, ..., x_n$, а не комбінаторна конфігурація $w = (w_1, ..., w_n)$. Відповідно вважають, що цільова функція в задачах комбінаторної оптимізації залежить від багатьох змінних. Послідовність $x_1, ..., x_n$ є вхідними даними певної задачі, а значення x_i неявно залежить від комбінаторної конфігурації w, тобто вираз $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ варто записати у такому вигляді: $F(w) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(w)$. Тоді постає проблема визначення цієї залежності в задачах комбінаторної оптимізації.

За способом обчислення цільової функції виділимо задачі, в яких для певного варіанту розв'язку її значення обчислюється одночасно. Такі задачі назвемо статичними. Задачі, в яких в процесі їхнього розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язку проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції, назвемо динамічними.

Для моделювання прикладних задач у рамках теорії комбінаторної оптимізації необхідно [4]:

- за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна);
- визначити базові множини, якими задається певна задача;
- за вхідними даними визначити її тип;
- визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію);
- змоделювати цільову функцію.

Уточнімо такі поняття як критерій та цільова функція.

Критерій — ознаки або властивості, які характеризують певний об'єкт або зв'язки між об'єктами та є вхідними даними.

Цільова функція — вираз, який формулюється на основі заданих критеріїв з урахуванням особливостей задачі, за яким обчислюється та оцінюється результат її розв'язку.

Як правило, цільову функцію ототожнюють з критеріями, а за її аргумент приймають вхідні дані. Але для одних і тих же критеріїв цільову функцію можна змоделювати по-різному, тобто оцінка проводиться за різними виразами та одержується різний результат. До того ж вона може залежати як від однієї змінної, так і від багатьох. За цією ознакою задачі комбінаторної оптимізації розділяються на підзадачі. У цьому разі для їхнього розв'язання розробляються гібридні алгоритми.

Моделювання вхідних даних функціями натурального аргументу

Для задання цільової функції в явному вигляді та зведення її до одного виразу для різних класів задач комбінаторної оптимізації вхідні дані змоделюємо скінченними послідовностями. Значення ваг між елементами множин A та B (вхідні дані) задамо однією або двома симетричними або несиметричними матрицями C та $Q(w^k)$, $Q(w^k)$ — комбінаторна матриця (матриця транспозиції, матриця розподілення), k — порядковий номер w^k в упорядкованій множині W, $k \in \{1,...,q\}$, q — кількість w^k у W [4]. Якщо значення ваг описуються однією матрицею C, то для визначення наявності зв'язків між елементами заданих множин для k-го варіанту розв'язку задачі введемо симетричну або несиметричну (0,1)-матрицю $Q(w^k)$. Елемент $g_{lt}(w^k) = 1$, якщо між $a_l \in A$ та $b \in B$ або $a_l \in A$ та $a_t \in A$ для варіанту w^k існує зв'язок, і $g_{lt}(w^k) = 0$ — в іншому разі; $g_{lt}(w^k) \in Q(w^k)$. Елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ подамо комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C — функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1),...,\varphi(m))$, де $\frac{n(n-1)}{2}$ — кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$ Якщо матриці $Q(w^k)$ і C — несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Для множини перестановок та підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій цільову функцію, за допомогою якої проводиться кореляція вхідних даних та її аргументу, запишемо так:

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k) \varphi(j). \quad (1)$$

Нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо кількість елементів у них однакова.

Наведемо приклади моделювання деяких задач комбінаторної оптимізації першого типу, в яких вхідні дані змодельовано функціями натурального аргументу.

Задача комівояжера. Задано n міст, відстань між якими відома. Координати входу і виходу кожного міста збігаються. Необхідно знайти найкоротший шлях, який проходить через усі міста один раз і повертається в початковий пункт.

Ця задача задається на одній множині, яку позначимо $A = \{a_1,...,a_n\}$, де елемент a_t відповідає t-му місту. Зв'язки між a_t, $a_l \in A$ задамо симетричною матрицею C (функція $\varphi(j)|_1^m$). Уведемо симетричну (0,1)-матрицю транспозиції $Q(w^k)$ (функція $\beta(f(j), w^k)|_1^m$), у якій елемент $g_{lt}(w^k) = 1$, якщо елементи a_t, a_l для варіанту розв'язку задачі w^k мають між собою зв'язки, і $g_{lt}(w^k) = 0$ — в іншому випадку, $g_{lt}(w^k) \in Q(w^k)$. Цільова функція в цій задачі задається виразом (1). Пошук оптимального розв'язку проводиться на множині перестановок.

Задача розміщення. На друкованій платі з регулярною сіткою, яка виконує роль посадочних місць, необхідно розмістити задану множину модулів, які мають між собою зв'язки у такий спосіб, щоб сумарна довжина зв'язків була мінімальною. Вона задається на двох множинах: $A = \{a_1,...,a_n\}$, елементи a_l якої відповідають модулям, які необхідно розмістити на заданій поверхні, та $B = \{b_1,...,b_{\tilde{n}}\}$, кожен елемент b_t якої визначає посадочне місце для розміщення $a_l \in A$, $n \leq \tilde{n}$. Припустимо, що $n = \tilde{n}$. Зв'язки існують між елементами a_t, $a_l \in A$, кількісне значення яких задамо симетричною матрицею C (відповідно функцією $\varphi(j)|_1^m$), та між елементами b_t, $b_l \in B$, значення яких опишемо комбінаторною симетричною матрицею транспозиції $Q(w^k)$ або функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m$. В результаті, значення цільової функції зводиться до виразу (1), а її аргумент — перестановка.

Класична задача про призначення. Задано n посад і n претендентів на ці посади. Призначення претендента l на t-ту посаду приводить до затрат c_{lt}, (l, t = 1, 2,..., n). Необхідно розподілити претендентів за посадами так, щоб сумарні втрати були мінімальними. При цьому кожного претендента можна призначити лише на одну посаду і кожна посада може бути зайнята лише одним претендентом. Ця задача задається на двох множинах: $A = \{a_1,...,a_n\}$, де $a_l \in A$ відповідає l-му претенденту, та $B = \{b_1,...,b_n\}$, де $b_t \in B$ відповідає t-й посаді. Між елементами $a_l \in A$ і $b_t \in B$ задано зв'язки. Задамо їх несиметричною матрицею C (функцією $\varphi(j)|_1^m$). Для визначення належності a_l-го претендента на b_t-ту посаду для w^k-го варіанту розв'язку задачі введімо несиметричну (0,1)-матрицю транспозиції $Q(w^k)$ (функція $\beta\,(\,f\,(\,j\,),\,w^k\,)|_1^m$). Звідки видно, що цільова функція зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Задача кластеризації. Ця задача виникає у розпізнаванні, класифікації та полягає в упорядкуванні заданих об'єктів у порівняно однорідні групи, тобто за розробленими правилами проводиться оптимальне розбиття базової множини A на підмножини.

Аргументом цільової функції в цій задачі є розбиття n-елементної базової множини A на η підмножин [4]. Назвемо множину підмножин w=(w_1,...,w_η) таку, що $w_1 \bigcup \ldots \bigcup \rho_\eta = A$, $w_r \bigcap w_{\tilde r} = \varnothing,\ r \neq \tilde r,\ w_r \neq \varnothing,\ r, \tilde r \in \{1,...,\eta\}$. Непуста підмножина $w_r = \{a_1\ ,...,\ a_{\xi_r}\}$, $a_l \in A$, $l \in \{1,..., n\}$ може мати від одного до n елементів ($\xi_r \in \{1,..., n\}$).

Як видно з постановки, ця задача задається на одній множині $A = \{a_1,...,a_n\}$. Зв'язки між елементами a_t, $a_l \in A$ (вхідні дані) подамо симетричною матрицею C (функція $\varphi\,(\,j\,)\,|_1^m$). Для задання розподілення елементів між підмножинами w^k розбиття $w^k \in W$ введімо симетричну комбінаторну (0,1)-матрицю розподілення $Q(w^k)$ (функція $\beta(\,f\,(\,j),\,w^k)|_1^m$). Пошук розбиття w^k у цій задачі, для якого функція цілі (1) набуває максимального значення, проводиться на всій множині розбиттів W.

Задача компоновки (частковий випадок задачі кластеризації, в якій кількість кластерів та елементів у них задана, а останні належать до різних типів). Змістовна її постановка така. Задано n базових елементів різних типів, між якими існують зв'язки. Необхідно ці елементи розподілити за модулями так, щоб кількість зв'язків між останніми була мінімальною, або кількість зв'язків між елементами, об'єднаними у модулі, була б найбільшою.

Ця задача задається однією множиною $A = \{a_1,...,a_n\}$, між елементами якої існують зв'язки, причому $a_l \in K^S$, $s \in \{1,...,P\}$, $l \in \{1,...,n\}$, K^s — s-й тип кластера $a_l \in A$, P — кількість типів. Ваги між a_t, $a_l \in A$, $l \neq t$ задамо симетричною матрицею C (функція $\varphi\,(\,j\,)\,|_1^m$). Для визначення розподілення елементів множини A за підмножинами ρ_t^k для k-го варіанту розв'язку задачі уведемо симетричну комбінаторну (0,1)-матрицю розподілення $Q(w^k)$ (функція $\beta\,(\,f\,(\,j\,),\,w^k)|_1^m$). Елемент цієї матриці $g_{lt}(w^k)$ = = 1, якщо a_l і a_t належать до однієї підмножини, і $g_{lt}(w^k)$ = 0 — в іншому випадку. Із цього випливає, що цільова функція в цій задачі зводиться до виразу (1).

У задачі компоновки пошук розбиття w^k, для якого функція (1) набуває екстремального значення, проводимо на підмножині W_{η^k} множини W, кожне розбиття w^k якого містить η^k підмножин, причому $\xi_r^k \le p_r$, де p_r — задана потужність підмножини w^k, а елементи $a_l \in w^k$, $l = \overline{1, \xi_r^k}$ належать до одного типу, тобто $a_l \in K^s$, ξ_r^k — кількість елементів у підмножині $w_r^k \in w^k$, яка визначається в процесі розв'язку задачі.

Наведемо приклад задачі, яка за способом задання вхідних даних належить до другого типу.

Задача про ранець. Ранець, який має ємність V необхідно так упакувати нероздільними предметами n видів з вартостями $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ та ємностями $E = \{e_1,\ldots,e_n\}$, щоб сумарна вартість упакованих предметів була максимальною, а їхня сумарна ємність не перевищувала величини V. Ця задача задається на одній множині $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Між елементами a_l цієї множини відсутні зв'язки, а вхідні дані задано елементами множин B та E, які характеризують властивості $a_l \in A$, тобто задача відноситься до другого типу. Аргументом цільової функції в ній є сполучення без повторень. Задамо послідовність множин B та E числовими функціями $\varphi\ \ (j)|_1^n = (\varphi\ (1)\ ,..., \varphi(n))$ та $\phi\,(\,j\,)\,|_1^n = (\,\phi\,(1)\ \ ,...,\,\phi\,(n))$.

Уведемо також комбінаторну функцію $\beta\,(\,f\,(\,j),\,w^k)|_1^n = (\,\beta_1\,(\,f\,(1),\,w^k\,)\ ,...,\ \beta_n(\,f\,(\,n),w^k\,))$, де $\beta_j\,(\,f\,(\,j),\,w^k\,) \in \{0,1\}$ і $\beta_j\,(\,f\,(\,j),\,w^k\,) = 1$, якщо з множини A вибирається елемент a_l, а $\beta_j\,(\,f\,(\,j),\,w^k\,) = 0$ в іншому разі. Цільова функція зводиться до виразу (1), тобто $F(\,w^k\,) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\ (\,f\,(\,j),\,w^k)\,\varphi\ (\,j\,)$.

Задача про ранець полягає у знаходженні такого сполучення без повторень $w^{k^*} \in W$, для якого цільова функція $F(w^{k^*}) = \max_{w^k \in W} F(w^k)$ за умови, що $\sum_{j=1}^{n} \beta_j (f(j), w^{k^*}) \, \phi(j) \le V$, $k, k^* \in \{1, ..., 2^n - 1\}$.

Оцінка результату розв'язку задач комбінаторної оптимізації розпізнаванням вхідної інформації

Як правило, в евристичних алгоритмах оцінка результату проводиться шляхом розпізнавання вхідної інформації. Наприклад, в *жадібному* алгоритмі та методі найближчого сусіда при побудові комбінаторної конфігурації вибирається найбільший (або найменший) елемент з вхідної інформації. У цих методах результат встановлюється за структурою вхідної інформації. Для одних структур ними можна отримати глобальний мінімум замість глобального максимуму, для інших — замість глобального мінімуму отримуємо глобальний максимум [6].

Розглянемо як оцінюється результат аналізом вхідної інформації в розпізнаванні мовлення, зокрема при сегментації мовленнєвого сигналу. Останній передає мовлення людини, в якому спостерігаються ділянки майже періодичні, які моделюють голосні та приголосні звуки, і неперіодичні (шумні звуки). Майже періодичні ділянки сигналу розділяються на майже періоди. Конфігурації майже періодів одного і того ж звуку подібні, а різних звуків — різні. Їхні довжини для різних звуків та під наголосом одного і того ж диктора можуть відрізнятися.

Задача автоматичної сегментації мовленнєвого сигналу полягає у виділенні на заданому його відрізку майже періодичних та неперіодичних ділянок, а в майже періодичних ділянках визначаються довжини поточного майже періоду [2]. Оскільки вона відноситься до задачі розпізнавання, то для свого розв'язання вимагає уведення міри подібності.

Для сегментації мовленнєвого сигналу розроблено багато методів та алгоритмів, що ґрунтуються на кореляційних підходах з використанням динамічного програмування, наприклад [2]. Але в багатьох підходах вона розв'язується і шляхом розпізнавання конфігурації вхідного сигналу. Проведемо сегментацію мовленнєвого сигналу на майже періодичні та неперіодичні ділянки, в якому розпізнається його конфігурація. Для формулювання математичної постановки цієї задачі використаємо теорію комбінаторної оптимізації.

Задамо відрізок мовленнєвого сигналу числовою функцією $f(j)|_1^m$, m — кількість її значень. Розіб'ємо його на ділянки довжиною $L \in \{L_{\min}, L_{\min} + \Delta, L_{\min} + 2\Delta, ..., L_{\max}\}$, де $L_{\min}$ — мінімально можлива довжина майже періоду, $L_{\max}$ — максимально можлива довжина майже періоду, Δ — значення приросту майже періоду (визначається експериментально). При сегментації мовленнєвого сигналу методом розпізнавання його конфігурації визначаються мінімальна та максимальна величини заданої функції $f(j)|_1^m$ та враховуються між ними відстані. Оцінка та вибір оптимального варіанту розв'язку задачі з усіх можливих проводиться за інтегральною мірою подібності, що враховує кілька критеріїв.

Якщо порівняти метод, що ґрунтується на розпізнаванні конфігурації сигналу, та ітераційний метод з кореляційною оцінкою результату розв'язку, то останній розпізнає лише майже періодичні ділянки сигналу, а його швидкодія — експоненціальна. Оскільки в цьому алгоритмі не розпізнається конфігурація сигналу, то для двох сусідніх ділянок для відліку X вибирається оптимальне значення з обчислених в цій точці значень часткової цільової функції незалежно від подібності ділянок, тобто будь-який сигнал він розпізнає як майже періодичний. Отже, для сегментації мовленнєвого сигналу на майже періодичні та неперіодичні ділянки, а в останніх виділяти майже періоди, необхідно розпізнавати конфігурацію цього сигналу, або вводити інші обмеження на значення цільової функції. У алгоритмі, що ґрунтується на розпізнаванні структури вхідної інформації, розпізнаються максимальні та мінімальні значення функції $f(j)|_1^m$ та накладаються обмеження на відстань між ними, яка може відповідати довжині майже періоду. Тому такі алгоритми коректно розв’язують поставлену задачу. Оскільки в процесі його роботи необхідно обчислювати набагато менше параметрів, то за його допомогою поставлена проблема для великих розмірностей вирішується в реальному часі.

Комбіновані методи, для оцінки результату яких використано кореляційний підхід та розпізнавання структури вхідної інформації

Деякі методи вимагають розпізнавання структури вхідної інформації, в процесі якого будується комбінаторна конфігурація, а результат оцінюється за цільовою функцією (1). Розглянемо метод структурно-алфавітного пошуку [4, 7]. Він характеризується величезною швидкодією та на множині перестановок (підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій) дозволяє поліноміально знаходити глобальний розв’язок або наближений до нього. У ньому використано найпростіший розв’язний випадок, який задано двома системами перестановок. Під розв’язними мається на увазі певний підклас задач, для яких відомий аналітичний спосіб знаходження глобального розв’язку.

Одним із перших досліджених розв’язних випадків у комбінаторній оптимізації є дві множини перестановок, що задані системами (*a*) і (*b*), на яких уведено цільову функцію $\sum ab$ [8]. Для цих систем визначено перестановки, для яких $\sum ab$ набуває найбільшого або найменшого значень.

Якщо елементи перестановки із системи (*a*) впорядковані від більшого елемента до меншого, а з (*b*) упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum ab$ є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких перестановок упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum ab$ є глобальним максимумом. Цей розв’язний випадок не належить жодному класу з класів задач комбінаторної оптимізації.

Комбінаторна конфігурація (аргумент цільової функції) в оговореному методі будується в процесі розв’язання задачі на основі аналізу значень множини вхідної інформації. Але в процесі його побудови на певній ітерації оцінка результату проводиться за виразом (1) (кореляційним підходом). Тобто, в методі структурно-алфавітного пошуку така оцінка проводиться як розпізнаванням значень вхідної інформації, так і кореляційним способом. Використання ж розв’язного випадку, заданого двома множинами перестановок, дозволяє без перебору варіантів відтинати неефективні розв’язки та знаходити підмножину, яка містить глобальний оптимум.

Для розв’язання задач комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку уведемо комбінаторну функцію вигляду $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), ..., \beta_m(f(m), w^k)) \in H$, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ — комбінаторну функцію, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_m\}$, H та H' — відповідно системи цих функцій. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, а w^1, w'^1 — комбінаторні конфігурації одного типу і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$ і $W \subset W'$.

Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою. Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^i)\Big|_1^m$), де $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)\Big|_1^m \ge \overleftarrow{\beta}(f(j+1), w'^i)$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \le \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$), та $\overrightarrow{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m$), де $\overrightarrow{\varphi}(j) \le \overrightarrow{\varphi}(j+1)$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j) \ge \overleftarrow{\varphi}(j+1)$, утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо впорядкованою.

Наведемо приклад розв’язання задачі розміщення оговореним методом для $n = 4$. Припустимо $\beta\left(f(j), w^1\right)\Big|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\varphi(j)|_1^m =$

$=(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Для впорядковної задачі (система H') мінімальне значення цільової функції дорівнює $F(w'^t) = (6{\cdot}1, 5{\cdot}2, 4{\cdot}3, 3{\cdot}4, 2{\cdot}5, 1{\cdot}6) = 42$, а максимальне відповідно $F(w'^t) = (6{\cdot}6 + 5{\cdot}5 + 4{\cdot}4 + 3{\cdot}3 + 2{\cdot}2 + 1{\cdot}1) = 91$.

За розробленими правилами [4] побудуємо таблицю.

У цій задачі номери адресів x_j, де знаходяться значення числової функції, є номерами позицій перестановки, а адреси y_j значень комбінаторної функції — елементи перестановки, які необхідно помістити у визначені позиції.

Знайдемо перестановку, для якої значення цільової функції було б мінімальним. Припустимо $k = 1$. Для значення $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) = 6$ елементи перестановки дорівнюють 3 і 4. Помістимо їх у позиції 1 і 2, де знаходиться значення $\vec{\varphi}(1) = 1$. Щоб $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) = 5$ знаходилося за адресою (1, 3), необхідно в першу позицію перестановки помістити елемент 4, у другу — елемент 3, а в третю — 2. Тоді четверту позицію займе елемент 1. Одержимо перестановку $w^1 = (4, 3, 2, 1)$, варіант розміщення $u(w^1, l) = (6{\cdot}1, 5{\cdot}2, 3{\cdot}3, 4{\cdot}4, 5{\cdot}2, 1{\cdot}6) = (6, 10, 9, 16, 10, 6)$, цільову функцію $F(w^1) = (6 + 10 + 9 + 16 + 10 + 6) = 57$.

Припустимо $k=2$. Побудуємо перестновку, починаючи з $\vec{\varphi}(2) = 2$. Щоб значення $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) = 5$ знаходилося за адресою (1, 3) матриці, необхідно в першій позиції перестановки помістити елемент 2, в третій — елемент 4, а щоб $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) = 4$ знаходилося за адресою (1, 4), в четвертій позиції помістимо елемент 3. У другій — відповідно елемент 1. Одержимо перестановку $w^2 = (2, 1, 4, 3)$, варіант розміщення $u(w^2, l) = (1{\cdot}1, 5{\cdot}2, 4{\cdot}3, 3{\cdot}4, 2{\cdot}5, 6{\cdot}6) = (1, 10, 12, 12, 10, 36)$, цільову функцію $F(w^2) = (1 + 10 + 12 + 12 + 10 + 36) = 81$. Оскільки для перестановки $w^2 = (2, 1, 4, 3)$ значення цільової функції збільшується, за глобальний мінімум беремо $w^1 = (4, 3, 2, 1)$.

За описаними правилами по комбінаторній функції $\vec{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ знайдемо перестановку $w^1 = (1, 2, 3, 4)$, для якої варіант розміщення дорівнює $u(w^1, l) = (1{\cdot}1, 2{\cdot}2, 3{\cdot}3, 4{\cdot}4, 5{\cdot}5, 6{\cdot}6) = (1, 4, 9, 16, 25, 36)$, а значення цільової функції $F(w^1) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = 91$. Для цієї перестановки послідовність значень у комбінаторній функції $\vec{\beta}(f(j), w'^i)\big|_1^m$ не змінилася, тому приймаємо її за глобальний максимум, що не суперечить результату, отриманому повним перебором.

Розглянемо задачу *кластеризації*. У процесі її розв'язання значення цільової функції (1), з урахуванням заданих за умовою кри-

Таблиця. **Функції $\vec{\varphi}(j)\big|_1^m$, $\vec{\beta}(f(j), w'^i)\big|_1^m$, $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)\big|_1^m$ та адреси елементів матриці**

Функції та позначення елементів матриці	Номери елементів h наддіагоналей матриці, $h = \{1,\ldots, n\text{-}1\}$					
	1	2	3	4	5	6
$j=\{1,\ldots, m\}$	1	2	3	4	5	6
функція $\overline{\varphi}(j)\|_1^m$	1	2	3	4	5	6
x_j	1	1	1	2	2	3
y_j	2	3	4	3	4	5
функція $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)\|_1^m$	6	5	4	3	2	1
x_j	3	2	2	1	1	1
y_j	4	4	3	4	3	2
функція $\vec{\beta}(f(j), w'^i)\|_1^m$	1	2	3	4	5	6
x_j	1	1	1	2	2	3
y_j	2	3	4	3	4	4

теріїв для усіх можливих варіантів розв'язку задачі, може бути однакове, завдяки чому створюється ситуація невизначеності, яка пов'язана з певною структурою вхідної інформації. Для її вирішення необхідно ввести додаткові критерії, які враховують непрямі зв'язки між елементами на етапі часткового розв'язання задачі та визначають оптимальний розв'язок на наступних етапах. Оскільки критерії — вхідні дані, то введення змінних критеріїв ґрунтується на генеруванні в процесі розв'язання задачі додаткової інформації з урахуванням прогнозу майбутніх результатів. Цією інформацією в задачах розбиття можуть бути непрямі зв'язки між елементами різних підмножин (кластерів) розбиття w^k. Тобто, в процесі розв'язання задачі оптимальний результат знаходиться з урахуванням структури вхідної інформації, а оцінка проводиться за виразом (1).

Вихід із ситуації невизначеності введенням у процесі розв'язання задачі змінних критеріїв розглянемо на прикладі задачі компоновки базових елементів у модулі, яка розв'язується на підмножині ізоморфних розбиттів $W_{\eta^k} \subset W$ [9]. Математична її постановка описана вище. Задача компоновки полягає у знаходженні такого розбиття $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ елементів множини A на задане число η^k підмножин, для якого цільова функція (1) набуває оптимального значення і при цьому виконуються такі умови: $w_r^k \neq \varnothing$, $w_r^k \cap w_{\tilde{r}}^k = \varnothing$, $\bigcup_{r=1}^{\eta^k} w_r^k = A$ для $a_l, a_t \in w_r^k$ і $a_l, a_t \in K^s$, $\left| w_r^k \right| \leq \xi_r^k$, $\tilde{r}, r = \overline{1, \eta^k}$, $l, t \in \{1, ..., n\}$.

За умовою між деякими елементами заданої множини A можуть бути відсутні зв'язки. У процесі розв'язання задачі створюється ситуація невизначеності, коли значення цільової функції з урахуванням заданих критеріїв для усіх можливих варіантів розв'язку — однакове. Тому, крім оптимізації задачі за цільовою функцією (1), вихід із ситуації невизначеності проводиться шляхом аналізу вхідної інформації. Для цього за розробленими правилами вводяться додаткові критерії, тобто генеруються поточні вхідні дані.

Як критерій вибору при визначенні пари кандидатів на включення в деяку підмножину розбиття w^k запишемо зважену цільову функцію,

$$F(w^k) = \sum_{d=1}^{z} \gamma_l F^{(d)}(w^k) + \sum_{s=z+1}^{\tilde{z}} \gamma_s \Phi^{(s)}(w^k),$$

де $\gamma_l \geq 0$, а $\sum_{l=1}^{\tilde{z}} \gamma_l = 1$ — вагові коефіцієнти, $\tilde{z}$ — кількість цільових функцій як постійних так і тих, які утворюються на основі змінних часткових критеріїв. Вибором значення γ_l при знаходженні оптимального розв'язку змінюється міра їхнього вкладу при виборі оптимального результату. Тобто, інтегрована цільова функція складається з часткових функцій $F(w^k) = (F^{(1)}(w^k), ..., F^{(z)}(w^k),\ \Phi^{z+1l)}(w^k), ..., \Phi^{\tilde{z})}(w^k))$, де $F^{(t)}$ — t-та цільова функція, яка формулюється з урахуванням t-го постійного часткового критерію, що заданий за умовою задачі; $\Phi^{(l)}$— l-та цільова функція, яка формується на основі змінних часткових критеріїв, що вводяться в процесі розв'язання задачі, $t \in \{1, ..., z\}$, $l \in \{z+1, ..., \tilde{z}\}$. Урахування постійних часткових критеріїв ефективне, якщо оптимізація проводиться на підмножині ізоморфних розбиттів. Вони можуть бути враховані в процесі розв'язання задачі лише один раз. Введення змінних часткових критеріїв проводиться у випадку, якщо з'являється ситуація невизначеності. Вони використовуються як один раз, так і багато разів в ітераційному режимі таким чином: на l-му етапі часткового розв'язку певної задачі визначаються непрямі зв'язки між елементами і з урахуванням згенерованої допоміжної інформації знаходиться новий варіант розв'язку задачі.

Якщо проаналізувати генетичні алгоритми, то можна побачити, що для знаходження оптимального розв'язку цими підходами оцінка проводиться як розпізнаванням значень вхідної інформації, так і кореляційним способом. Як правило, в них використовуються ітераційні процедури, на кожній із яких результат оцінюється за функцією пристосованості, яка встановлює кореляційну залежність між вхідними даними та аргументом. У процесі їхньої роботи породження розв'язку проводиться «жадібними» конструктивними алгоритмами. Останні відносяться до евристичних та ґрунтуються на розпізнаванні вхідної інформації. Тому в генетичних алгоритмах оцінка результату проводиться комбінованим способом.

Висновки

Отже, використання різних методів оцінки результату розв'язку задачі впливає на швидкодію та точність алгоритмів, що розробляються для розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Глобальний розв'язок для задач великих розмірностей часто знаходиться поліноміально [6] методами, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, в порівнянні з кореляційними. Це пов'язано з тим, що комбінаторна конфігурація (аргумент цільової функції) будується в процесі розпізнавання значень множини вхідних даних, завдяки чому між ними встановлюється функціональна зв'язаність.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гайдышев И.П.* Анализ и обработка данных. Специальный справочник. Санкт-Петербург, ПИТЕР, 2001, 752 с.
2. *Винцюк Т.К.* Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К.: Наук. думка, 1987, 262 с.
3. *Шлезингер М.И.*, *Главач В.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. Киев: Наук. думка, 2004, 546 с.
4. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук, Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, 2007, 32 с.
5. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Пер. с англ., М.: Мир, 1985, 510 с.
6. *Tymofijeva N.K.* Dovedennja zbijnosti algoritmov kombinatornoji optimizatsii z vykorystannjam pidklasiv rozvjaznyx zadath. USiM, 2016, N 2. P. 5–21, 27.
7. *Тимофієва Н.К.* Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера. УСиМ, 2008, № 4. С. 20–36.
8. *Харди Г.Г.*, *Литтльвуд Дж.Е.*, *Полиа Г.* Неравенства. М.: Гос. из-во иностр. лит., 1948, 456 с.
9. *Тимофеева Н.К.* О природе неопределенности и переменных критериях в задачах разбиении. Проблемы управления и информатики. 2009, № 5. С. 88–99.

Надійшла 27.02.2019

REFERENCES

1. Ga'jdychev, I.P., 2001. Analiz i obrabotka dannyx. Spetsialny'j spranothnyk. Sankt-Peterburg, PITER, 752 p. (In Russian).
2. Vintsuk, T.K., 1987. Analiz, raspoznavanie i interpretatsija rethevyx signalov. K.: Nauk. dumka, 262 p. (In Ukrainian).
3. Schlesinger, M., Hlavac, V., 2002. Ten Lectures on Statistical and Structural Pattern Recognition. Computational Imaging and Vision, Vol. 24. Kluwer Academic Publishers - Dordrecht, Boston, London, 520 p.
4. Tymofijeva, N.K., 2007. Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatorno'j optymizatsiji. Avtoref. dys... dokt. texn. nauk, In-t kibernetyky im. V.M. Glushkova NAN Ukrajiny, Kyiv, 32 p. (In Ukrainian).
5. Papadimidriu, X., 1985. Kombinatornaja optimizatsija. Algoritmy i slojnoct. Per. s angl. M.: Mir, 510 p. (In Russian).
6. Tymofijeva, N.K., 2016. "The Proof of the Algorithms Convergence for Combinatorial Optimization with the Using Subclasses of the Solved Problems". Upravlausie sistemy i masiny, 2, pp. 5–21, 27. (In Ukrainian).
7. Tymofijeva, N.K., 2008. "Method of Structurally-Alphabetical Search and Subclasses of Solvable Problem From the Class of the Travelling Salesman Problem". Upravlausie sistemy i masiny, 4, 20–36. (In Ukrainian).
8. Hardi, G.G., Litvuld, Dj.E., Polia, G., 1948. Neravenstva. M.: Gos. iz-vo inostr. lit., 456 p. (In Russian).
9. Timofeeva, N.K., 2009. "On Nature of Uncertainty and Variable Criteria in the Partition Problems". Journal of Automation and Information Sciences, 9, pp. 26-38.

Received 27.02.2019

N.K. Tymofiyeva, Doctor Eng., chief researcher,
International Research and Training Center for Information Technologies
and Systems of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine,
tymnad@gmail.com

ON SOME APPROACHES TO ESTIMATING THE OPTIMAL SOLUTION OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS

Introduction. In combinatorial optimization, the input data based on which the result of the problem solution is evaluated, are random variables and have a disordered structure. The various methods of data analysis, which are available in mathematical statistics, are used for an adequate estimation.

Formulation of the problem. To estimate the result of the combinatorial optimization problems solution, the structure of the input data, which are random variables with a random structure, is recognized, or based on this information, the objective function is modeled. To get an adequate assessment, it is important to choose such approaches data analysis, in which one can get the optimal result in real time.

The proposed approach. The problems of combinatorial optimization are divided into the tasks in which the argument of objective function (combinatorial configuration) is not based on the structure of the input information, but determined on a certain iteration by chance or by certain rules. In this case, the estimation of the result is made on the expression in which the total product of the values of two finite sequence, which is given input information, is calculated. Accordingly, their dependence on the combinatorial configuration is established. This approach is called correlation, and the method of problem solving is iterative. Otherwise, in the process of solving the problem by the input information structure analyzing, a combinatorial configuration is constructed (the argument of the objective function). That is, by identifying the data structure is the optimal (or global) solution. This method is based on the recognition of the input information structure. There are also methods in which the argument of objective function is constructed in the process of input information recognizing, and the result is estimated by the objective function by the correlation of the input data and the argument of the objective function. In recognition problems, measures of similarity are introduced, by which the values (elementary measure of similarity), which form the sequence of input data, are calculated. By the total product of the sequence values (integral degree of similarity) the result is estimated.

Conclusion. Different approaches to the analysis of input information affect the result accuracy and the speed of the algorithm. By methods based on the recognition of the input data structure in comparison with the iterative ones in which the result evaluation is carried out by a correlation approach, the global solution for large dimensions of the problem is often polynomial.

Keywords*: combinatorial optimization, correlation approach for estimating the result, recognition of the structure of the input data, combinatorial configuration, objective function.*

Н.К. Тимофеева, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник,
Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН и МОН Украины,
просп. Академика Глушкова, 40, Киев 03187, Украина,
tymnad@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ОЦЕНКЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введение. В комбинаторной оптимизации входные данные, по которым оценивается результат решения задачи, представляют собой случайные величины, имеющие беспорядочную структуру. Для адекватной оценки используются различные методы анализа данных, имеющие место в математической статистике.

Постановка задачи. Для оценки результата решения задач комбинаторной оптимизации распознается структура входной информации, представляющая собой случайные величины с беспорядочной структурой, или на основе этой информации моделируется целевая функция. Для получения адекватной оценки важно выбрать такие подходы анализа данных, при которых можно получить оптимальный результат в реальном времени.

Предлагаемый подход. Для решения поставленной проблемы проведен анализ задач комбинаторной оптимизации и выделены такие, в которых оценка результата проводится с использованием корреляционных методов и в которых нахождение оптимального результата проводится путем распознавания структуры входной информации.

Задачи комбинаторной оптимизации разделяются на такие, в которых аргумент целевой функции (комбинаторная конфигурация) находится не с учетом структуры входной информации, а определяется на конкретной итерации случайно или по определенным правилам. В этом случае оценка результата проводится по выражению, в котором вычисляется суммарное произведение значений двух конечных последовательностей случайных величин, которыми задается входная информация. Соответственно устанавливается их зависимость от комбинаторной конфигурации. Такой подход назван корреляционным, а метод решения задач — итерационным. Во втором случае в процессе решения задачи путем анализа структуры входной информации последовательно строится комбинаторная конфигурация (аргумент целевой функции), т.е. путем распознавания структуры данных находится оптимальное (или глобальное) решение. Этот метод основывается на распознавании структуры входной информации. Также существуют методы, в которых аргумент целевой функции строится в процессе распознавания входной информации, а полученный результат оценивается по целевой функции корреляцией заданных случайных величин и аргументом целевой функции. В задачах распознавания вводятся меры сходства, с помощью которых вычисляются величины (элементарные меры сходства), числовые значения которых образуют последовательность входных данных. По суммарному произведению значений этих последовательностей (интегральной степени сходства) оценивается результат.

Выводы. Различные подходы анализа входной информации влияют на точность результата и на быстродействие алгоритма. Глобальное решение для задач больших размерностей достаточно часто находится полиномиальными методами, основанными на распознавании структуры входных данных, в сравнении с итерационными, в которых оценка результата проводится корреляционным подходом.

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, корреляционный подход оценки результата, распознавание структуры входной информации, комбинаторная конфигурация, целевая функция.*