DOI https://doi.org/10.15407/usim.2019.05.005

UDC 519.713

B.Ye. Rytsar, Doctor Eng., Professor,
Institute of Telecommunications, Radioelectronics and Electronic Engineering,
L'viv polytechnic National University, Bandera str., 12, L'viv, 79013, Ukraine,
E-mail: bohdanrytsar@gmail.com

A NEW METHOD FOR SYMMETRY RECOGNITION IN BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON THE SET-THEORETICAL LOGIC DIFFERENTIATION. II[1]

The article describes a new method for the recognition of different types of total and partial symmetry in boolean functions based on the numeric set-theoretical differentiation. The proposed algorithm is based on the theorem on the recognition of different types of partial symmetry. This algorithm, compared to the known, has a relatively less computational complexity of realization due to a comparatively smaller number of operations and procedures necessary for the accomplishment of the given task. This is evidenced by the presented examples for the recognition of the proposed method of the different types of symmetry in complete and incomplete of Boolean functions, including given in the SOP format, borrowed for comparison reasons from publications of well-known authors.

Keywords: *recognition of total and partial symmetry, Boolean function, numeric set-theoretical differentiation.*

Description of algorithm

The algorithm of the numeric set-theoretical method for recognition of the partial symmetries types in complete of Boolean function $f = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n)$ given by the perfect STF $Y^1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_z\}^1$, $2 < z < 2^n$, can be realized by means of the following steps:

Step 1: The mask of the literals $\left\{ \begin{matrix} l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n \\ l_1 \cdots \bar{l}_i \cdots \bar{l}_j \cdots l_n \end{matrix} \right\}$, $l \in \{0, 1\}$, impose on the set of given binary minterms $m_1, m_2, \ldots, m_z$ and determine the vectorial ST-derivative of the 2-nd order (1) for all $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!}$ possible pairs of variables of the function f; if z is an odd number, then proceed to *Step* 3, and if z is an even number, then

Step 2: Check the condition (2) of the theorem (Section 3) for all C_n^2 pairs of variables and if it is executed, then the given function has a totally polysymmetry of variables and then perform the transition to *Step* 6; if condition (2) is satisfied only for one or some pairs of variables, then this function has a partial polysymmetry with respect to these variables and then perform the transition to *Step* 5, and if condition (2) is not fulfilled, then

Step 3: Check condition (3) for all C_n^2 pairs of variables, and if it is executed, then the given function has a totally simple symmetry of variables and then perform the transition to *Step* 6; if condition (3) is satisfied only for some pairs of variables, then this function has a partial simple symmetry with respect to these variables and then perform the transition to *Step* 5, and if condition (3) is not satisfied, then

Step 4: Check condition (4) for all C_n^2 pairs of variables and if it is executed, then the given function has the totally antisymmetry of the variables, and if condition (4) is satisfied only for some pairs of variables, then this function has a partial antisymmetry with respect to these variables; if the condition (4) is not fulfilled, then proceed to the *Step* 6;

Step 5: Check condition (3) or (4) for the remaining pairs of variables and if it is executed, then the function has a partial simple symmetry or partial antisymmetry with respect to these variables, and if condition (3) or (4) is not satisfied, then

Step 6: Write the final result.

Note that if a function is given in SOP format (or STF) and has non-orthogonal pseudoternary conjuncterms, then such a function needs to be orthogonalized, for example by numeric set-theoretical method [16].

Recognition of partial symmetries types in incomplete functions

The proposed method can also be used to identify partial symmetries in incomplete (incompletey specified) functions on the basis of the theorem (Part I) with respect to the peculiarities of incomplete functions.

In the set-theoretical format (STF) the incomplete function f:$\{0,1\}^n \rightarrow \{0, 1, \sim\}$, where the sign of the tilde ~ symbolizes the uncertainty of the function f, is represented by two sets that constitute the perfect STF [18]

$$\text{or}\begin{cases} Y^1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_z\}^1 \\ Y^{\sim} = \{m_{z+1}, m_{z+2}, \ldots, m_{2^n-z-h}\}^{\sim}, \end{cases} \qquad (5)$$

$$\text{or}\begin{cases} Y^1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_z\}^1 \\ Y^0 = \{m_{z+1}, m_{z+2}, \ldots, m_{2^n-z-h}\}^0 \end{cases}, h < 2^n - z, \qquad (6)$$

where Y^1, Y^0 and $Y^{\sim}$ are subsets of the minterms of the set $\mathbf{E}_2^n$, on which the function f has values 1, 0 and "don't care" (~). In our case we will apply the perfect STF (5).

Accordingly, the vectorial ST-derivative of the 2-nd order with respect to variables (x_i, x_j) of the function f will consist of two sets of pairs of minterms formed by masks of literals $\begin{Bmatrix} l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n \\ l_1 \cdots \bar{l}_i \cdots \bar{l}_j \cdots l_n \end{Bmatrix}$, PSTF's $Y^{\oplus}$ and $Y^{\tilde{\oplus}}$, that is $Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}$, where $\vdots$ is the sign of separation of these sets. As in the case of a complete function (Part I), the procedure for simplifying the set $Y^{\oplus}$ will be realized by eliminating pairs of identical elements. In addition, the procedure for predetermined of an incomplete function will simultaneously be realized — if any pair of minterms of the set $Y^{\oplus}$ has a copy in the set $Y^{\tilde{\oplus}}$, then it is eliminated from $Y^{\oplus}$.Then, for received of minterms of the vectotial ST-derivative $\partial^2 Y^{\oplus} / \partial(x_i, x_j)$ of a predetermined incomplete function f, the same as in the case of a complete function, the verification of the conditions (2), (3), and (4) of the theorem (Section 3) is performed. Let's consider it in the examples.

Example 7[9]. Identify the types of parti-al symmetries for the incomplete function $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ given by the perfect STF

$$\begin{cases} Y^1 = \{0,6,9,10,15,21,22\}^1 \\ Y^{\sim} = \{1,2,5,11,16,18,25,26,31\}^{\sim} \end{cases}$$ (in [9] the *K*-map method is used).

Solution. We firs tdefine the vectorial *ST*-derivative $\partial^2 Y^{\oplus} / \partial(x_1, x_2)$, impose the appropriate mask of the literals on the minterms of the perfect PSTF $Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}$:

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_1,x_2)}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix} l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 \\ \bar{l}_1 \bar{l}_2 l_3 l_4 l_5 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 00000 \\ 11000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00110 \\ 11110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01001 \\ 10001 \end{pmatrix}, \right. \right.$$

$$\left. \cancel{\begin{pmatrix} 01010 \\ 10010 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 01111 \\ 10111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10101 \\ 01101 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10110 \\ 01110 \end{pmatrix} \right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots \left\{ \begin{pmatrix} 00001 \\ 11001 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 00010 \\ 11010 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 00101 \\ 11101 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01011 \\ 10011 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10000 \\ 01000 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \left. \cancel{\begin{pmatrix} 10010 \\ 01010 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 11001 \\ 00001 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 11010 \\ 00010 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00111 \end{pmatrix} \right\}^{\hat{\oplus}} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 00000 \\ 11000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00110 \\ 11110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01001 \\ 10001 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 01111 \\ 10111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10101 \\ 01101 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10110 \\ 01110 \end{pmatrix} \right\}.$$

Since none of the conditions (2), (3) and (4) of the theorem (Part I) is not satisfied here the predetermined incomplete function f does not have a partial symmetry with respect to the pair of variables $\{x_1, x_2\}$. Similarly, there are no partial symmetries with respect to the pairs of variables $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$ and $\{x_1, x_5\}$. Instead, for the rest of all possible $C_5^2 = 10$ pairs of variables we get:

- for the pair of variables $\{x_2, x_3\}$ we have

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_2,x_3)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 \\ l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 l_4 l_5 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{ \left\{ \binom{00000}{01100}, \cancel{\binom{00110}{01010}}, \cancel{\binom{01001}{00101}}, \cancel{\binom{01010}{00110}}, \binom{01111}{00011}, \cancel{\binom{10101}{11001}}, \cancel{\binom{10110}{11010}} \right\}^{\oplus} \vdots \right.$$

$$\left. \vdots \left\{ \binom{00001}{01101}, \binom{00010}{01110}, \cancel{\binom{00101}{01001}}, \binom{01011}{00111}, \binom{10000}{11100}, \binom{10010}{11110}, \cancel{\binom{11001}{10101}}, \cancel{\binom{11010}{10110}}, \binom{11111}{10011} \right\}^{\hat{\oplus}} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \binom{00000}{11000}, \binom{00110}{11110} \right\} \cap \left\{\begin{matrix} (-01--),(-10--) = \varnothing \\ (-00--),(-11--) \neq \varnothing, \end{matrix}\right.$$

in accordance with condition (3), the predetermined incomplete function f has the partial simple symmetry $x_2 \sim x_3 \,/\, \bar{x}_2 \sim \bar{x}_3$;

- for the pair of variables $\{x_2, x_4\}$ we have

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_2,x_4)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 \\ l_1 \bar{l}_2 l_3 \bar{l}_4 l_5 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{ \left\{ \cancel{\binom{00000}{01010}}, \binom{00110}{01100}, \binom{01001}{00011}, \cancel{\binom{01010}{00000}}, \cancel{\binom{01111}{00101}}, \cancel{\binom{10101}{11111}}, \binom{10110}{11100} \right\}^{\oplus} \vdots \right.$$

$$\left. \vdots \left\{ \binom{00001}{01011}, \binom{00010}{01000}, \cancel{\binom{00101}{01111}}, \binom{01011}{00001}, \binom{10000}{11010}, \binom{10010}{11000}, \cancel{\binom{11001}{10011}}, \cancel{\binom{11010}{10000}}, \binom{11111}{10101} \right\}^{\hat{\oplus}} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \binom{00000}{01100}, \binom{01001}{00011}, \binom{10110}{11100} \right\}^{\oplus} \cap$$

$$\cap \left\{\begin{matrix} (-0-1-),(-1-0-) \neq \varnothing \\ (-0-0-),(-1-1-) = \varnothing, \end{matrix}\right.$$

in accordance with condition (4) the predetermined incomplete function f has the antisymmetry type $x_2 \sim \bar{x}_4 \,/\, \bar{x}_2 \sim x_4$.

By performing the proposed method similar procedures for the remaining pairs of variables of the given incomplete function f, we obtain the following partial symmetries:

- for the pair of variables $\{x_2, x_5\}$ we have the antisymmetry $x_2 \sim \bar{x}_5 \,/\, \bar{x}_2 \sim x_5$,
- for the pair of variables $\{x_3, x_4\}$ we have the antisymmetry $x_3 \sim \bar{x}_4 \,/\, \bar{x}_3 \sim x_4$,
- for the pair of variables $\{x_2, x_5\}$ we have the antisymmetry $x_3 \sim \bar{x}_5 \,/\, \bar{x}_3 \sim x_5$,
- for the pair of variables $\{x_4, x_5\}$ we have the simple symmetry $x_4 \sim x_5 \,/\, \bar{x}_4 \sim \bar{x}_5$.

Thus, the given incomplete function f is characterized by a mixed symmetry of type $x_1 \not\sim (x_2 \sim x_3 \sim \bar{x}_4 \sim \bar{x}_5)$ or $\bar{X}_1 \not\sim (\bar{X}_2 \sim \bar{X}_3 \sim X_4 \sim X_5)$.

We note that partial symmetries were detected in [9] only for two pairs of variables $\{x_2, x_4\}$ and $\{x_3, x_4\}$, that is mixed symmetry type $x_1 \not\sim x_5 \not\sim (x_2 \sim x_3 \sim \bar{x}_4)$ or $X_1 \not\sim X_5 \not\sim (\bar{X}_2 \sim \bar{X}_3 \sim X_4)$.

Example 8 [14]. Identify the types of partial symmetries for the incomplete function $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ given by theperfect STF

$$\left\{\begin{matrix} Y^1 = \{(0001),(0100),(0101),(0110),(0111)\}^1 \\ Y^{\sim} = \{(0000),(0010),(0011),(1001),(1010)\}^{\sim}. \end{matrix}\right.$$

Solution. For the pair of variables $\{x_1, x_2\}$ we have:

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_1,x_2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_4 \\ \bar{l}_1 \bar{l}_2 l_3 l_4 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{ \binom{0001}{0111}, \binom{0100}{0010}, \cancel{\binom{0101}{0011}}, \cancel{\binom{0110}{0000}}, \binom{0111}{0001} \right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots \left\{ \binom{0000}{1100}, \binom{0010}{1110}, \binom{0011}{1111}, \cancel{\binom{1001}{0101}}, \cancel{\binom{1010}{0110}} \right\}^{\hat{\oplus}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \binom{0001}{1101}, \binom{0100}{1000}, \binom{0111}{1011} \right\} \cap \left\{\begin{matrix} (01--),(10--) \neq \varnothing \\ (00--),(11--) \neq \varnothing. \end{matrix}\right.$$

As well as for a pair $\{x_1, x_2\}$, the predetermined incomplete function f does not have partial symmetries with respect to the pairs of variables $\{x_1, x_3\}$ and $\{x_1, x_4\}$. Let's consider for the rest of all possible $C_4^2 = 6$ pairs of variables.

For the pair of variables $\{x_2, x_3\}$ we have:

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_2,x_3)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_4 \\ l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 l_4 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0100\\0010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0101\\0011\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0110\\0000\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}0000\\0110\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0010\\0100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0011\\0101\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1100\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}=\varnothing.$$

After simplifying the set $Y^{\oplus}$ here you can find different types of partial symmetries, which depend on the selected variant for the predetermination of the given function *f*. Consider these variants:

1. $$\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0100\\0010\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0101\\0011\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0110\\0000\end{matrix}}\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0000\\0110\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0010\\0100\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0011\\0101\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1100\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}=\varnothing;$$

2. $$\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0100\\0010\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0101\\0011\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0110\\0000\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}0000\\0110\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0010\\0100\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0011\\0101\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1100\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0110\\0000\end{pmatrix}\right\}\cap\begin{cases}(-01-),(-10-)=\varnothing\\(-00-),(-11-)\neq\varnothing\end{cases};$$

3. $$\left\{\begin{pmatrix}0100\\0010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0101\\0011\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0110\\0000\end{matrix}}\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0000\\0110\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0010\\0100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0011\\0101\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1100\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0110\\0000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0101\\0011\end{pmatrix}\right\}\cap\begin{cases}(-01-),(-10-)=\varnothing\\(-00-),(-11-)\neq\varnothing\end{cases}.$$

Consequently, for each of the variants for the predetermination we will have the following partial symmetries with respect to the pair $\{x_2, x_3\}$:

1. polysymmetry $\tilde{x}_2 \sim \tilde{x}_3$;
2. simple symmetry $x_2 \sim x_3 \,/\, \overline{x}_2 \sim \overline{x}_3$;
3. antisymmetry $x_2 \sim \overline{x}_3 \,/\, \overline{x}_2 \sim x_3$.

• For the pair of variables $\{x_2, x_4\}$ we have:

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\tilde{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_2,x_4)}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix} l_1 l_2 l_3 l_4 \\ l_1 \overline{l}_2 l_3 \overline{l}_4 \end{Bmatrix} =$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}0001\\0100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0100\\0001\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0101\\0000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0110\\0011\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0111\\0010\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}0000\\0110\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0010\\0100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0011\\0101\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1100\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}.$$

In this case, just like in the previous one, we also have three variants for the predetermination:

1. $$\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0101\\0000\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0110\\0011\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0111\\0010\end{matrix}}\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0000\\0101\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0010\\0111\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0011\\0110\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1111\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}=\varnothing;$$

2. $$\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0101\\0000\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0110\\0011\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0111\\0010\end{matrix}}\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0000\\0101\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0010\\0111\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0011\\0110\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1111\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0110\\0011\end{pmatrix}\right\}\cap\begin{cases}(-0-1),(-1-0)\neq\varnothing\\(-0-0),(-1-1)=\varnothing\end{cases};$$

3. $$\left\{\begin{pmatrix}0101\\0000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0110\\0011\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0111\\0010\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$\vdots\left\{\begin{pmatrix}0000\\0101\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0010\\0111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0011\\0110\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1111\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0110\\0000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0111\\0010\end{pmatrix}\right\}\cap\begin{cases}(-01-),(-10-)=\varnothing\\(-00-),(-11-)\neq\varnothing\end{cases}.$$

Consequently, for a pair of variables $\{x_2, x_4\}$, we have the following partial symmetries:

1. polysymmetry $\tilde{x}_2 \sim \tilde{x}_4$;
2. antisymmetry $x_2 \sim \overline{x}_4 \,/\, \overline{x}_2 \sim x_4$;
3. simple symmetry $x_2 \sim x_4 \,/\, \overline{x}_2 \sim \overline{x}_4$.

• For the pair of variables $\{x_3, x_4\}$ we have:

$$\{Y^{\oplus} \vdots Y^{\hat{\oplus}}\} \overset{\partial^2/\partial(x_3,x_4)}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix} l_1 l_2 l_3 l_4 \\ l_1 l_2 \overline{l}_3 \overline{l}_4 \end{Bmatrix} =$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}\bcancel{\begin{matrix}0001\\0010\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cancel{\begin{matrix}0100\\0111\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cancel{\begin{matrix}0101\\0110\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cancel{\begin{matrix}0110\\0101\end{matrix}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cancel{\begin{matrix}0111\\0100\end{matrix}}\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \vdots$$

$$:\left\{\begin{pmatrix}0000\\0011\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0010\\0001\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0011\\0000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1001\\1010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1001\end{pmatrix}\right\}^{\hat{\oplus}}\Rightarrow\varnothing$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0101\\0110\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0110\\0101\end{pmatrix}\right\}\cap\{(--01),(--10)\}=\varnothing,$$

and hence, in accordance with the condition (9), the predetermined incomplete function f has a partial symmetry .

Thus, the given function f has the following variants of mixed partial symmetries:

- $x_3 \sim \overline{x}_4 \,/\, \overline{x}_3 \sim x_4$;
- $x_1 \nsim (\tilde{x}_2 \sim \tilde{x}_3 \sim \tilde{x}_4)$;
- $x_1 \nsim (x_2 \sim \overline{x}_3 \sim x_4) \,/\, x_1 \nsim (\overline{x}_2 \sim x_3 \sim \overline{x}_4)$,

that corresponds to [14].

CONCLUSION

Part 2 of the article describes the algorithm of the proposed method for the recognition of various types of symmetry (polysymmetry, simple symmetry and antisymmetry) in the boolean functions of n variables, based on the numerical set-theoretical logical differentiation. In particular, features of recognition of partial symmetries in incomplete functions are shown on the basis of the theorem (Part 1). The advantage of the proposed method, in comparison with other [2, 3, 8–11], consists in the fact that during the simplification procedure (of the set $Y^{\oplus}$) the predetermination procedure for the incomplete function is simultaneously implemented. In addition, the proposed method is easier to implement in practice, which in this work is illustrated by examples of functions borrowed from publications by well-known authors.

REFERENCES

1. Maurer, P.M., 2015. "Symmetric Boolean Functions". Int. J. of Math., Game Theory and Algebra,. 24 (2–3), pp. 159–202.
2. Scholl, Ch., 2001. "Functional Demposition with Application to FPGA Synthesis". Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, pp. 50–63.
3. Schneeweiss, W.G., 1989. Boolean Functions with Engineering Applications and Computer Programs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 264 p.
4. Bhattacharjee, P.K., 2010. "Digital Combinational Circuits Design with the Help of Symmetric Functions Considering Heat Dissipation by Each QCA Gate". Int. J. of Computer and Electrical Engineering, 2 (4), pp. 666–672.
5. Stanica, P., Maitra, S., 2008. "Rotation symmetric Boolean functions — Count and cryptographic properties". Discrete Applied Mathematics, 156 (10), pp. 1567–1580.
6. Butler, J.T., Sasao, T., 2010. "Boolean Functions for Cryptography". In book Sasao T., Butler J.T.: Progress in Applications of Boolean Functions, pp. 33–53.
7. Zhang, J. S., Mishchenko, A., Brayton, R., Chszanowska, M., 2006. "Symmetry Detection for Large Boolean Functions using Circuit Representation, Simulation, and Satisfiability". DAC 2006, July 24–28, https://people.eecs. berkeley.edu/~alanmi/publications/2006/dac06_sym.pdf.
8. Butler, J.T., Dueck, G.W., Holowinski, G., Shmerko, V.P., Janushkewich, V.N., 1999. "On Recognition of Symmetries for Switching Functions in Reed-Muller Forms". Proc. PRIP'99, Belarus, 1, pp. 215–234.
9. Paulin, O.N., Lyakhovetskiy, A.M., 1999. "Metod doopredeleniya nepolnost'yu zadannoy funktsii do simmetricheskoy". Elektron. Modelirovaniye, 21 (6), pp. 21–30. (In Russian).
10. Zakrevskiy, A.D., Pottosin, Yu.V., Cheremisinova, L.D., 2007. Logicheskiye osnovy proyektirovaniya diskretnykh ustroystv. M.: Fizmatlit, 592 p. (In Russian).
11. Rytsar, B., 2018. "Set-Theoretical Decomposition on the Basis of Symmetric Functions". Proc. TCSET'2018, 20-24 Feb., pp. 868–872.
12. Steinbach, B., Posthoff, C., 2009. Logic Functions and Equations. Examples and Exercises. Springer Science + Business Media B.V., 230 p.
13. Steinbach, B., Posthoff, C., 2017. "Boolean Differential Calculus. Morgan & Claypool Publishers series", 195 p., www.morganclaypool.com.
14. Wang, K.-H., Chen, J.-H., 2004. "Symmetry Detection for Incompletely Specified Functions". DAC 2004, June 7–11, San Diego, California, USA, pp. 434–437. https://www.sciencedirect.com/science/journal/0166218X/156/10.
15. Rytsar, B., 2016. "A Simple Numeric Set-Theoretical Method of the Logic Differential Calculus". Control Systems and Computers, 6, pp. 12–23.

16. Rytsar, B., Romanowski, P., Shvay, A., 2010. "Set-theoretical Constructions of Boolean Functions and theirs Applications in Logic Synthesis". Fundamenta Informaticae, 99 (3), pp. 339–354.
17. Rytsar, B., 2003. "Identification of symmetry of Boolean function decomposition cloning method". Proc. 6th Int. Conf. on Telecom., TELSIKS 2003, Yugoslavia, Nis. 003, pp. 596–603.
18. Rytsar, B. 2015. "A new minimization method of logical functions in polynomial set-theoretical format. 1. Generalized rules of conjuncterms simplification". Control Systems and Computers, 2, pp. 39–57.
19. Rytsar, B.Ye., 2013. "A Numeric Set-Theoretical Interpretation of Reed-Muller Expressions with Fixed and Mixed Polarity", Control Systems and Computers, 3, pp. 30–44.
20. Yang, S., 1991. Logic synthesis and optimization benchmarks user guide — version 3.0. Microelectronics Center of North Carolina, Research Triangle Park, NC, January.
21. Kravets, V.N., Sakallah, K.A. Generalized Symmetries in Boolean Functions, [online]. Available at: <www.eecs.umich > [Accessed 15 Dec. 2018].
22. Kaeslin, H., 2008. "Digital Integrated Circuit Design From VLSI Architectures to CMOS Fabrication". Cambridge University Press, pp. 741.

Received 22.07.2019

Б.Є. Рицар, доктор технічних наук, професор,
кафедра радіоелектронних пристроїв та систем,
Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна,
E-mail: bohdanrytsar@gmail.com

НОВИЙ МЕТОД РОЗПІЗНАВАННЯ СИМЕТРІЇ У БУЛОВИХ ФУНКЦІЯХ НА ОСНОВІ ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННОГО ЛОГІКОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. II

Вступ. Симетричні булові функції завдяки своїм специфічним властивостям мають широке застосування у проектуванні цифрових пристроїв, телекомунікаціях, криптографії тощо. Оскільки булові функції можуть мати різні типи симетрії з властивими їм особливостями, важливо вміти їх розпізнавати якомога простішими засобами. Проте проблема ускладнюється тим, що, з одного боку, функції можуть бути як одного типу, так і змішаного, а також як повністю симетричними, так і частково симетричними, а з другого боку, сама функція може бути не повністю визначена, тобто задана частково, або задана ДНФ. Сучасні методи розпізнавання типів симетрії ґрунтуються переважно на аналітичному підході (розкладі Шеннона), візуальному методі, аналітичному обчисленні логікових похідних і т.ін., надто складні щодо реалізації та мало ефективні для функцій великих розмірів і особливо, коли вони задані частково.

Мета статті — розробити простий для реалізації метод розпізнавання різних типів повних і частинних симетрій як у повних, так і частково заданих булових функціях.

Методи. У статті запропоновано новий метод розпізнавання різних типів повних і частинних симетрій, таких як полісиметрія, проста симетрія та антисиметрія, як у повністю, так і частинно заданих функціях на основі числового теоретико-множинного логікового диференціювання. Алгоритм методу ґрунтується на теоремі про розпізнавання різних типів частинних симетрій, який, порівняно з відомими, має відносно меншу обчислювальну складність за рахунок порівняно меншої кількості операцій і процедур, потрібних для виконання поставленої задачі.

Результат. Справедливість доведеної теореми засвідчують приклади розпізнавання різних типів повних і частинних симетрій як у повністю заданих функціях (Частина 1), так і частково заданих функціях (Частина 2), у тому числі заданих у ДНФ, які з метою порівняння ефективності запропонованого алгоритму запозичено з публікацій відомих авторів.

Висновок. Запропонований новий метод розпізнавання різних типів повних і частинних симетрій (полісиметрії, прості симетрії та антисиметрії) як у повністю, так і частково заданих булових функціях на основі числового теоретико-множинного логікового диференціювання відрізняється від відомих відносно простішою практичною реалізацією.

Ключові слова: *розпізнавання повних і часткових симетрій, булова функція, числове теоретико-множинне логікове диференціювання.*

Б.Е. Рыцар, доктор технических наук, профессор,
кафедра радиоэлектронных устройств и систем,
Национальный университет «Львівська політехніка»,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина,
E-mail: bohdanrytsar@gmail.com

НОВЫЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ СИММЕТРИИ В БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ЛОГИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. II

Введение. Симметричные булевые функции благодаря своим специфическим свойствам широко используются в проектировании цифровых устройств, телекоммуникациях, криптографии и т.п. Поскольку булевые функции могут иметь разные типы симметрии с присущими им особенностями, важно уметь их распознавать как можно простейшими способами. Но проблема усложняется тем, что, с одной стороны, функции могут быть как одного типа, так и смешанного, а также как полностью симметричными, так и частично симметричными, а с другой стороны, сама функция может быть не полностью определена, т.е. задана частично, или задана ДНФ. Современные методы распознавания типов симметрии основаны преимущественно на аналитическом подходе (разложении Шеннона), визуальном методе, аналитическом вычислении логических производных и др., слишком сложны в реализации и мало эффективны для функций больших размеров и особенно, когда они заданы частично.

Цель статьи — разработать простой в реализации метод распознавания разных типов полных и частичных симметрий, как в полных, так и частично заданных булевых функциях.

Методы. В статье предложен новый метод распознавания разных типов полных и частичных симметрий, таких как полисимметрия, простая симметрия и антисимметрия, как в полностью, так и частично заданных функциях на основе численного теоретико-множественного логического дифференцирования. Алгоритм метода основан на теореме распознавания разных типов частичных симметрий, который, в сравнении с известными, имеет относительно меньшую вычислительную сложность благодаря сравнительно меньшему количеству операций и процедур, необходимых для выполнения поставленной задачи.

Результат. Справедливость доказанной теоремы показывают примеры распознавания разных типов полных и частичных симметрий как в полностью заданных функциях (Часть 1), так и частично заданных функциях (Часть 2), в том числе заданных в ДНФ, которые с целью сравнения эффективности предложенного алгоритма взято из публикаций известных авторов.

Выводы. Предложенный новый метод распознавания разных типов полных и частичных симметрий (полисимметрии, простые симметрии и антисимметрии) как в полностью, так и частично заданных булевых функциях на основе числового теоретико-множественного логического дифференцирования отличается от известных относительно простейшей практической реализацией.

Ключевые слова: *распознавание полных и частичных симметрий, булевая функция, числовое теоретико-множественное логическое дифференцирование.*