DOI https://doi.org/10.15407/usim.2019.06.021
УДК 364.2:331; 681.513

А.М. НАГІРНА, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
вул. Григорія Сковороди, 2, Київ, 04070, Україна,
naghirnaalla@ukr.netvig@irtc.org.ua

КВАДРАТИЧНА ЗАДАЧА НА МНОЖИНІ СПОЛУЧЕНЬ ТА МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянуто оптимізаційну задачу з квадратичною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями на множині сполучень. Запропоновано метод розв'язання такого класу задач. Алгоритм розв'язування враховує специфічні властивості комбінаторної множини сполучень та забезпечує знаходження оптимального розв'язку за лічені кроки. Представлено числовий приклад застосування цього методу.

Ключові слова: *оптимізація, квадратична задача, квадратична функція, множина сполучень, приріст функції цілі, приріст додаткового обмеження, опорний розв'язок, оптимальний розв'язок.*

Вступ

Дослідження задач комбінаторної оптимізації охоплює доволі широкий спектр моделей математичної кібернетики, пов'язаний з необхідністю вирішення різних важливих практичних проблем оптимального планування, управління та проектування [1–9].

При моделюванні різного роду процесів і явищ досить часто застосовуються моделі, що являють собою квадратичні задачі умовної оптимізації [10]. На особливу увагу заслуговують моделі задач, що розглядаються на комбінаторних множинах, зокрема, сполучень [11–15]. Попри простоту представлення, такої комбінаторної множини, задачі на множині сполучень, доволі часто бувають громіздкими та використовують багато ресурсів у плані обчислювальння [16–20]. Тому, виникає необхідність побудови нових методів і алгоритм розв'язання такого типу задач, зокрема, з додатковими лінійними обмеженнями.

Постановка задачі

Для постановки задачі використаємо поняття мультимножини A, яка визначається основою $S(A)$ та кратністю її елементів $k(a)$ [16, 18].

Нехай задано мультимножину $A=\{a_1,a_2,...,a_q\}$, її основа $S(A)=\{e_1,e_2,...,e_k\}$, де $e_j \in R^1$ $\forall j \in N_k=\{1,...,k\}$, і кратність елементів $k(e_j)=r_j$, $j \in N_k$, $r_1+r_2+...+r_k=q$.

Упорядкованою n-вибіркою з мультимножини A називається набір:

$$a=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\}, \quad (1)$$

де $a_{i_j} \in A$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t$ $\forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

Означення 1 [18]. Множина $E(A)$, елементами якої є n-вибірки вигляду (1) із мультимножини A, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a'=\{a'_1,a'_2,...,a'_n\}$, $a''=\{a''_1,a''_2,...,a''_n\}$ виконуються умови $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists j \in N_n : a'_j \neq a''_j\}$.

Множина всіх k-вибірок з множини $S(A)$ вигляду $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$ називають множиною k-сполучень без повторення з n різних дійсних чисел, якщо виконується умова $e_{i_1} < e_{i_2} < ... < e_{i_k}$ і позначається $C(A)$ [16,18].

Кількість точок множини сполучень знаходиться за формулою [16]:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ . \tag{2}$$

Розглянемо оптимізаційну задачу вигляду:

$$Z(\Phi, C(A)): \max\{\Phi(a) \mid a \in C(A)\}. \tag{3}$$

Будемо розглядати елементи множити сполучень як точки арифметичного евклідового простору R^n.

Нехай вектор a вигляду (1) – елемент евклідової комбінаторної множини $E(A)$. Відображення $\varphi: E(A) \to E_\phi(A) \subset R^n$ називається зануренням множини $E(A)$ в арифметичний евклідовий простір, якщо φ задає взаємно однозначну відповідність $E_\phi(A) \subset \subset R^n$ за наступним правилом: для $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}) \in E(A)$, $x = \varphi(a)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо $x_j = a_{i_j}$ $\forall j \in N_n$ [18].

При відображенні множини сполучень $C(A)$ в евклідів простір R^n сформулюємо задачу $Z(F, X)$ максимізації цільової функції $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a \in C(A)$ буде відповідати точка $x \in X$ така, що $\Phi(a) = F(x)$:

$$Z(F, X): \max\{F(x) \mid x \in X\} \tag{5}$$

з додатковими обмеженнями:

$$D = \{x \in R^n \mid Gx \le (\ge) b\}, \tag{6}$$

де $G - m \times n$ матриця, $b \in R^m$,

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i x_j. \tag{7}$$

Додаткові лінійні обмеження утворюють багатогранну множину $D \subset R^n$.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі (5)–(7).

Метод розв'язання задачі

Метод розв'язання задачі складається із трьох кроків, виконання яких приводить до знаходження максимального значення цільової функції або доведення того, що оптимального розв'язку з урахуванням додатковим обмежень не існує.

К р о к 1. Визначення приростів аргументів для кожного обмеження за формулами:

$$\Delta a_{ij} = a_{ij}, \ i = 1...n, \tag{8}$$

де $j = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$, $n \in N$;

$$\Delta a_{11} ... \Delta a_{qm} ... \Delta a_{ij} = a_{11} + ... + a_{qm} ... + a_{ij}, \tag{9}$$

де $i = 1...n$, $j = 1, ..., n$, $1 \le q \le i$, $1 \le m \le j$, $n \in N$.

К р о к 2. Знаходження опорного розв'язку. Для знаходження опорного розв'язку, користуючись визначеними приростами аргументів за формулами (8)-(9), необхідно здійснити перевірку, почергово, кожного обмеження, в наступних точка множини сполучень:

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2, ..., a_k), (a_1, a_3, ..., a_{k+1}) \\ &(a_1, a_4, ..., a_{k+2}), ..., \\ &(a_2, a_3, ..., a_{k+1}), (a_2, a_4, ..., a_{k+1}), \\ &.................................... \\ &(a_{q-1}, ..., a_{n-1}, a_n), (a_q, ..., a_{n-1}, a_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Слід зазначити, що коли не викоується одне із обмежень у точках виду (10), немає сенсу перевіряти всі інші точки, утворені шляхом зміни одного елемента в точках виду (10). Тобто, якщо $g_i(a_1, a_2, ..., a_k) \le (\ge)$ не виконується, то, відповідно, в точках $(a_1, a_2, ..., a_{k+1})$, $(a_1, a_2, ..., a_{k+2})$, ..., $(a_1, a_2, ..., a_n)$, відповідне обмеження також не виконується і ним можна знехтувати. Тоді множина допустимих розв'язків матиме вигляд:

$$Z_f = C(A) \bigcap \overline{Z}_{g_i},$$

де $\overline{Z}_{g_i}$ – сукупність точок множини сполучень, якими можна знехтувати.

Це надає можливість звузити пошук першого опорного розв'язку чи прийти до висновку, що за даних обмежень, неможливо знайти максимум цільової функції. Тоді, множина опорних розв'язків матиме наступний вигляд:

$$Z_f^{opt} = Z_{g_1} \bigcup Z_{g_2} \bigcup ... \bigcup Z_{g_i},$$

де Z_{g_1}, ..., Z_{g_i} – сукупність точок множини сполучень, що задовольняють всі обмеження.

К р о к 3. Знаходження опорного розв'язку. Якщо множина Z_f^{opt} складається з однієї точки, то дана точка і буде оптимальним розв'язком. В іншому випадку необхідно знайти приріст цільової функції, користуючись формулою:

$$\begin{aligned} \Delta F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j'' - x_j')^2 + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} (x_i'' - x_i')(x_j'' - x_j'). \end{aligned} \tag{11}$$

Якщо $\Delta F(x)$ зростає, то виникає необхідність у перевірці наступної точки множина Z_f^{opt}, в іншому випадку, пошук припиняється.

Приклад

Знайти максимальне значення цільової функції $F(x) = -0,3x_1^2 + 11x_2^2 - x_3^2 - 0,4x_1x_2 + 0,3x_1x_3 + 7x_1x_2x_3$ на множині сполучень $C(A)$, де $A = (1,2,3,\ \ 4,5,6,7)$ і C_7^3 з урахуванням таких обмежень:

$$\begin{cases} g_1 = -0,2x_1 + 9x_2 - 4x_3 \geq 16, \\ g_2 = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5, \\ g_3 = 0,4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 49, \\ g_4 = 9x_1 + 5x_2 - 6x_3 \geq 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначаємо прирости аргументу для кожного обмеження за формулами (8)-(9):

для g_1: $\Delta a_{11} = -0,2$, $\Delta a_{12} = 9$, $\Delta a_{13} = -4$, $\Delta a_{11}\Delta a_{12} = 8,8$, $\Delta a_{11}\Delta a_{13} = -4,2$, $\Delta a_{12}\Delta a_{13} = 5$, $\Delta a_{11}\Delta a_{12}\Delta a_{13} = 9,6$;

для g_2: $\Delta a_{21} = -1$, $\Delta a_{22} = -2$, $\Delta a_{23} = 3$, $\Delta a_{21}\Delta a_{22} = -3$, $\Delta a_{21}\Delta a_{23} = 2$, $\Delta a_{22}\Delta a_{23} = 1$, $\Delta a_{21}\Delta a_{22}\Delta a_{23} = 0$;

для g_3: $\Delta a_{31} = 0,4$, $\Delta a_{32} = 7$, $\Delta a_{33} = 2$, $\Delta a_{31}\Delta a_{32} = 7,4$, $\Delta a_{31}\Delta a_{33} = 2,4$, $\Delta a_{32}\Delta a_{33} = 9$, $\Delta a_{31}\Delta a_{32}\Delta a_{33} = 18,8$;

для g_4: $\Delta a_{41} = 9$, $\Delta a_{42} = 5$, $\Delta a_{43} = -6$, $\Delta a_{41}\Delta a_{42} = 14$, $\Delta a_{41}\Delta a_{43} = 3$, $\Delta a_{42}\Delta a_{43} = -1$, $\Delta a_{41}\Delta a_{42}\Delta a_{43} = 16$.

Здійснимо перевірку першого обмеження в розглянутих далі точках.

Розглянемо $g_1(1,2,3) = 5,8 < 16$. Оскільки $\Delta a_{13} = -4$, тобто $g_1(1,2,4) = 5,8 - 4 = 1,8 < 16$, то немає сенсу в перевірці точок (1,2,5), (1,2,6), (1,2,7). Отже, обмеження $g_1 = -0,2x_1 + 9x_2 - 4x_3 \geq 16$ не виконується, тому немає необхідності перевіряти всі інші три обмеження.

Для точки $g_1(1,3,4) = g_1(1,2,3) + \Delta a_{12}\Delta a_{13} = 5,8 + 5 = 10,8 < 16$. Для точки $g_1(1,3,5) = g_1(1,3,4) + \Delta a_{13} = 10,8 - 4 = 6,8 < 16$. Отже, в точках (1,3,5) і (1,3,6) $g_1 \geq 16$ виконуватися не буде.

Для точки $g_1(1,4,5) = g_1(1,3,5) + \Delta a_{12} = 6,8 + 9 = 15,8 < 16$. Оскільки $\Delta a_{13} = -4$, то немає сенсу в перевірці точок (1,4,6) і (1,4,7). Отже, обмеження $g_1 \geq 16$ не виконується.

Для точки $g_1(1,5,6) = g_1(1,4,5) + \Delta a_{12}\Delta a_{13} = 15,8 + 5 = 20,8 > 16$. Оскільки перше обмеження $g_1 \geq 16$ виконується, то здійснюємо перевірку другого обмеження для даної точки: $g_2(1,5,6) = 7 > 5$, виконується. Третє обмеження: $g_3(1,5,6) = 47,4 \leq 49$, виконується. Четверте обмеження: $g_4(1,5,6) = -2 < 7$, не виконується. Оскільки для даного обмеження $\Delta a_{43} = -6$, то немає сенсу в перевірці точки (1,5,7) та інших обмежень, вони не будуть виконуватися.

Для точки $g_1(1,6,7) = g_1(1,5,6) + \Delta a_{12}\Delta a_{13} = 20,8 + 5 = 25,8 > 16$, перше обмеження виконується. Здійснюємо перевірку другого обмеження для даної точки: $g_2(1,6,7) = g_1(1,5,6) + \Delta a_{22}\Delta a_{23} = 7 + 1 = 8 > 5$ виконується.

Третє обмеження: $g_3(1,6,7) = g_1(1,5,6) + \Delta a_{32}\Delta a_{33} = 47,4 + 9 = 56,4 > 49$, не виконується.

Для точки $g_1(2,3,4) = g_1(1,3,4) + \Delta a_{11} = 10,8 - 0,2 = 10,6 < 16$ обмеження не виконується. Оскільки $\Delta a_{13} = -4$, то немає сенсу в перевірці точок (2,3,5), (2,3,6), (2,3,7), обмеження не буде виконуватися.

Для точки $g_1(2,4,5) = g_1(1,4,5) + \Delta a_{11} = 15,8 - 0,2 = 15,6 < 16$, обмеження не виконується. Оскільки $\Delta a_{13} = -4$, то немає сенсу в перевірці точок (2,4,6,), (2,4,7), обмеження не буде виконуватися.

Для точки $g_1(2,5,6) = g_1(1,5,6) + \Delta a_{11} = 20,8 - 0,2 = 20,6 > 16$, перше обмеження $g_1 \geq 16$ виконується. Тоді здійснюємо перевірку другого обмеження для даної точки: $g_2(2,5,6) = g_2(1,5,6) + \Delta a_{21} = 7 - 1 = 6 > 5$ виконується. Третє обмеження: $g_3(2,5,6) = g_3(1,5,6) + \Delta a_{31} = 47,4 + 0,4 = 47,8 < 49$, виконується. Четверте обмеження: $g_4(2,5,6) = g_4(1,5,6) + \Delta a_{41} = -2 + 9 = 7 \geq 7$, виконується. Оскільки для четвертого обмеження $\Delta a_{43} = -6$, то немає сенсу в його перевірці в точці , воно не буде виконуватися. Відповідно, всі інші обмеження перевіряти не потрібно.

Для точки $g_1(2,6,7) = g_1(1,6,7) + \Delta a_{11} = 25,8 - 0,2 = 25,6 > 16$, перше обмеження виконується. Здійснюємо перевірку другого обмеження в даній точці: $g_2(2,6,7) = g_2(1,6,7) + \Delta a_{21} = 8 - 1 = 7 > 5$, виконується. Третє обмеження: $g_3(2,6,7) = g_3(1,6,7) + \Delta a_{31} = 56,4 + 0,4 = 56,8 > 49$, не виконується.

Для точки $g_1(3,4,5) = g_1(2,4,5) + \Delta a_{11} = 15,6 - 0,2 = 15,4 < 16$ обмеження не виконується. Оскільки $\Delta a_{13} = -4$, то немає сенсу в перевірці точок (3,4,6), (3,4,7), обмеження не буде виконуватися.

Для точки $g_1(3,5,6) = g_1(2,5,6) + \Delta a_{11} = 20,6 - 0,2 = 20,4 > 16$ перше обмеження виконується. Здійснюємо перевірку другого обмеження для даної точки: $g_2(3,5,6) = g_2(2,5,6) + \Delta a_{21} = 6 - 1 = 5 \geq 5$ виконується. Третє обмеження: $g_3(3,5,6) = g_3(2,5,6) + \Delta a_{31} = 47,8 + 0,4 = 48,2 < 49$, виконується. Четверте обмеження: $g_4(3,5,6) = g_4(2,5,6) + \Delta a_{41} = 7 + 9 = 16 \geq 7$, виконується.

Оскільки для четвертого обмеження $\Delta a_{43} = -6$, то $g_4(3,5,7) = 16 - 6 = 10 \geq 7$ виконується. Для третього обмеження $\Delta a_{33} = 2$, то $g_3(3,5,7) = 48,2 + 2 = 50,2 > 49$ не виконується.

Виконання всіх обмежень здійснюється в точках (2,5,6) і (3,5,6). Знайдемо числове значення цільової функції в точці $F(2,5,6) = 657,4$. Тоді: $\Delta F(3,5,6) = -0,3(9-4) - 0,4 \cdot 5(3-2) + 0,3 \cdot 6(3-2) = 7 \cdot 5 \cdot 6(3-2) = -1,5 - 2 + 1,8 + 210 = 208,3$. $F(3,5,6) = F(2,5,6) + \Delta F(3,5,6) = 657,4 + 208,3 = 865,7$.

Отже, $F^{\max}(3,5,6) = 865,7$.

Висновки

Розглянуто оптимізаційну задача з квадратичною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями на множині сполучень та представлено метод її розв’язання.

Запропонований метод складається із трьох кроків.

На першому кроці визначаються прирости аргументів для кожного обмеження за відповідними формулами.

Другий крок полягає у знаходженні першого опорного розв’язку на допустимій множині сполучень, що значно звужується після перевірки відповідних обмежень та знехтуванням деяких точок множини сполучень.

На третьому кроці здійснюється пошук оптимального розв’язку із точок новоутвореної множини допустимих розв’язків, користуючись формулою приросту квадратичної цільової функції.

У статті наведено числовий приклад практичного застосування методу розв’язання, із 35 точок допустимої множини сполучень було розглянуто 12 із них, та дві із 12, при знаходження оптимального розв’язку.

Подальші наукові дослідження будуть направлені на адаптацію методу для загальної множини сполучень та його використання при моделюванні певних явищ та процесів.

REFERENCES

1. Sergienko, I.V., Shilo, V.P., 2016. “Modern approaches to solving complex discrete optimization problems”. J. of Automation and Information Sciences. Vol. 48, N 1, pp. 15—24.
2. Zgurovskiy, M.Z., Pavlov, A.A., 2016. Trudnoreshayemyye zadachi kombinatornoy optimizatsii v planirovanii i prinyatii resheniy. Kiyv : Nauk. dumka, 715 p. (In Russian).
3. Colbourn, C.J., Dinitz, J.H., 2010. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. CRC Press, 2010. 784 p.
4. Korte, B., Vygen, J., 2018. Combinatorial Optimization: theory and algorithms. Heidelberg; New York: Springer. 698 p.
5. Pardalos, P.M., Du, D-Z., Graham, R.L., 2013. Handbook of combinatorial optimization. NewYork: Springer. 3409 p.
6. Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K., 2013. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola: Dover Publications. 528 p.
7. Hulianytskyi, L., Riasna, I., 2017. “Formalization and classification of combinatorial optimization problems”. Optimization Methods and Applications. Springer, New York, pp. 239—250.
8. Gulianitsky, L.F. Sergienko, I.V., 2007. “Meta-evolutionary method of deformed polyhedron in combinatorial optimization”. Cybernetics and system analysis, 44(6), pp. 70—79.

9. Pichugina, O.S., Yakovlev, S.V., 2016. “Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization”. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 52, N 6, pp. 921—930.
10. Stoyan, Y.G., Yakovlev, S.V., Parshin, O.V., 1991. Quadratic optimization on combinatorial sets in Rn. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 27, N 4, pp.562—567.
11. Yakovlev, S.V., Pichugina, O.S., 2018. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 54, N 1, pp. 99—109.
12. Stoyan,Yu.G., Sokolovskii, V.Z., Yakovlev, S.V., 1982. “Method of balancing rotating discretely distributed masses”. Energomashinostroenie, N 2, pp. 4—5.
13. Yakovlev, S.V., Grebennik, I.V., 1993. “Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization”. Cybernetics and Systems Analysis. 1993. Vol. 29, N 5, pp. 419–426.
14. Semenova, V., Kolechkina, L.N., Nagirna, A.N., 2008. “An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations.” Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 44, N 3, pp. 441—451.
15. Koliechkina, L. N., Dvirna, O. A., Nagornaya, A.N., 2014. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 59, N 4, pp. 620–626.
16. Donets, G.P., Kolechkina, L.M., 2011. “Ekstremalni zadachi na kombinatornyh konfihuratsiyah”. Poltava: RVV PUYET, 309 p. (In Ukrainian).
17. Kolechkina, L.N., Nagornaya, A.N., Semenova, V.V., 2019. “Metod resheniya zadachi uslovnoy optimizatsii na kombinatornom mnozhestve razmeshcheniy”. Problemy upravleniya i informatiki. N 4, pp. 62—72. (In Russian).
18. Stoyan, Yu. G., Yakovlev, C.V., Pichugina, O.S., 2017. Yevklidovy kombinatornyye konfiguratsii: monografiya. Kharkov : Konstanta. 404 p. (In Russian).
19. Yakovlev, S.V., 2018. “On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization”. Journal of Automation and Information Sciences. Vol. 50, N 9, pp. 38—50.
20. Yakovlev, S., Pichugina, O., Yarovaya, O., 2019. “Polyhedral spherical configuration in discrete optimization”. JournalofAutom. andInformationSci. 2019. Vol. 51, N 1, pp. 38—50.

Received 04.12.2019

ЛІТЕРАТУРА

1. *Sergienko I.V., Shilo V.P.* Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. Journal of Automation and Information Sciences. 2016, Vol. 48, N 1. P. 15–24.
2. *Згуровский М.З., Павлов А.А.* Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Київ : Наук. думка, 2016. 715 с.
3. *Colbourn C.J., Dinitz J.H.* Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. CRC Press, 2010. 784 p.
4. *Korte B., Vygen J.* Combinatorial Optimization: theory and algorithms. Heidelberg; New York : Springer, 2018. 698 p.
5. *Pardalos P.M., D-Z. Du, Graham R.L.* Handbook of combinatorial optimization. New York : Springer, 2013. 3409 p.
6. *Papadimitriou C.H., Steiglitz K.* Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola : Dover Publications, 2013. 528 p.
7. *Hulianytskyi L., Riasna I.* Formalization and classification of combinatorial optimization problems. Optimization Methods and Applications, S. Butenko et al.(eds.). Springer, New York, 2017. P. 239–250.
8. *Gulianitsky L.F. Sergienko I.V.* (2007) Meta-evolutionary method of deformed polyhedron in combinatorial optimization. Cybernetics and system analysis. 44(6): pp. 70–79.
9. *Pichugina O.S., Yakovlev S.V.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930.
10. *Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V.* Quadratic optimization on combinatorial sets in . Cybernetics and Systems Analysis. 1991. Vol. 27, N 4. P.562–567.
11. *S. V. Yakovlev, Pichugina O. S.* Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets. Cybernetics and Systems Analysis. 2018, Vol. 54, N 1. P. 99–109.
12. *Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V.* Method of balancing rotating discretely distributed masses. Energomashinostroenie. 1982. N 2. P. 4–5.
13. *Yakovlev S.V., Grebennik I.V.* Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. Cybernetics and Systems Analysis. 1993. Vol. 29, N 5. P. 419–426.
14. *Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.N.* An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations. Cybernetics and Systems Analysis. 2008, Vol. 44, N 3. P. 441–451.

15. *Koliechkina L. N., Dvirna O. A., Nagornaya A. N.* Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 59, N 4. P. 620–626.
16. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
17. *Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н., Семенов В.В.* Метод решения задачи условной оптимизации на комбинаторном множестве размещений. Проблемы управления и информатики, 2019 N 4. С. 62–72.
18. *Стоян Ю. Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С.* Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков : Константа, 2017. 404 с.
19. *Yakovlev, S.V.* On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. Journal of Automation and Information Sciences. 2018. Vol. 50, N 9. P. 38–50.
20. *Yakovlev, S., Pichugina, O., Yarovaya, O.* Polyhedral spherical configuration in discrete optimization. Journal of Autom. and Information Sci. 2019. Vol. 51, N 1. P. 38–50.

Надійшла 05.12.2019

A.N. Nahirna, PhD, Physical and mathematical, Associate Professor,
National University of "Kyiv-Mohyla Academy",
2 Skovorodast. , Kyiv, 04070, Ukraine,
naghirnaalla@ukr.net

QUADRATIC PROBLEM ON COMBINATIONS SET
AND METHOD OF ITS SOLUTION

Introduction. When modeling different kinds of processes and phenomena in different spheres of activity, models that represent quadratic problems of conditional optimization are quite often used. Particularly noteworthy are models of such problems considered on combinatorial sets, in particular, combinations. Despite the simplicity of presentation, this type of problem are cumbersome, from a computational point of view. Therefore, there is a need to build new methods and an algorithm for solving them.

Purpose. The purpose of this article is to present a method for solving a quadratic problem with additional constraints on many combinations. This method allows for a finite number of steps to find the optimal solution of the formulated problem. The use of this method is shown in the numerical example.

Methods. Methods for solving a problem with a quadratic objective function on combinations set.

Results. An optimization problem on a combinatorial set of combinations with a quadratic objective function and additional constraints is formulated. The method of its solution is proposed, which consists in finding the basic solutions, using the properties of multiple combinations, as well as finding the increments of constraints and function of the goal. An example of solving a problem using the proposed method is presented.

Conclusion. The proposed method can be used to solve conditional optimization problems with a quadratic objective function on a combinatorial set of combinations.

Keywords: *optimization, quadratic problem, quadratic function, set combinations, increment of goal function, increment of additional constraint, reference solution, optimal solution.*

Нагорная А.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент,
Национальный университет «Киево-Могилянская академия»,
ул. Г. Сковороды, 2, м. Киев, 04070, Украина,
E–mail: naghirnaalla@ukr.net

КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА НА МНОЖЕСТВЕ СОЧЕТАНИЙ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Введение. При моделировании различного рода процессов и явлений в разных сферах деятельности, довольно часто применяются модели, представляющие собой квадратичные задачи условной оптимизации. Особого внимания заслуживают модели таких задач, рассмотренных на комбинаторных множествах, в частности, сочетаний. Несмотря на простоту представления, задачи данного типа являются громоздкими с вычислительной точки зрения. Поэтому возникает необходимость в построении новых методов и алгоритмов решения.

Целью данной статьи является представленит метода решения квадратичной задачи с дополнительными ограничениями на множестве сочетаний. Данный метод позволяет за конечное число шагов найти оптимальное решение сформулированной задачи. Использование данного метода показано на числовом примере.

Методы. Метод решения задачи с квадратичной функцией цели на множестве сочетаний.

Результаты. Сформулирована оптимизационная задача на комбинаторном множестве сочетаний с квадратичной функцией цели и дополнительными ограничениями. Предложен метод ее решения, который заключается в нахождении опорных решений с использованием свойств множества сочетаний, а также приростов ограничений и функции цели. Представлен пример решения задачи с использованием предложенного метода.

Выводы. Предложенный метод можно использовать для решения задач условной оптимизации с квадратичной функцией цели на комбинаторном множестве сочетаний.

Ключевые слова: *оптимизация, квадратичная задача, квадратичная функция, множество сочетаний, прирост функции цели, прирост дополнительного ограничения, опорное решение, оптимальное решение.*