DOI https://doi.org/10.15407/csc.2020.06.021
UDC 514.18

IU.V. SYDORENKO, PhD technical, assistant professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
suliko3@ukr.net

M.V. HORODETSKYI, student, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
gorodetskiiy@i.ua

MODIFICATION OF THE ALGORITHM FOR SELECTING A VARIABLE PARAMETER OF THE GAUSSIAN INTERPOLATION FUNCTION

The paper presents an algorithm for selecting the optimal value of the variable parameter α of the Gaussian interpolation function to obtain the smallest possible error when interpolating the tabular data. The results of the algorithm are checked on a sample of elementary mathematical functions. For comparison, the interpolation data of the Lagrange polynomial are given. The paper presents the results of Gaussian interpolation at different α, conclusions are made about the need to applying the algorithm for selecting of its optimal value.

Keywords: *interpolation, Gaussian interpolation function, variable coefficient, modification of parameter selection, interpolation error.*

Introduction

Nowadays, such powerful companies, as Microsoft, Google, Amazon and others, as well as scientists-researchers are quite active in processing large amounts of information. In the process of working with the data obtained during the research, there is a construction of geometric shapes by plotting approximate curves at given points. There are many methods to solve this problem: from classical polynomials to different types of splines of any order. One method of data densification is to build an interpolation function based on exponential reference functions, which have a number of advantages, namely, for example, resistance to small changes in the input data. This means that the greater the distance from the points where the changes occurred, the smaller the deviation. But when working with this method, it turned out that in some areas interpolation gives large miscalculations.

Testing was performed on elementary mathematical functions with different data: step, number of nodes, non-uniformity of nodes, etc. When analyzing the obtained results and mathematical apparatus, it became clear that these errors can be avoided by influencing the variable parameter that is present in the formula. To illustrate the results, software was created that allowed the analysis of the proposed modification of the Gaussian interpolation function.

Analysis of Recent Research

To obtain an analytical form of curved lines, which are given by a point framework, different methods of interpolation can be implemented: piecewise linear, polynomial interpolation, least squares method [1, 2], rational curves, splines [3–6], statistical methods [7–10], and others. These methods are used to restore (generate) objects at specified points in the frame.

The classical theoretical methods for solving interpolation problems are Lagrange and Newton polynomials. In practice, splines are more often used: first degree, parabolic splines, cubic, Hermitian and others. Nonlinear splines are used in solving technical problems.

Splines are also used to solve spatial interpolation problems. For example, in [3] the method of modeling of isotropic curves according to the Pythagorean hodograph (PH-curves) using quaternions in the space R^4 is covered.

However, when modeling with splines there is a significant drawback — the appearance of oscillations. This necessitates the analysis of simulated contours for the sign of curvature, analysis for the presence of inflection points and the selection of segments of the convexity of the curves.

Likewise, it is not possible to interpolate curves with vertical tangents using the splines discussed above.

In addition to polynomial and spline methods, interpolation can be performed using exponential functions [7]. For example, methods using the normal Gaussian curve [8].

In this paper, we consider the problem of modifying the Gaussian interpolation function to reduce the calculation error.

The Gaussian Interpolation Function Modification

There are many methods of interpolation, each of which has its own drawbacks. A separate group of methods is Gaussian interpolation. The purpose of the study is to reduce the Gaussian interpolation error by creating an algorithm for automatic selection of the variable parameter α and creating software to study the properties of Gaussian interpolation methods.

The formula of the interpolatory Gaussian function has the form [7]:

$$G(x)=\tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2}+\tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2}+\ldots+\tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

From a geometric point of view, we have the sum of support functions (Gaussian), which are built in each interpolation node, as shown in Fig. 1.

To obtain an analytical record of the Gaussian interpolation function, it is necessary to find the values $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ that are the vertices of the

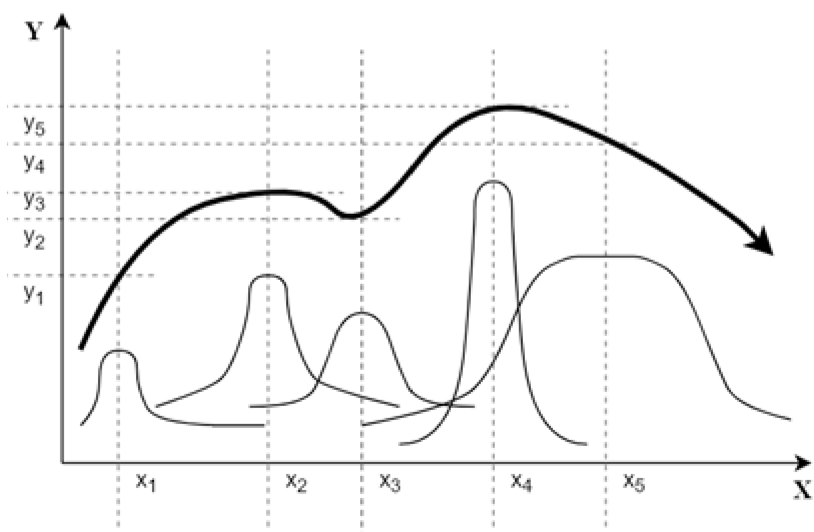

Fig. 1. Geometric interpretation of the Gaussian interpolation function

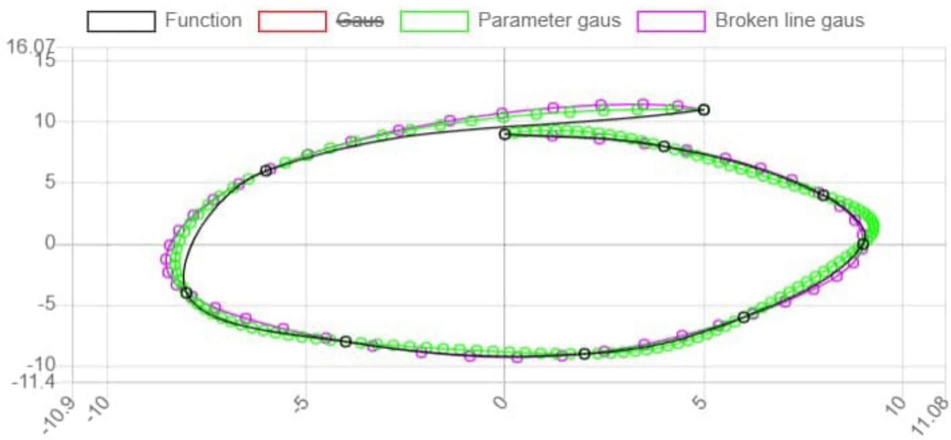

Fig. 2. Parametric and total Gaussian functions

support Gaussians. To do this, we need to solve a linear system of equations of the following form:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x_1-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x_1-x_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x_1-x_n)^2} = y_1, \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x_2-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x_2-x_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x_2-x_n)^2} = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x_n-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x_n-x_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x_n-x_n)^2} = y_n. \end{cases}$$

This system can be solved by any method of solving systems of linear algebraic equations. On the diagonal of the unit matrix, the matrix is also symmetric with respect to the main diagonal. After solving, we obtain the analytical Gaussian interpolation function.

The parameterization of the Gaussian function [8] is performed as follows. Write the variables through the parameter t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

we obtain two Gaussian functions with respect to x and y:

$$x(t) = \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t-t_2)^2} + \ldots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t-t_n)^2},$$

$$y(t) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t-t_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t-t_n)^2}.$$

There are two approaches to providing values of the parameter t. If t takes the value 0, 1, ..., n—1, then the function is called parametric; and if t is equal to the total length of the polyline, then such a Gaussian function is called total.

Parameterization of the Gaussian interpolation function allows interpolation not only of unambiguous functions, when one x corresponds to only one value of y, but also in the case of closed curves, spirals and others (Fig. 2). The parametric function gives the best results when the interpolation step is constant, and the total function — when the step is uneven.

The parameter α is present in the analytical notation of the Gaussian interpolation function. A priori it takes the value

$$\alpha = \frac{\pi(n-1)}{(x_{\max} - x_{\min})^2},$$

where n is the number of interpolation nodes, $x_{\max}$, $x_{\min}$ — the maximum and minimum value of the argument x.

With the help of the created software system the results of interpolation by Gaussian functions for various elementary mathematical functions were obtained. For example, Fig. 3 presents the results for the function ln(x) with an uneven interpolation step:

The interpolation errors in this case were:

Lagrange polynomial: 1788,0239165818600000,

Normal Gaussian function:

0,0828547075307030,

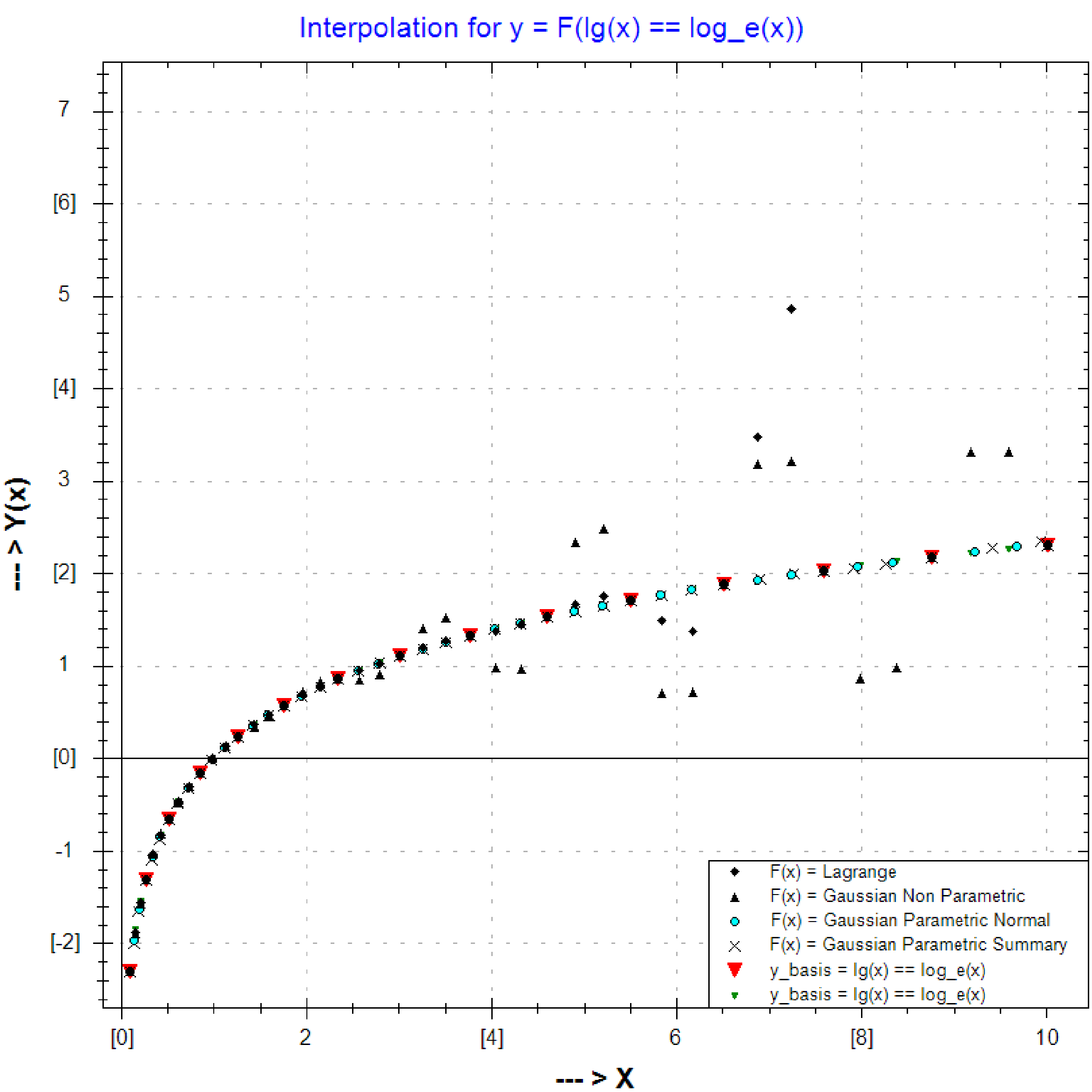

Fig.3. Gaussian interpolation of the function ln(x)

Parametric Gaussian function: 0,0001405535256958,
Total Gaussian function: 0,0002856116228337.

Optimization of Gaussian Interpolation Methods

To reduce the interpolation error, it is proposed to change the value of the parameter α and find its optimal value.

The operation of algorithms of different Gaussian interpolation methods can be optimized by arbitrarily changing the values of the variable parameter α. The value of this parameter can be inputted manually or using the scrolling function implemented in the system. Thus it is possible to influence the magnitude of the error for each of the Gaussian methods. It should be noted that for different functions the value of the optimal (in terms of error) parameter will be different.

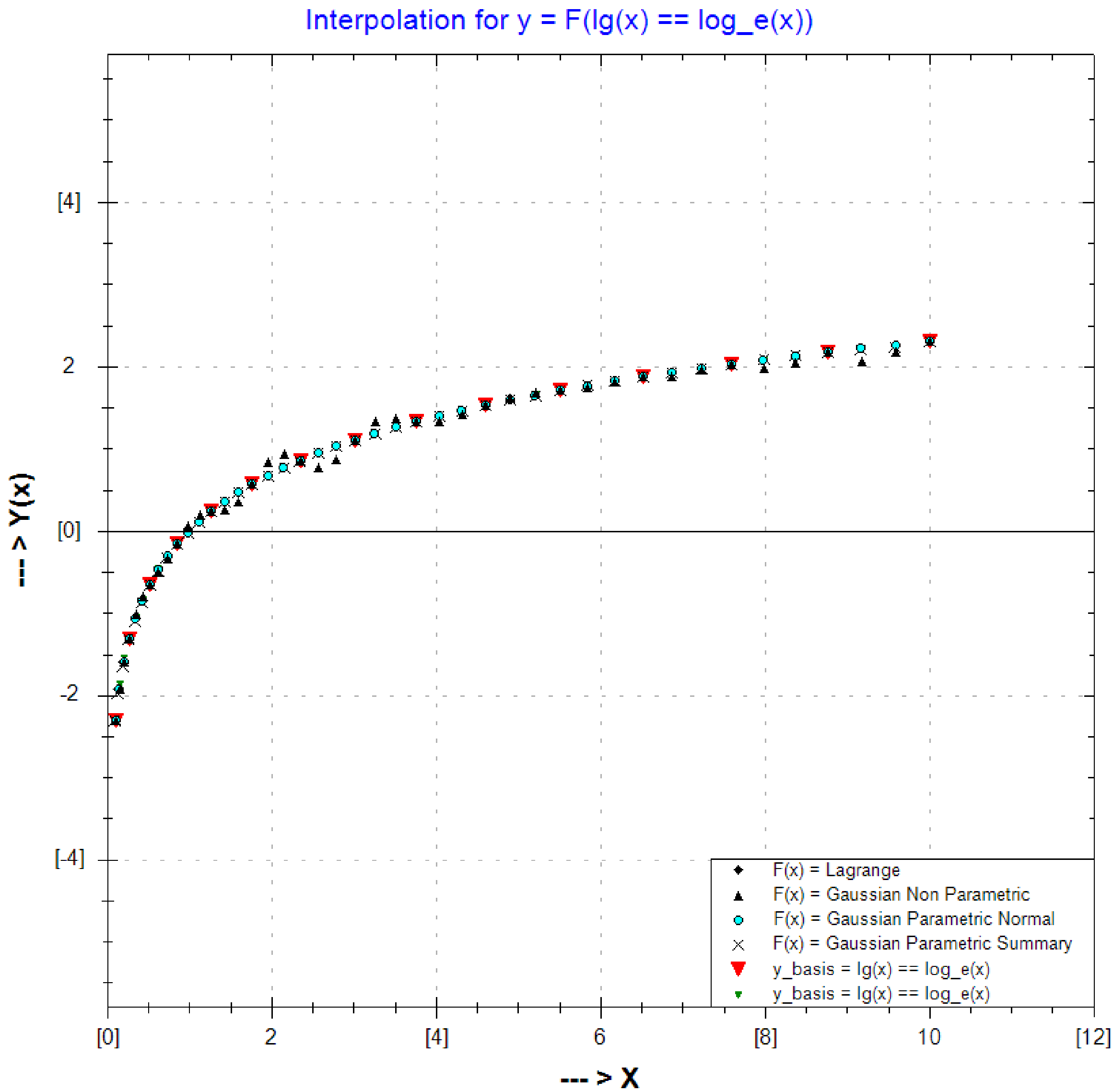

Fig. 4. Modified Gaussian interpolation of the function ln(x)

For many practical problems, the errors obtained are not unacceptable, but in some cases it is necessary to obtain more accurate results when the difference of 0,001 for the error is significant. In this case, it makes sense to input the maximum allowable error value α, and use a modified algorithm to obtain the optimal value of the variable parameter.

Since a computer experiment showed that α usually takes values from 0 to 1, a modified algorithm was created as follows:

1. The value of α increases from 0 to 1 with steps of 0,1.

2. At each step, the maximum deviation (sum of deviations) is calculated at two points of each interpolation segment.

3. We obtain a segment of values of α, on which the sum of deviations takes the smallest value.

4. On the obtained segment we reduce the increment of the values of α. For example, it will now be 0,01.

5. The process ends when the sum of the two deviations of each segment in this step does not exceed the previous sum by more than ε.

6. The result is the last amount divided in half.

The result of the algorithm will be the error at the optimal value of α. It should be noted that the selection of interval α, the increment value, and the value of ε can be changed, depending on the conditions of the objective.

With the help of this algorithm it was possible to obtain the errors of all three Gaussian interpolation functions. The results are shown in Fig. 4.

After modification, the interpolation errors are:

Normal Gaussian function 0,0017184070212567,

Parametric Gaussian function 0,0000565851388933,

Total Gaussian function 0,0001835633920919.

The figure shows that the error has decreased for all three methods. For example, for a normal Gaussian function, the error is reduced in 50 times.

Conclusions

In the case when oscillations occur during interpolation by classical polynomial methods and splines, it makes sense to use exponential interpolation methods, namely, Gaussian methods: ordinary and parametric. To reduce the interpolation error by Gaussian methods, it is necessary to change the parameter α. This can be done both manually, selecting the desired value, and using a modified searching algorithm of the optimal variable parameter. A number of experiments were performed using the created software system, which proved the feasibility of using this algorithm. To clarify the received results examples of the system work are presented.

REFERENCES

1. Turchak, L.I., 1997. Basic numerical methods [Osnovy chyslennykh metodov], Science, Moscow, 320 p.
2. Lukianenko, S.O., 2007. Numerical methods in computer science [Chyselovi metody v informatytsi], Teaching manual, Kyiv, 140 p.
3. Ausheva, N.M., Melnyk O.V., Homov V.V., 2017. “Modeling of PH-curves in the form of a fundamental spline”, Modern problems of modeling. Part 3 [“Modeliuvannia PH-kryvykh u vyhliadi fundamentalnoho splainu”], MSPU B. Khmelnitsky, Melitopol, pp. 20–25.
4. Badayev, Yu.I., Blindaruk A.O., 2014. “Computer realization of curvilinear contours design by means of higher orders NURBS technology”, Modern problems of modeling. Part 3 [“Kompiuterna realizatsiia proektuvannia kryvoliniinykh obvodiv proektuvannia kryvoliniinykh obvodiv metodom NURBS — tekhnolohii vyshchykh poriadkiv”], MSPU B. Khmelnitsky, Melitopol, pp. 3–6
5. Badayev, Yu.I., Isaienko, S.A., 2012. “NURBS-interpolation on the bases of the arcuate guide curve”, Applied geometry and engineering graphics: interdepartmental scientific and technical collection [“NURBS-interpoliatsiia na osnovi duhopodibnoi napravliaiuchoi kryvoi”], KNUBA, Kyiv, pp. 55–59.
6. Parkhomenko, O.V., Badayev, Yu.I., 2012. “Use of NURBS-technologies of the 4th and 5th degrees”, Collection of abstracts of the 16th sciences: conference teachers and students [“Vykorystannia NURBS-tekhnolohii 4-ho ta 5-ho stepeniv”], KDAVT, Kyiv, pp. 28.
7. Badayev, Yu.I., Sydorenko, Yu.V., 1998. “Realization of the interpolation method of Gaus-function and analytical analysis”, Applied geometry and engineering graphics [“Realizatsiia interpoliatsiinoho metodu Gaus-funktsii ta porivnialnyi analiz “], KNUCA, Kyiv, pp. 33–37.
8. Sydorenko, Yu.V., 2014. “Parametric interpolation Gaus function”, Computer modeling in chemistry, technologies and steel development systems, Collection of scientific articles of the Fourth international scientific and practical conference [“Parametrychna interpoliatsiina funktsiia Gausa”], Igor Sikorsky NTUU KPI, Kyiv, pp. 67–73.

9. Sydorenko, Yu.V., Horodetskyi, M.V., 2019. “Variants of the Gaussian interpolation function “, 17th international scientific and practical conference of young scientists and students: Modern problems of scientific support of energy [Varianty interpoliatsiinoi funktsii Gausa], Igor Sikorsky NTUU KPI, Kyiv, p. 87.
10. Sydorenko, Yu.V., Horodetskyi, M.V., 2020. “Analysis of Gaussian interpolation function algorithm on elementary algebraic functions”, Modern problems of modeling, [“Analiz roboti algoritmu interpolyacijnoї funkcії Gausa na elementarnih algebrichnih funkciyah»], MSPU B. Khmelnitsky, Melitopol, pp. 138–145.

Received 16.11.2020

ЛІТЕРАТУРА

1. Турчак Л. И. Основы численных методов. Л. И. Турчак. М. : Наука, 1997. 320 с.
2. Лук’яненко С.О. Числові методи в інформатиці: Навч. посіб. К.: НТУУ «КПІ», 2007. 140с.
3. Аушева Н.М., Мельник О.В., Гомов В.В. Моделювання PH-кривих у вигляді фундаментального сплайну. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. Праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В.Найдиш. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. Вип.8. С.20-25.
4. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів проектування криволінійних обводів методом NURBS - технологій вищих порядків. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. МДПУ. Мелітополь, 2014. С. 3–6
5. Бадаєв Ю.І., Ісаєнко С.А. NURBS — інтерполяція на основі дугоподібної направляючої кривої. Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип.89. К.:КНУБА, 2012. С. 55-59.
6. Пархоменко О. Використання NURBS-технологій 4-го та 5-го степенів. О. Пархоменко, Ю.І. Бадаєв. Збірник тез 16-ї наук.-мет. конф. викладачів, аспірантів та студентів. К.: КДАВТ, 2012. С. 28.
7. Бадаев Ю.И., Сидоренко Ю.В. Реалізація інтерполяційного методу Гаус-функції та порівняльний аналіз [Текст]. Прикладна геометрія та інженерна графіка К.:КДТУБА, 1998, вип.63. С.33–37.
8. Сидоренко Ю.В. Параметрична інтерполяційна функція Гауса [Текст]. Компютерне моделювання в хімії, технологіях і системах сталого розвитку - КМХТ-2014: Збірник наукових статей Четвертої міжнар. наук.- прак. конф. Київ:НТУУ «КПІ», 2014. С.67–73.
9. Городецький М.В., Сидоренко Ю.В. Варіанти інтерполяційної функції Гауса. Сучасні проблеми наукового забезпечення енергетики: Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених та студентів, м. Київ, 23–26 квітня 2019 р. У 2х т. К.: «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. 2. С.87
10. Сидоренко Ю.В., Городецький М.В. Аналіз роботи алгоритму інтерполяційної функції Гауса на елементарних алгебричних функціях. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2020. Вип.19. С.138–145.

Надійшла 16.11.2020

Ю.В. Сидоренко, кандидат технічних наук, доцент,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, Україна,
suliko3@ukr.net

М.В. Городецький, студент,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, Україна,
gorodetskiiy@i.ua

МОДИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ ВИБОРУ ВАРІАТИВНОГО ПАРАМЕТРА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУСА

Вступ. Одним з методів загущення даних є побудова інтерполяційної функції на основі експоненційних опорних функцій, які мають ряд переваг, а саме, наприклад, стійкість до невеликих змін вхідних даних. При роботі з цим методом виявилось, що уникнути небажаних похибок можна за рахунок впливу на варіативний параметр, який присутній в формулі. Наводиться алгоритм вибору оптимального значення варіативного параметра α інтерполяційної функції Гауса для отримання найменшої похибки при інтерполяції табличних даних. Результати роботи алгоритму перевіряються на виборці елементарних математичних функцій.

Метою дослідження є зменшення похибки Гаус-інтерполяції за рахунок побудови алгоритму автоматичного підбору варіативного параметра α та створення програмного забезпечення для вивчення властивостей методів Гаус-інтерполяції.

Результати. На основі аналізу роботи методів Гауса було побудовано модифікований алгоритм розрахунку оптимального значення варіативного параметра α, наводяться результати Гаус-інтерполяції при різних α, зроблено висновки щодо необхідності застосування алгоритму в залежності від умов поставленої задачі.

Висновок. У випадку, коли при інтерполяції класичними поліноміальними методами та сплайнами виникають осциляції, є сенс використовувати методи експоненційної інтерполяції, а саме, методи Гауса: звичайний та параметричні. Для зменшення похибки інтерполяції методами Гауса необхідно змінювати параметр α. Це можна робити як вручну, підбираючи необхідне значення, так і за допомогою модифікованого алгоритму пошуку оптимального варіативного параметру. Було проведено низку експериментів за допомогою створеної програмної системи, які довели доцільність використання цього алгоритму. Для наочності отриманих результатів у статті наведено приклади роботи системи.

***Ключові слова**: інтерполяція, інтерполяційна функція Гауса, варіативний коефіцієнт, модифікація вибору параметра, похибка інтерполяції.*