DOI https://doi.org/10.15407/csc.2023.04.003
UDC 519.816

Н.К ТИМОФІЄВА, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, 03187, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 40, Україна,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0312-1153,
tymnad@gmail.com

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Описано деякі властивості задач комбінаторної оптимізації, які впливають на закономірність зміни значень цільової функції незалежно від вхідних даних. Показано, що ця закономірність залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій, певної структури вхідної інформації та від транспозиції елементів перестановки. В задачах, які розв'язуються на перестановках і підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій клас цільової функції визначається в залежності від їхнього впорядкування та структури вхідних даних.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, комбінаторна конфігурація, цільова функція, транспозиція, задача комівояжера, задача про призначення, задача кластеризації.*

Вступ

Задачі комбінаторної оптимізації — перебірні та за складністю обчислень є NP—повними. Тому для їхнього розв'язання використовують способи, що ґрунтуються на частковому переборі варіантів або на розпізнаванні структури вхідної інформації. У відомих методах розроблено процедури, які дозволяють розбивати множину значень цільової функції на підмножини з наступним виключенням тих, які не містять оптимального розв'язку [1—3]. Попри те, що таке розбиття для різних підходів є різним і не ґрунтується на строгих законах, постає запитання: з якою властивістю пов'язане таке розбиття. Для пояснення цього явища опишемо деякі властивості задач комбінаторної оптимізації, від яких залежить закономірність зміни значень цільової функції незалежно від вхідних даних, які її визначають. Задача, поставлена в статті, полягає у дослідженні цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації та виявленні параметрів, за яких вхідні дані не впливають на закономірність зміни значень цільової функції.

Розроблено підхід для виявлення параметрів, за яких вхідні дані не впливають на закономірність зміни значень цільової функції. Цей підхід полягає в аналізі цієї закономірності від упорядкування перестановок, транспозиції її елементів, структури вхідної інформації. Також в статті досліджується зміна значень цільової функції від структури її аргументу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

У комбінаторній оптимізації є багато робіт, де досліджують зміну значень цільової функції в залежності від особливої структури вхідної інформації. Ці дослідження пов'язано з виокремленням підкласів розв'язних задач, переважно в задачі комівояжера. Наприклад, відомі такі матриці, як матриця Супніка, Кальмансона, Демиденка, Монжа. У роботі

[3] досліджено різні підкласи розв'язних задач для задачі комівояжера та узагальнено різні структури, для яких цільова функція змінюється однаково.

Є методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації, наприклад, метод вектора спаду [4], динамічне програмування [5, 6], в яких цільова функція обчислюється рекурентно, тобто на кожній ітерації в результаті обчислень змінюють лише ті значення, які змінилися в залежності від транспозиції елементів у перестановці. Але аналіз цієї властивості щодо зміни значень цільової функції від параметрів, незалежних від вхідної інформації в літературі, як правило, не розглядають.

Підхід, що пропонується

Для виявлення параметрів, за яких вхідні дані не впливають на закономірність зміни значень цільової функції, здійснюється аналіз цієї закономірності від упорядкування перестановок, від транспозиції її елементів, від структури вхідної інформації. Також досліджується зміна значень цільової функції від структури її аргументу (структури комбінаторних множин).

Математична постановка задачі комбінаторної оптимізації

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад $A=\{a_1,...,a_n\}$ та $B=\{b_1,...,b_{\tilde{n}}\}$, елементи яких мають будь-яку природу [7]. Назвемо ці множини *базовими*. Є два типи задач. У *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвімо вагами. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними і задамо їх матрицями. У *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків немає, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1 ,..., n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох базових множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні певних обмежень.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A=\{a_1 ,..., a_n\}$ [7]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k (в подальшому η позначатимемо і як η^k), $W=\{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій, k – порядковий номер w^k в упорядкованій множині W, $k \in \{1,...,q\}$, q – кількість w^k у W. Комбінаторну конфігурацію позначатимемо як з верхнім індексом w^k, так і без індексу w^k.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за якими з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозицією та арифметичним [7].

Означення 1. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k=(w_1^k,...,w_{\eta^k}^k)$ та $w^i=(w_1^i,...$ $...,w_{\eta^i}^i)$ назвемо *ізоморфними*, якщо $\eta^k=\eta^i$, $k \neq i$, $i \in \{1,...,q\}$.

Означення 2. Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Множина W упорядковується підмножинами ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Якщо комбінаторні конфігурації множини W утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами, то вони можуть бути як ізоморфними, так і неізоморфними, а W упорядковано підмножинами $W_\eta \subset W$.

Оскільки операція транспозиції у перестановці змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Множина комбінаторних конфігурацій того самого типу має безліч впорядкувань. Їхня кількість для різних типів є різною.

Моделювання вхідних даних функціями натурального аргументу

Для задання цільової функції в явному вигляді та зведення її до одного виразу для різних класів задач комбінаторної оптимізації вхідні дані змоделюймо скінченними послідовностями. Для першого типу задач подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією

$$\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \dots$$
$$\dots, \beta_m(f(m), w^k)),$$

а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C і $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ і C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\,\tilde{n}$).

Функцію цілі запишемо як

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j). \quad (1)$$

Наведімо приклади задач комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка та розбиття n-елементної множини на підмножини.

Задача про призначення. Задано n посад і n претендентів на ці посади. Призначення претендента на t-у посаду приводить до затрат c_{st}, $(s, t = 1, 2, \dots, n)$. Необхідно розподілити претендентів по посадах так, щоб сумарні втрати були мінімальними. При цьому кожного претендента можна призначити лише на одну посаду і кожна посада може бути занята лише одним претендентом.

Задача комівояжера. Задано n міст, відстань між якими відома. Координати входу та виходу кожного міста збігаються. Необхідно знайти найкоротший шлях, який проходить через усі міста один раз і повертається в початковий пункт.

Задача розміщення одногабаритних модулів. На друкованій платі з регулярною сіткою, яка виконує роль посадочних місць, задану множину модулів, що мають між собою зв'язки, необхідно розмістити в такий спосіб, щоб сумарна довжина зв'язків була б мінімальною.

Задача кластеризації. Ця задача виникає в розпізнаванні та класифікації і полягає в упорядкуванні заданих об'єктів у порівняно однорідні групи, тобто за розробленими правилами здійснюється оптимальне розбиття базової множини A на підмножини.

Залежність цільової функції від транспозиції елементів перестановки

Уведемо системи комбінаторних функцій H і H', де $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, що утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$; $\beta'(f(j), w'^t)|_1^m \in H'$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^t \in W'$, що утворена з елементів базової множини $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta'(f(j), w'^1)|_1^m$, де w^1, w'^1 – перші перестановки в W, W', то $H \subset H'$.

Якщо аргумент комбінаторної функції – перестановка, то наступна функція $\beta(f(j), w^{k+1})|_1^m$ (або $\beta(f(j), w^{'i+1})|_1^m$) утворюється з попередньої $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ (або $\beta(f(j), w^{'i})|_1^m$) рекурентним комбінаторним оператором транспозиції. Якщо w^k – розбиття множини на підмножини або вибірки, то $\beta(f(j), w^{k+1})|_1^m$ (або $\beta(f(j), w^{'i+1})|_1^m$) утворюється за правилами генерування цих комбінаторних об'єктів.

Дві комбінаторні функції $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\beta(f(j), w^i)|_1^m$ (або $\beta(f(j), w^{'k})|_1^m$ і $\beta(f(j), w^{'i})|_1^m$) назвемо нетотожними, якщо кількість значень у кожній з них є різною, а якщо вона є однаковою, то вони відрізняються між собою хоча б одним значенням $\beta_j(f(j), w^k)$ та $\beta_j(f(j), w^i)$ (або $\beta_j(f(j), w^{'k})$ та $\beta_j(f(j), w^{'i})$) чи їхнім порядком розміщення в цих послідовностях.

Добутком комбінаторної $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \ldots, \beta_m(f(m), w^k))$ та і числової $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), \ldots, \varphi(m))$ функцій назвімо комбінаторну функцію $\overline{F}(w^k, j)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k)\,\varphi(1), \ldots, \beta_m(f(m), w^k)\,\varphi(m))$. Суму значень цієї функції позначимо $F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j))$.

Якщо перші комбінаторні функції упорядкованих систем H і H' $\beta(f(j), w^1)\beta_1^m = \beta(f(j), w^{'1})|_1^m$, а $w^1, w^{'1}$ – комбінаторні конфігурації одного типу і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m \in H'$, то H і H' містять тотожні функції, а $H \subset H'$.

Нехай $H^* = (\beta^*(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1^*(f(1), w^k), \ldots, \beta_m^*(f(m), w^k)))$ систему комбінаторних функцій, де w^k – перестановка, обернена до w^i, $w^k, w^i \in W$. Оберненою (або інверсною) до перестановки $w = (1, 2, \ldots, n-1, n)$ назвімо перестановку $\tilde{w} = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$, тобто $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$ симетричні одна відносно другої.

Лема 1. Якщо w^k – перестановка, обернена до w^i, то для функцій $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ та $\beta^*(f(j), w^1)|_1^m \in H^*$ знайдуться такі $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$ і $\beta^*(f(j), w^i)|_1^m \in H^*$, для яких виконується рівність

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\,\beta_j^*(f(j), w^1) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^1)\,\beta_j^*(f(j), w^i).$$

Доведення леми 1 наведено в [7].

Наслідок 1. У задачах комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції яких є перестановка, комбінаторною функцією може бути будь-яка із двох скінченних послідовностей, якими задаються вхідні дані.

Визначимо зміну значень цільової функції для системи комбінаторних функцій залежно від транспозиції [7]. Нехай $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1, \ldots, m)$, а $\varphi(j)|_1^m = (1, \ldots, m)$, $w^{'1} \in W'$. Комбінаторну функцію $\beta(f(j), \tilde{w}^{'k})|_1^m = (m, \ldots, 1)$, $\tilde{w}^{'k} \in W'$ назвемо інверсією функції $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1, \ldots, m)$, де перестановка $\tilde{w}^{'1} f = (1, \ldots, m)$ є інверсною до $w^{'k} = (m, \ldots, 1)$.

Запишимо цільову функцію в такому вигляді

$$F(w^{'k}) = \sum_{j=1}^{m} (\beta_j(f(j), w^{'k}) + \varphi(j)), \tag{2}$$

$$F(w^{'k}) = \sum_{i=1}^{k}\sum^{m} \beta_j(f(j), w^{'k})\varphi(j). \tag{3}$$

Лема 2. Значення цільової функції (2) для всіх $m!$ перестановок $w^{'k}$ однакове. Якщо $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1, \ldots, m)$, а $\varphi(j)|_1^m = (1, \ldots, m)$, то

$$F(w^{'k}) = \sum_{j=1}^{m} (\beta_j(f(j), w^{'k}) + \varphi(j)) = \sum_{j=1}^{m} 2j = m(m+1).$$

Доведення. Для будь-якої перестановки $w^{'k} \in W'$ значення цільової функції

$$F(w'^k) = (1+2+\ \dots\ + m-1+m) + (1+2+\dots+m-1+m) =$$

$$= \frac{2m\,(m+1)}{2} = \ (m+1),$$

що і доводить лему 2.

Комбінаторні функції, аргументом яких є перестановка, утворюються рекурентним комбінаторним оператором транспозиції. Розглянемо, як змінюється цільова функція (3) залежно від транспозиції значень $\beta_j(f(j), w'^k)$ комбінаторної функції $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$.

Дві транспозиції $\alpha(w_l^k, w_t^k)$ та $\alpha(w_r^k, w_s^k)$ назвемо незалежними, якщо всі елементи в них мають різні значення. Відповідно, дві транспозиції функції $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$ – є незалежними, якщо значення цієї функції в них є різними.

Означення 3. Дефіцитом функції $\beta(f(j), w'^{k+1})|_1^m$ відносно транспозиції назвемо величину $\varepsilon(w'^k) = \Big|\beta_r(f(r), w'^k) - -\beta_s(f(s), w'^k)\Big|$, які операцією транспозиції $\alpha(w_r'^k, w_s'^k)$ помінялися місцями в $\beta(f(j), w'^{k+1})|_1^m$.

Дефіцитом функції $\varphi(j)|_1^m$ відносно транспозиції назвімо величину $\varepsilon' = = |\varphi(j) - \varphi(s)|$, $\varphi(j)$, $\varphi(s)$ якої перемножуються на значення $\beta_j(f(r), w'^k)$, $\beta_s(f(s), w'^k)$ функції $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$.

Лема 3. Якщо функцію $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$ утворено операцією транспозиції $\alpha(w_r'^k, w_l'^k)$ із функції $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1,\dots,m)$ або із $\beta(f(j), \tilde{w}'^k)|_1^m = (m,\dots,1)$, то дефіцит транспозиції цих функцій дорівнює $\varepsilon(w'^1) = \varepsilon'$, $(\varepsilon(\tilde{w}'^k) = \varepsilon')$.

Доведення є очевидним.

Теорема 1. Якщо у функції $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = = (1,\dots,m)$ провести транспозицію двох значень $\beta\ (f\ (r), w'^1)$, $\beta_s(f(s), w'^1)$, то $F(w'^k)$ для одержаної перестановки $w'^k \in W'$ дорівнює

$$F(w'^k) = F(w'^1) - (\varepsilon\,(w'^1))^2. \qquad (4)$$

Доведення. Запишемо $F(w'^1) = 1 + \dots + r^2 + \dots$ $\dots + s^2 + \dots + m^2$, а $F(w'^k) = 1 + \dots + r\,s + \dots + s\,r + \dots + m^2$. Із цих виразів видно, що в $F(w'^k)$ по відношенню до $F(w'^1)$ змінилися два значення, для яких є справедливою нерівність

$$r^2 + s^2 > rs + sr. \qquad (5)$$

Згідно з лемою 3, $\varepsilon(w'^1) = \varepsilon' = |r - s|$, $r > s$. Запишімо $r = s + \varepsilon(w'^1)$, $s = r - \varepsilon(w'^1)$. Підставимо у праву частину виразу (5) значення s і r:

$$s(s + \varepsilon(w'^1)) + r(r - \varepsilon(w'^1)) = s^2 + r^2 -$$

$$- \varepsilon(w'^1)(r - s) = s^2 + r^2 - (\varepsilon(w'^1))^2.$$

В результаті нерівність (5) набуде вигляду $s^2 + r^2 > s^2 + r^2 - (\varepsilon(w'^1))^2$.

Із цього випливає, що величина функції $F(w'^k)$ по відношенню до значення $F(w'^1)$ зменшується на $(\varepsilon(w'^1))^2$, що і доводить теорему 1.

Наслідок 2. Якщо функцію $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$ утворено з $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1,\dots,m)$ кількома незалежними транспозиціями $\alpha(w_r'^1, w_l'^1)$, а $\varphi(j)|_1^m = (1,\dots,m)$, то значення функції цілі $F(w'^k)$ зменшується по відношенню до $F(w'^1)$ на $\sum_{i=1}^{\varsigma} (\varepsilon_i(w'^1))^2$, $\varsigma \le \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ – кількість незалежних транспозицій.

Наслідок 3. Якщо у функції $\beta(f(j), \tilde{\omega}'^k)|_1^m = = (m, \dots, s, \dots, j, \dots, 1)$ провести транспозицію двох значень r, s, то значення функції цілі (3) для нової функції $\beta(f(j), w'^i)|_1^m = = (m, \dots, r, \dots, s, \dots, 1)$ дорівнює

$$F(w'^i) = F(\tilde{w}'^k) + (\varepsilon(\tilde{w}'^k))^2. \qquad (6)$$

Наслідок 4. Якщо функцію $\beta(f(j), w'^i)|_1^m$ утворено з $\beta(f(j), \tilde{w}'^k)|_1^m = (m,\dots,1)$ кількома незалежними транспозиціями, а $\varphi(j)|_1^m = (1,\dots,m)$, то значення функції цілі $F(w'^i)$ більше за $F(w'^k)$ на $\sum_{l=1}^{\varsigma} (\varepsilon_l(\tilde{w}'^k))^2$.

Наслідок 5. Якщо $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1,..., m)$ та $\varphi(j)|_1^m = (1, ..., m)$, а перестановку w'^i утворено з w'^k транспозицією $\alpha(w_s'^k, w_t'^k)$, яка переводить $\alpha(w_s'^k, w_t'^k)$ в інверсію, то значення функції цілі $F(\mathrm{w}^{wi})$ зменшується. Якщо $\alpha(w_s'^k, w_t'^k)$ переводить $w_s'^k, w_t'^k$ у прямий порядок, то значення $F(w'^i)$ збільшується.

Наслідок 6. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1,..., m)$, а $\varphi(j)|_1^m = (1, ..., m)$, то функція цілі $F_{\max}(w'^1) = F_{\min}(\tilde{w}'^k) + \sum_{l=1}^{\varsigma^*} \varepsilon_l(\tilde{w}'^k)\ \varepsilon_l'$, де $\varsigma^* = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$,

а

$$\varepsilon_l(\tilde{w}'^k) = \begin{cases} \{1, 3, 5, ..., n-1\}, & \text{якщо } m \in Z, \\ \{2, 4, 6, ..., n\}, & \text{якщо } m \in Z_1, \end{cases}$$

$Z \in \{2, 4, ..., 2j\}$, $Z_1 \in \{1, 3, ..., 2j-1\}$.

Теорема 2. Якщо $\beta_j(f(j), w'^1) \in R, \varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w'^t \in W'$ набуває найбільшого значення, то найменше її значення для перестановки $w'^k \in W'$ дорівнює $F_{\min}(w'^k) = F_{\max}(w'^t) - \sum_{l=1}^{\varsigma^*} \varepsilon_l(w'^t)\ \varepsilon_l'$.

Якщо $\beta_j(f(j), w'^1) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w'^k \in W'$ набуває найменшого значення, то найбільше її значення для перестановки $w'^t \in W'$ дорівнює $F_{\max}(w'^t) = F_{\min}(w'^k) + \sum_{l=1}^{\varsigma^*} \varepsilon_l(w'^k)\ \varepsilon_l'$, R – множина дійсних чисел.

Доведення теореми 2 випливає з теореми 1 і наслідків 2–6.

Теорема 3. Якщо перестановку $w^k \in W$ утворено з $w^{k-1} \in W$ однією транспозицією $\alpha(w_r^{k-1}, w_s^{k-1})$, то функцію $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ утворено з функції $\beta(f(j), w^{k-1})|_1^m$ за допомогою $n-2$ незалежних транспозицій.

Доведення. Дійсно, внаслідок транспозиції $\alpha(w_r^{k-1}, w_s^{k-1})$ у симетричній матриці $Q(w^{k-1})$ міняються місцями елементи s-го рядка (або s-го стовпця) і r-го рядка (або r-го стовпця). Елементи на перетині правої і лівої головних діагоналей свого положення не змінюють. Оскільки у стовпці n елементів, то своє положення змінюють $n-2$ елементи, тобто проводиться $n-2$ незалежних транспозиції, що і доводить теорему 3.

Наведемо такі теореми для системи H'.

Теорема 4. Якщо $\beta_j(f(j), w'^1) = (1,..., m)$ і $\varphi(j) = (1, ..., m)$, а перестановку w'^i утворено з w'^t транспозицією, яка переводить $w_s'^t, w_t'^t$ в інверсію, то значення цільової функції $F(w'^i)$ зменшується. Якщо транспозиція переводить $w_s'^t, w_r'^t$ у прямий порядок, то значення $F(w'^i)$ збільшується.

Теорема 5. Якщо $\beta_j(f(j), w'^1) \in R, \varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w'^t \in W'$ набуває найбільшого значення, то найменше її значення для перестановки $w'^i \in W'$ дорівнює $F_{\min}(w'^i) = F_{\max}(w'^t) - \sum_{l=1}^{\xi} \varepsilon_l(w'^t)\ \varepsilon_l'$.

Якщо $\beta_j(f(j), w^1) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для w'^i набуває найменшого значення, то найбільше її значення для перестановки $w'^t \in W'$ дорівнює $F_{\max}(w'^t) = F_{\min}(w'^i) + \sum_{l=1}^{\xi} \varepsilon_l(w'^i)\ \varepsilon_l'$; $\xi = \lfloor m/2 \rfloor$, R – множина дійсних чисел, $\varepsilon_l(w'^t)$, ε_l' – дефіцит функцій $\beta(f(j), w'^1)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$.

Доведення теорем 4, 5 наведено в [7].

Залежність цільової функції від транспозиції показує, що в комбінаторній оптимізації є симетрія. Цю властивість можна прослідкувати на прикладі підкласів розв'язних задач, у яких вхідні дані задано прямими та оберненими функціями натурального аргументу. Для послідовності значень цільової функції, які змінюються від максимуму до мінімуму в прямій задачі, існує симетрична послідовність розв'язків для оберненої, значення яких змінюються від мінімуму до максимуму. В основі цієї властивості комбінаторної оптимізації лежить симетрія аргументу цільової функції (комбінаторних множин та комбінаторних конфігурацій).

Залежність зміни значень цільової функції від упорядкування комбінаторних конфігурацій

Закономірність зміни значень цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу). Якщо її аргумент — перестановка, то змінюючи впорядкування комбінаторних конфігурацій можна побачити, що на такому впорядкуванні цільова функція змінюється як монотонна неспадна або незростаюча для одних і тих же вхідних даних, опукла або увігнута тощо. Ця властивість дозволяє досліджувати зміну значень цільової функції для різних структур вхідних даних. Змінюючи упорядкування перестановок, можна дослідити симетрію в комбінаторній оптимізації.

Розглянемо комбінаторні множини, які складаються з ізоморфних та неізоморфних комбінаторних конфігурацій. Упорядкуємо їх підмножинами W_η (крім перестановок), починаючи з $\eta = 1$ і закінчуючи $\eta = n$ (η — кількість елементів у *w*). Проведемо аналіз зміни значень цільової функції в задачах розбиття.

Задачі розбиття розрізняються чіткою або нечіткою природою вхідної інформації, способом її задання. Аргументом цільової функції в них є розбиття *n*-елементної множини на підмножини (розглядаємо розбиття на неперетинні класи). Розбиттям *n*-елементної множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ на η підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ таку, що $w_1^k \cup ... \cup w_{\eta^k}^k = A$, $w_s^k \neq \varnothing$, $w_p^k \cap w_s^k = \varnothing$, $p \neq s$, $p, s \in \{1, ..., \eta^k\}$, $\eta^k \in \{1, ..., n\}$ — кількість підмножин в w^k. Підмножина $w_s^k = (a_1, ..., a_{\xi_s^k})$, $a_r \in A$, $r \in \{1, ..., n\}$, може мати від 1 до *n* елементів ($\xi_s^k \in \{1, ..., n\}$).

Два розбиття w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$ і для будь-якої підмножини $w_p^k \subset w^k$ знайдеться підмножина $w_s^i \subset w^i$, для якої $\xi_p^k = \xi_s^i$.

Підмножину $\xi_p^k = \xi_s^i$ назвемо підмножиною ізоморфних розбиттів, якщо її елементи — ізоморфні розбиття. Множина W складається з підмножин ізоморфних розбиттів W_{η^k}.

За кількістю підмножин і кількістю в них елементів розбиття w^k вони розділяються на чотири типи [8]. До першого типу належать w^k, кількість елементів у всіх підмножинах яких є різною . Кількість елементів у підмножинах w_s^k розбиття другого типу - однаковою . У розбиття третього типу входять дві і більше підмножини, які містять один елемент. Хоча б одна підмножина повинна містити більше ніж один елемент. В розбиття четвертого типу входять дві і більше підмножини, кількість елементів у яких є однаковою. З них одна підмножина, порівняно з іншими, повинна мати найбільше елементів.

Розглянемо комбінаторні функції $\beta(f(j), w^k)|_1^m$, аргументом яких є розбиття множини на підмножини $w^k \in W$, а значення $\beta_j(f(j), w^k) \in \{0, 1\}$. Покладімо, що оптимізація в задачі розбиття здійснюється за кількістю зв'язків, які існують між елементами тієї самої підмножини. Якщо $a_s, a_t \in w_l^k \subset w^k$, то $\beta_j(f(j), \rho^k) = 1$ і $\beta_j(f(j), \rho^k) = 0$ в іншому випадку.

У задачах розбиття скінченні послідовності, значення яких дорівнюють $\{0, 1\}$ і які належать різним підмножинам ізоморфних розбиттів, мають неоднакову кількість одиниць. Тому комбінаторними функціями на всій множині W можуть бути лише ті послідовності, елементи яких є $\{0,1\}$. Для ρ^k, які належать одній і тій же підмножині ізоморфних розбиттів, скінченні послідовності, значення яких дорівнюють $\{0,1\}$, мають однакову кількість одиниць, а $F(w^k)$ змінюється за правилами, характерними для задач, що розв'язуються на множині перестановок. Тому для W_η комбінаторною функцією, в залежності від зручності обчислень, може бути будь-яка із заданих скінченних послідовностей.

Теорема 6. Якщо в задачах комбінаторної оптимізації множина W складається з підмножин W_η, а оптимізація здійснюється за сумарним або середнім значенням ваг між елементами базової множини, то цільова функція на заданому раніше впорядкуванні ізоморфних підмножин є дискретною кусково-монотонною функцією (відповідно неспадною або незростаючою).

Доведення теореми 6 проводиться з використанням комбінаторних функцій і наведено в [7].

Отже, для задач, які розв’язуються на комбінаторних множинах, що складаються з ізоморфних підмножин, цільова функція змінюється однаково незалежно від вхідних даних.

Наслідок. На підмножині W_η цільова функція змінюється так, як і на множині перестановок, яка є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Далі буде розглянуто задачі комбінаторної оптимізації, які розв’язуються на множині пере-становок і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій. Це дослідження буде опубліковано наступних статтях.

Висновок

Отже, знання властивостей комбінаторних функцій дозволяє установити зміну значень цільової функції в залежності від транспозиції елементів у перестановці, від упорядкування комбінаторних конфігурацій. Якщо W складається з однієї підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій (перестановки), то множина значень цільової функції знаходиться за правилами, характерними для перестановок. Якщо множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій, то їх можна впорядкувати так, що цільова функція для цього упорядкування змінюється як кусково-монотонні функції, а для підмножини ізоморфних w^k вона змінюється так, як і в задачах, аргументом цільової функції яких є перестановка.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 510 с.
2 Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / Пер. с англ. М.: Мир, 1982.416 с.
3. Тимофієва Н.К. Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв’язних задач із класу задачі комівояжера. Управляющие системы и машины. 2008. № 4. С. 20–36.
4. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наук. думка, 1981. 281 с.
5. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К.: Наукова думка, 1987. 262 с.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы. 1960. 400 с.
7. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. Рукопис. ІК ім. В.М. Глушкова НАН України, К. 2007. 374 с.
8. Тимофеева Н.К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества. Управляющие системы и машины. 2002. № 5. С. 6–23.

Надійшла 15.10.2023

REFERENCES

1. Papadimidriu, X., Sta’jglits, K. (1985). Kombinatornaja optimizatsija. Algoritmy i slojnost / Per. s angl. M.: Mir, 510 p.
2 Geri, M., Djonson, D. (1982). Vythislitelnye mashiny i trudnoreshaemye zadathi / Per. s angl. M.: Mir, 416 p.
3. Tymofijeva, N.K. (2008). “Metod strukturno-alfavitnogo podhuku ta pidklasy rozv’jaznyx zadath iz klasu zadath komivojajera”. Upravlyayushchie Sistemy i Mashiny. no 4, pp. 20–36 (In Russian).

4. Sergienko, I.V., Kaspthitzkaja, M.F. (1981). Modeli i metodu reshenija na EVM kombinatornyx zadath optimizatziji, Kiev: Nauk Dumka, 281 p.
5. Vintsuk, T.K. (1987). Analiz, raspoznfvanie i interpretatsija rethevyx signalov. K.: Nauk Dumka, 262 p.
6. Bellman, P. (1960). Dinamitheskoje programmirovanije. M.: Isd-vo inostranno'j literatury, 400 p.
7. Tymofijeva, N.K. (2007). Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatorno'j optymizatsiji. Dysertashija na zdobuttja stupenja texnithnyx nauk za spetsialnistju 01.05.02 – matematythne modeljuvannja ta obthysljuvalni metody. Rukopys. IK im. V.M. Glushkova NAN Ukrainy, Kyiv, 374 p.
8. Tymofeeva, N.K. (2002). "O nekotoryx svo'jstvax rasbyeni'j mnojestva na podmnojtstva". Upravlyayushchie Sistemy i Mashiny, no 5, pp. 6–23 (In Russian).

Received 15.10.2023

N.K. Tymofijeva, Doctor (Eng.), Senior Research Associate, Head of the Department,
International Research and Training Center for Information Technologies and Systems
of the NAS and MES of Ukraine, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0312-1153,
Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine,
tymnad@gmail.com

OBJECTIVE FUNCTION IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION
AND ITS PROPERTIES

Introduction. Some properties of combinatorial optimization problems are described, which affect the regularity of changes in the values of the objective function regardless of the input data. It is shown that this regularity depends on the ordering of combinatorial configurations, a certain structure of input information, on the transposition of permutation elements and the symmetry of combinatorial sets (argument). In problems that are solved on permutations and a subset of isomorphic combinatorial configurations, the class of the objective function is determined depending on their ordering and the structure of the input data.

Formulation of the problem. There are works where, in combinatorial optimization, the change in the values of the objective function is investigated depending on the special structure of the input data. These studies are related to the selection of subclasses of solvable problems, and various structures are generalized for which the objective function changes in the same way. The problem is to identify the parameters of problems of this class, in which the input data do not affect the pattern of changes in the values of the objective function

The proposed approach. In order to identify the parameters under which the input data do not affect the pattern of changes in the objective function values in combinatorial optimization, this pattern is analyzed from the arrangement of permutations, from the transposition of its elements, from the structure of the input. The change of the values of the objective function from the structure of its argument (the structure of combinatorial sets) is also investigated.

Conclusion. Knowing the properties of combinatorial functions allows you to establish a change in the values of the target function depending on the transposition of the elements in the permutation, on the ordering combinatorial configurations. If the combinatorial set consists of one subset of isomorphic combinatorial configurations (permutations), then the set of values of the objective function follows the rules characteristic of permutations. If the set consists of subsets of isomorphic combinatorial configurations, then they can be ordered in such a way that the objective function for this ordering varies as piecewise monotonic functions regardless of the input data, and for the isomorphic subset it varies as in problems whose the argument of objective function is permutation

Keywords. *combinatorial optimization, combinatorial configuration, objective function, transposition, traveling salesman problem, destination problem, clustering problem.*