

<https://doi.org/10.15407/csc.2024.04.003>  
UCD 514.18

**Iu.V. SYDORENKO**, PhD (Eng.), Assistant Professor,  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",  
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine, 03056,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1953-0410>,  
[suliko3@ukr.net](mailto:suliko3@ukr.net)

**O.S. KALENIUK**, PhD (Eng.),  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",  
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine, 03056,  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3141-4840>,  
[akalenuk@gmail.com](mailto:akalenuk@gmail.com)

**M.V. HORODETSKYI**, PhD (Eng.), Student,  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",  
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine, 03056,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4673-3894>,  
[horodetskyimykola@gmail.com](mailto:horodetskyimykola@gmail.com)

## POLYPOINT TRANSFORMATION DEPENDENCY ON THE POLYFIBER CONFIGURATION

---

*Applying polypoint transformation to a triangle mesh is a promising technique that deserves extensive exploration. Unlike traditional deformation techniques used in 3D animation that are based on spatial interpolation, polypoint transformation transforms not a set of points or mesh vertices, but a polyfiber — a set of planes that form an object of transformation. This can be beneficial in practical applications such as computer animation, deformative modeling in CAD, or deformation prediction in additive manufacturing since, with polypoint transformation, the object of deformation includes the topological information about the mesh and not just its vertex positions. The way a polyfiber can form a triangle mesh is, however, an understudied problem.*

*This problem gets easier to study if we start from a 2D case where a structure that corresponds to a triangle mesh in 3D is a polyline or a contour made of line segments. For this structure we can decompose the study into a set of explorable questions one of them being: how the configuration of contour forming polyfiber affects the results of transformation, or, more specifically, how an angle between two lines forming a vertex affects the translation of that vertex under a polypoint transformation? Would this dependency prohibit the application of polypoint transformation to 3D mesh deformation? This article answers both questions.*

**Keywords:** *epilycoordinate mappings, polypoint transformations, polygonal geometry, transformation basis, transformation object, closed contour.*

---

Cite: Sydorenko Iu.V., Kaleniuk O.S., Horodetskyi M.V. Polypoint Transformation Dependency on the Polyfiber Configuration. *Control Systems and Computers*, 2024, 4, 3—9. <https://doi.org/10.15407/csc.2024.04.003>

© Видавець ВД «Академпериодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована на умовах відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

## Introduction

One possible approach for complex point object transformation is a polyfiber transformation [1–4]. The basis for a polyfiber transformation is a set of lines in 2D space and a set of planes in 3D, the object of transformation is a set of points. Any change in the basis transforms the object. These transformations have well established themselves in deformative modeling [5, 6].

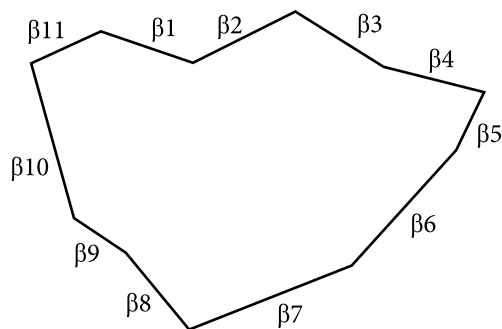
The polypoint transformation is a transformation dual to polyfiber transformation. It was first proposed in 2000 by Badaev and Sydorenko [7]. For the dual transformation, the basis is a set of points, and the object of transformation is a set of lines in 2D and planes in 3D.

There have been multiple proposals for how to represent a point object with lines and planes to make polypoint transformations applicable to deforming point objects [8, 9]. There are however transformable objects represented not only by their points but by other primitives such as triangles. One of these objects is a triangle mesh. Applying polypoint transformations to triangle meshes is possible in two major ways: one applies the transformation to each vertex of the mesh in isolation, the vertex is then represented as an intersection of 3 independent planes; the other applies the polypoint transformation to all the triangles' planes, and the vertices are then computed as points closest to all the deformed planes of its previously neighboring triangles.

## Problem Setting

In the preceding article [10] the following way of the transformation object specification was proposed in which the transformation object in 2D is a closed contour. The contour is given by a sequence of  $N$  straight lines  $\beta_i$ . Every  $i$ -th segment of the contour except the first and the last belongs to the straight line  $\beta_i$  and is bounded by the two points of intersection:  $\beta_{i-1}$  intersecting  $\beta_i$  and  $\beta_i$  intersecting  $\beta_{i+1}$ . We consider the contour closed, therefore, the last point of intersection of the last segment coincides with the first point of intersection of the first and this point is the intersection of  $\beta_1$  and  $\beta_N$ , see figure 1.

Anyhow the proposed method of the transformation object specification can be expanded to repre-



**Fig 1.** A closed contour with a sequence of  $N$  straight lines  $\beta_i$ ,  $i = 1 \dots 11$

sent a 3D triangle mesh. Then we can apply polypoint transformation to deform a triangle mesh and not just arbitrary polyfiber. This method of deformation will differ from conventional methods, such as RBF [11], or other methods of spatial interpolation [12], because the information about the mesh topology is included in the polypoint transformation. The deformation concerns planes, and triangles that lie on these planes, and not just their vertices. This is the novelty of the proposed solution.

At the same time, for any particular practical application, the very fact that the transformation of every point depends on its neighboring triangles and not only on its own position can serve as both negative and positive. We need to investigate how exactly the result of the deformation depends on the spatial configuration of the deformation object. How does the result of the contour point transformation depend on the relative orientation of its forming lines that undergo a polypoint transformation? To answer this question we conducted 2 experiments.

Within the framework of this experimentation, a simplified case – a contour in 2D is investigated. If the observed effect appears to prohibit applying polypoint transformations to 2D contours, then there is no reason to expand onto 3D triangle mesh polypoint transformation.

## Exploring the Transformation of Regular Polygons

In the first experiment, a transformation object is a contour of an  $n$ -edged regular polygon, the initial

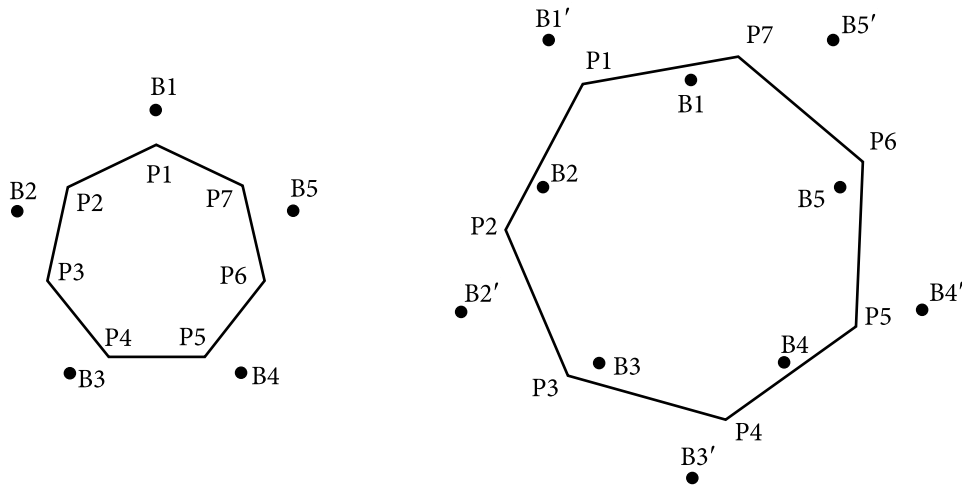


Fig 2. An initial basis and a contour to deform (left), both bases and a transformed contour (right)

basis of a polypoint transformation is 5 points  $B_j$ ,  $j = 1 \dots 5$ , regularly spaced around the object, and the transformed basis points  $B_j'$  represent a transformation that combines scale and rotation.

The contour points  $P_i$  are then formed by the neighboring edges of the  $n$ -edged regular polygon,  $i = 1 \dots N$ . We measure how the result of the transformation of the first point  $P_1$  depends on the number of edges in the polygon and the angle the two neighboring edges form respectively, see figure 2.

The motivation for this experiment is as follows. Any practical application of polypoint transformations for a 3D triangle mesh deformation requires

that similar objects with different levels of detail [13] should be deformed similarly. If we are handling several levels of detail of the same model simultaneously, then the deformation of these levels should not differ drastically. And this is the case we model with our experiment in 2D.

We collected 9 data points each representing a deformation of the first contour point of a regular polygon. The data is represented in table 1.

The same data is shown on a plot in Fig. 3.

So far, the data doesn't show that the dependency the transformation has on the forming lines angle is prohibiting the algorithm's application in 3D.

Table 1. The distance of a P1 transformation vector for the angle between its forming lines

Number of edges in a polygon	The angle between P1 forming lines in radians	The angle between P1 forming lines in degrees	The distance between the initial and the transformed position of P1
3	1.0471975511966	600	1.85269
4	1.5707963267949	90	1.85357
5	1.88495559215388	108	1.85399
6	2.0943951023932	120	1.85419
7	2.24399475256414	~128.57	1.8543
8	2.35619449019234	135	1.85437
9	2.44346095279206	140	1.85441
10	2.51327412287183	144	1.85444
15	2.72271363311115	156	1.85451

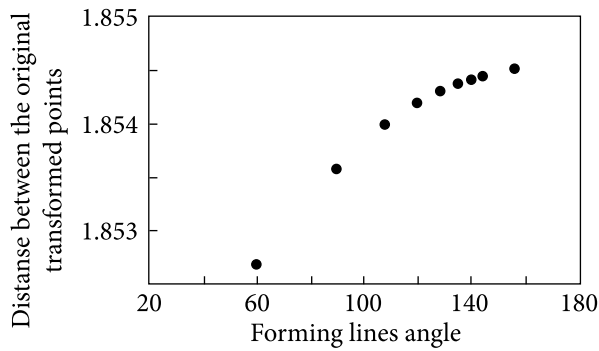


Fig 3. The dependency between the forming lines angle in P1 and the distance between the original point position and its position after the transformation

However, we only saw one acute angle in this experiment so we have to consider the evidence inconclusive. We need to explore sharp angles values.

### Exploring the Transformation of an Isosceles Triangle

In the following experiment, a deformation object is a single isosceles triangle made of vertices  $P_i$ ,  $i = 1 \dots 3$  with a variable vertex angle. As in the previous experiment, the initial basis of a polypoint transformation is also 5 points  $B_j$ ,  $j = 1 \dots 5$ , regularly spaced around the object, and the transformed basis points  $B_j'$  just as well represent a transformation that combines scale and rotation.

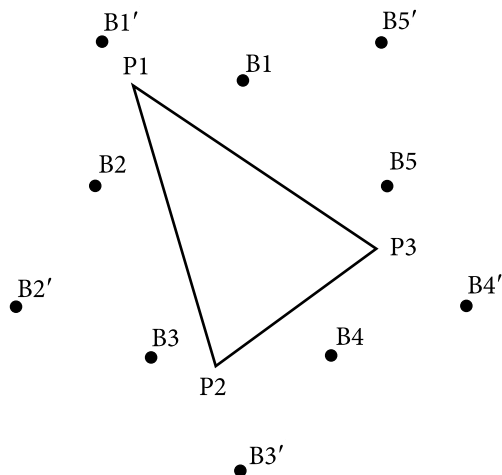
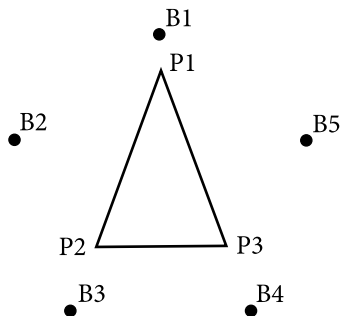


Fig 4. An initial basis and a triangle before deformation (left), both bases and a transformed triangle (right)

Table 2. The distance of a P1 transformation vector in accordance with the angle between its forming lines measured for sharp angles

The angle between P1 forming lines in degrees	The distance between the initial and the transformed position of P1
10	1.85182
20	1.85189
30	1.85201
40	1.85219
50	1.85241
60	1.85269
80	1.85329
100	1.85382

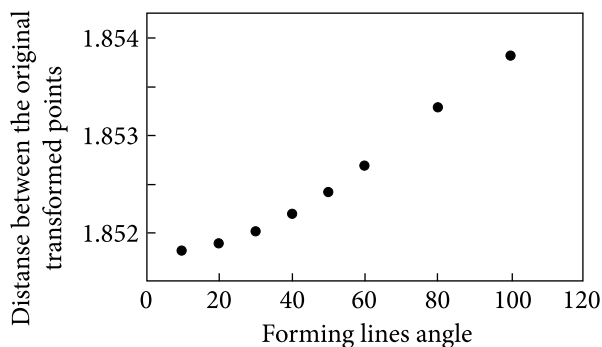
An example of such an experiment is shown in figure 4.

We continue to investigate how the relative orientation of the lines forming the vertex affects the vertex's transformation, but with an isosceles triangle, we can now look into sharp angles below  $\pi/6$ .

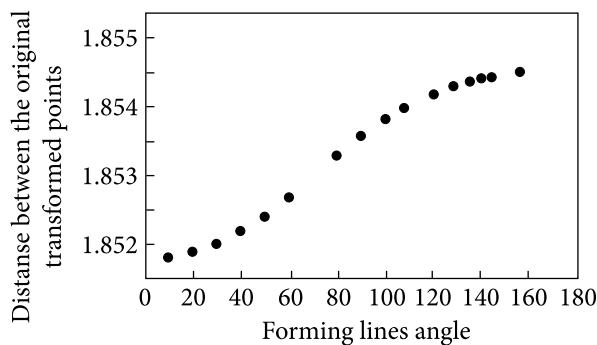
The data gathered is presented in table 2.

The same data is shown on a plot in Fig. 5.

The data collected also shows that the dependency under question doesn't seem to have a prohibiting effect on the usage of the algorithm for mesh deformation in 3D.



**Fig 5.** The distance between the original point position and its position after the transformation dependency on the vertex angle



**Fig 6.** The dependency between the forming lines angle in P1 and its transformation distance for all data points

The complete data gathered both from regular polygons and isosceles triangles is shown in figure 6.

There is certainly a dependency, after all, the algorithm should take the topology of the deformation object into account by design, but the data shows a near-linear trend with no oscillations, no vertical asymptotes, and no special points of interest. It does resemble a  $\sin(a-\pi/2) + b$  where  $a$  is the forming line angle and  $b$  is the value of the transformation distance in  $\pi/2$  but with a much lower amplitude.

## Conclusion

While there is certainly a dependency between the forming lines angle in each point and the deformation, which is a feature of the proposed method of transformation object specification, it doesn't seem to be prohibiting its application in 3D mesh deformation.

The trend the dependency data shows is nearly linear and unlikely to impact transformations of similar models with different levels of detail significantly.

## REFERENCES

1. Badaiev, Yu.I., Doroshenko, Yu.O. (1995). "Varianty politkanyynykh peretvoren". *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. no 58, pp. 39–42.
2. Badaiev, Yu.I., Doroshenko, Yu.O. (1996). "Metod politkanyynykh peretvoren v modeliuvanni skladnykh protsesiv ta ob`iektiv". *Narysna heometriia. Inzhenerna ta komp`iuterna hrafika: mizhnarodnyi naukovyi sympozium: materialy*. Lviv, pp. 11.
3. Badaiev, Yu.I., Doroshenko, Yu.O. (1996). "Politkanyynni peretvorennia u konstruiuvanni heometrychnykh obiektiv". *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. № 60, pp. 32–38.
4. Badaiev, Yu.I., Doroshenko, Yu.O. (1995). "Teoretychni osnovy politkanyynykh peretvoren". *Suchasni problemy heometrychnoho modeliuvannia: I mizhnarodna naukova konferentsiia: tezysy dokladiv*. Melytopol, pp. 13–14.
5. Badaiev, Yu.I., Doroshenko, Yu.O. (1997). "Politkanyynni peretvorennia tryvymirnoho prostoru u deformatyvnomu konstruiuvanni HO". *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. no 62, pp. 33–39.
6. Badaiev, Yu.I., Sikalo, M.V. (1998). "Metody deformatyvnoho modeliuvannia heometrychnykh obiektiv". *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. no 64, pp. 38–42.
7. Badaiev, Yu.I. Sydorenko, Yu.V. (2000). "Deformatsiine konstruiuvannia obiektiv vodnoho transportu za dopomohoiu politochkovykh peretvoren". *Vodnyi transport*, K.: KDAVT, pp.140–143.
8. Sidorenko, Yu, Kryvda, O., Leshchynska, I. (2020). "System of modeling of structural elements of ventilation systems by polycoordinate transformations". *Strength of Materials and Theory of Structures*, No. 104, pp. 221–228.

9. Sydorenko, Yu.V., Shaldenko, O.V. (2019). "Vahovi politochkovi peretvorennia pry modeliuvanni mozhlyvykh rezultativ plastychnoi khirurgii". *Suchasni problemy modeliuvannia*, Vyp.15, pp. 151–161.
10. Sydorenko, Iu. V., Horodetskyi, M.V. (2023). "Modification of the algorithm for defining polygonal geometry of an object for polypoint transformations". *Control Systems and Computers*, Issue 4 (304), Article 2, pp. 12–18.
11. Dyn, D. (1987). "Interpolation of scattered data by radial functions". In *Proceedings of an international workshop – Santiago, Chile: University of Chile, Academic Press*, pp. 47–61.
12. Alfeld, P. (1989). "Scattered data interpolation in three or more variables". *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design — New York: Academic Press*, pp. 1–33.
13. Luebke, D, Reddy, M, Cohen, JD, Varshney, A, Watson, B, Huebner, R. (2003). "Level of detail for 3D graphics". *Morgan Kaufmann*.

Received 01.10.2024

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бадаєв Ю.І., Дорошенко Ю.О. Варіанти політканинних перетворень. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1995. № 58. С. 39–42.
2. Бадаєв Ю.І., Дорошенко Ю.О. Метод політканинних перетворень в моделюванні складних процесів та об'єктів. *Нарисна геометрія. Інженерна та комп'ютерна графіка: міжнародний науковий симпозиум: матеріали*. Львів, 1996. С. 11.
3. Бадаєв Ю.І., Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення у конструюванні геометричних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1996. № 60. С. 32–38.
4. Бадаєв Ю.І., Дорошенко Ю.О. Теоретичні основи політканинних перетворень. *Сучасні проблеми геометричного моделювання: I міжнародна наукова конференція: тези доповідей*. Мелітополь, 1995. С. 13–14.
5. Бадаєв Ю.І., Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення тривимірного простору у деформативному конструюванні ГО. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1997. № 62. С. 33–39.
6. Бадаєв Ю.І., Сікало М.В. Методи деформативного моделювання геометричних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. № 64. С. 38–42.
7. Бадаєв Ю.І. Сидоренко Ю.В. Деформаційне конструювання об'єктів водного транспорту за допомогою політочкових перетворень. *Водний транспорт*, 2000 К.: КДАВТ. С.140–143.
8. Sidorenko Yu., Kryvda O., Leshchynska I. System of modeling of structural elements of ventilation systems by polycordinate transformations. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2020. No. 104. P. 221–228.
9. Сидоренко Ю.В., Шалденко О.В. Вагові політочкові перетворення при моделюванні можливих результатів пластичної хірургії. *Сучасні проблеми моделювання*, 2019. Вип.15. С. 151–161.
10. Sydorenko Iu.V., Horodetskyi M.V. Modification of the algorithm for defining polygonal geometry of an object for polypoint transformations. *Control Systems and Computers*, 2023, Issue 4 (304), Article 2, pp. 12–18
11. Dyn D. Interpolation of scattered data by radial functions. *Topics in Multivariate Approximation*, Academic Press. 1987. pp. 47–61. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174585-1.50009-9>
12. Alfeld P. Scattered data interpolation in three or more variables *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*. New York: Academic Press. 1989. pp. 1–33.
13. Luebke D, Reddy M, Cohen JD, Varshney A, Watson B, Huebner R. Level of detail for 3D graphics. *Morgan Kaufmann*, 2003. 390 p.

Надійшла 01.10.2024

Ю.В. Сидоренко, кандидат технічних наук, доцент,  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",  
просп. Берестейський, 37, Київ, Україна, 03056,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1953-0410>,  
suliko3@ukr.net

О.С. Каленюк, кандидат технічних наук,  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",  
просп. Берестейський, 37, Київ, 03056, Україна,  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3141-4840>,  
akalenuk@gmail.com



М.В. Городецький, аспірант,  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,  
просп. Берестейський, 37, Київ, 03056, Україна,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4673-3894>,  
horodetskyimykola@gmail.com

## ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОЛІТОЧКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТОЧКОВОГО ОБ’ЄКТА ВІД КОНФІГУРАЦІЇ ПОЛІТКАНИНИ

**Вступ.** Початковим і кінцевим базисом для політочкового перетворення є відповідні набори точок, а об’єктом перетворення є політканина — набір ліній у  $2D$  просторі та набір площин у  $3D$ . Зміна базису із початкового в кінцевий стан перетворює об’єкт. Зазвичай, для деформації триангульованої поверхні у  $3D$  просторі застосовується перетворення не площин, а точок, але якщо задати триангульовану поверхню трикутниками, це дозволить застосовувати до неї саме політочкові перетворення. Втім, при такому заданні, результат перетворення кожної точки триангульованої поверхні впливатиме на сусідні об’єкти. Потрібно дослідити, як саме результат деформації залежить від просторової конфігурації об’єкта деформації.

**Мета статті.** У цій роботі досліджується вплив способу задання геометрії об’єкта на площині на результат політочкових перетворень. Об’єктом дослідження є кут між відрізками, з яких складається контур (полігон). Дослідження здійснюється на рівносторонніх багатокутниках і рівносторонніх трикутниках в однаковому початковому та кінцевому базисі, що дає змогу проаналізувати вплив кута між формувальними прямими на перетворення точки, утвореної цими прямими.

**Методи.** Математичний аналіз, обчислювальний експеримент.

**Результати.** Показано залежність кута між відрізками та відстанню між початковим положенням точки та її положенням після перетворення на прикладах рівносторонніх  $n$ -кутників. Досліджено політочкові перетворення рівнобедреного трикутника, які поєднують масштабування та обертання, задля аналізу впливу кута, меншого за  $\pi/6$  на результат перетворення. Узагальнені дані показують характер залежності на всьому проміжку від 0 до  $\pi$ .

**Висновки.** При проведенні аналізу було виявлено залежність між кутом формуючих прямих у кожній точці та деформацією кінцевого об’єкта, яка є особливістю запропонованого способу задання об’єкта перетворення. Запропонований метод застосовано для деформації триангульованих поверхонь у  $3D$ -просторі.

**Ключові слова:** полікоординатні відображення, політочкові перетворення, полігональна геометрія, базис перетворення, об’єкт перетворення, замкнений контур.