

# Mathematical analysis of the Smakula–Dekster formula for the age determination of anthropogenic sediments

Sergiy Prylypko<sup>1</sup>, Sofia Alpert<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Geological Sciences, NAS of Ukraine (Kyiv, Ukraine)

<sup>2</sup> State University 'Kyiv Aviation Institute' (Kyiv, Ukraine)

## article info

### key words

Anthropogenic sediments, thermoluminescence method, geochronological research, physical and mathematical model, Smakula–Dekster formula.

### correspondence to

Sofia Alpert; State University 'Kyiv Aviation Institute'; 1 Liubomyra Huzara Avenue, Kyiv, 03058 Ukraine;

Email: [sonyasonet87@gmail.com](mailto:sonyasonet87@gmail.com)

orcid: 0000-0002-7284-6502

### article history

Submitted: 02.04.2025. Revised: 29.04.2025. Accepted: 20.06.2025

### cite as

Prylypko, S., Alpert, S. 2025. Mathematical analysis of the Smakula–Dekster formula for the age determination of anthropogenic sediments. *GEO&BIO*, 27: 115–120. [Ukrainian, with English summary]

## abstract

The features of application of the thermoluminescence method based on the Smakula–Dekster formula for the age determination of anthropogenic deposits have been analysed. The thermoluminescence method is widely used for the solution of geological, archaeological, and geochronological problems, in particular, the age and correlation determination of various Quaternary deposits from different sections. A new mathematical approach for anthropogenic deposits dating applying the thermoluminescence method and a physical and mathematical model of the processes of accumulation of radiation centres under natural conditions is proposed. It is noted that during the burial the fixation of accumulated age energy occurs in the rock under the influence of natural radioactive elements. During the laboratory heating process, the accumulated age energy is emitted, which allows us to determine the age of the rock. Depending on the structure and characteristics of the rock, we obtain spectra that differ in intensity. It is noted that the intensity of the peaks of thermoluminescence graphs depends on the energy accumulated by the sample during the burial process. Different types of deposits have varying thermoluminescence graphs that differ in height, width, and area. In this work, we have described in detail the solution of the first-order differential equation with separated variables, which describes the relationship between the energy flux radiated by the sample and the intensity of the given energy of the heater. By solving this differential equation, a formula was obtained for the radiation coefficient, which is a component of the Smakula–Dekster formula. It is noted that the Smakula–Dekster formula can be applied for the calculation of the concentration of radiation centres. A directly proportional relationship was established between the concentration of radiation centres and the age of the sample. It is emphasised that the greater the concentration of radiation centres, the greater the age of the sample. By applying this physical and mathematical model to the thermoluminescence method, it is possible to determine which of the studied deposits are older and which are younger. It is noted that the proposed physical and mathematical approach to the thermoluminescence method is effective for the age determination and revealing the sequence of sediment accumulation.

# Математичний аналіз формули Смакули-Декстера для визначення віку антропогенових відкладів

Сергій К. Прилипко, Софія І. Альперт

**Резюме.** Проаналізовано особливості застосування термолюмінесцентного методу на основі формули Смакули-Декстера для визначення віку антропогенових відкладів. Термолюмінесцентний метод широко застосовується для вирішення геологічних, археологічних та геохронологічних задач, зокрема, встановлення віку, визначення кореляції різних четвертинних відкладів із різних розрізів. Запропоновано новий математичний підхід до датування антропогенових відкладів із використанням термолюмінесцентного методу та фізико-математичної моделі процесів накопичення центрів випромінювання у природних умовах. Під час перебування в захороненому стані під впливом природних радіоактивних елементів відбувається фіксація накопиченої вікової енергії у породі. В процесі лабораторного нагрівання відбувається випромінення накопиченої вікової енергії, що дозволяє визначити вік породи. В залежності від структури та характеристик гірської породи отримуємо спектри різної інтенсивності. Інтенсивність піків термолюмінесцентних графіків залежить від накопиченої зразком в процесі захоронення енергії. Різні типи відкладів мають різні термолюмінесцентні графіки, що відрізняються між собою за висотою, шириною та площею. У даній роботі нами було детально описано розв'язок диференціального рівняння першого порядку з відокремленими змінними, яке описує взаємозв'язок між енергетичним потоком, випроміненим зразком та інтенсивністю наданої енергії пічкою. Розв'язавши дане диференціальне рівняння, було отримано формулу для коефіцієнту випромінювання, який є складовою формули Смакули-Декстера. Показано, що формула Смакули-Декстера може бути використана для розрахунку концентрації випромінюючих центрів. Встановлено прямо пропорційну залежність між концентрацією випромінюючих центрів та віком зразка. Підкреслено, що чим більша концентрація випромінюючих центрів, тим більшим буде вік зразка. Застосовуючи дану фізико-математичну модель до термолюмінесцентного методу, можна встановити, які із досліджуваних відкладів є старшими, а які молодшими. Зазначено, що запропонований фізико-математичний підхід до термолюмінесцентного методу є ефективним при визначенні віку та встановленні послідовності накопичення відкладів.

Ключові слова: антропогенові відклади, термолюмінесцентний метод, геохронологічні дослідження, фізико-математична модель, формула Смакули-Декстера.

Адреса для зв'язку: Софія І. Альперт; Державний університет "Київський авіаційний інститут"; вул. Любомира Гузара, 1, Київ 03058, Україна; Email: sonyasonet87@gmail.com

## Вступ

Термолюмінесцентний метод (ТЛ-метод) охоплює діапазон датування гірських порід від декількох тисяч до кілька сотень тисяч років, що дозволяє застосовувати його до широкого діапазону для вивчення четвертинних відкладів. Вік більшості з них відноситься до четвертинного періоду [Prylypko & Alpert 2019; Prylypko & Alpert 2024].

Приклад класичного четвертинного розрізу Кліщинці наведений на рис. 1.

Метод ґрунтується на простій формулі: вік породи дорівнює відношенню отриманої дози радіоактивного опромінення мінералом-таймером до потужності експозиційної дози природного радіаційного поля ґрунту у точці відбору зразка. Як мінерал-таймер зазвичай використовується піщані фракції кварцу, глина, суглинки, леси.

Традиційний метод визначення отриманої дози шляхом вимірювання інтегральної характеристики термолюмінесцентного виплеску має низку суттєвих недоліків, що обговорюються у численних наукових публікаціях [Wintle 1990].

Метою даної роботи є розробка нового математичного підходу до датування, який позбавлений недоліків традиційного методу. Наш підхід ґрунтується на глибокому розумінні фізичного процесу та використовує математичну модель накопичення центрів випромінювання у відкладах. Ми пропонуємо новий математичний підхід до визначення абсолютного віку четвертинних порід, який ґрунтується на фізико-математичній моделі процесів накопичення центрів випромінювання у кристалах кварцу в природних умовах та формуванні кінетики термолюмінесцентного процесу під час проведених нами експериментів, спираючись на формулу Смакули-Декстера [Singhvi & Mejdahl 1985].

## Особливості застосування термолюмінесцентного методу

Нагадаємо, що центри випромінювання — це центри люмінесценції, тобто дефекти кристалічної решітки, які зумовлюють випромінювання мінералом-дозиметром фотонів світла. У кристалах зустрічаються відхилення від ідеальної будови у розташуванні атомів, які називаються дефектами решітки [Durcan *et al.* 2015]. У кристалах центри випромінювання можуть бути зумовлені структурними дефектами кристалічної решітки (наприклад, атомами та іонами, що перебувають між вузлами кристалічної решітки).

Важливу роль відіграють радіаційні дефекти, що утворюються у кристалі гамма-частинками. Механізм утворення таких дефектів пояснюється внутрішнім гамма-електронним фотоефектом, внаслідок якого електрон отримує енергію (близько 1 МеВ), якої достатньо, щоб збудити кристалічну решітку і спричинити випромінювання фотонів світла. Накопичення цих радіаційних дефектів у природному середовищі є процесом, який протікає незалежно від концентрації домішок та дефектів, що призводить до стабільного термолюмінесцентного піку [Greilich *et al.* 2002].

Електронними пастками називаються рівні, які здатні захоплювати електрони, а потім за рахунок отриманої доданої теплової енергії віддавати їх назад у вигляді фотонів світла. Такі пастки називають також пастками захоплення. Перед захороненням гірські породи піддаються відбілюванню під дією зовнішніх факторів, коли відбувається спустошення пасток.

Праці з питань геохронології почали з'являтися ще в 60-х роках ХХ ст. Роботи в цьому напрямку вели такі вчені, як З. Целлер, Н. Гроглер, Ф. Хайтерман, Х. Стауффер (1960 р.). Також активно в цьому плані працювали М. Айткен, М. Тайт (1964 р.), Ч. Б. Луцик (1955–1956 рр.), Е. Целлер (1956 р.). В процесі роботи дослідниками було помічено, що в кристалах різних мінералів існує ряд енергетичних зон: валентна зона, зона провідності та заборонена зона. В атомі електрон заповнює свій, притаманний тільки йому енергетичний рівень.

З'ясовано, що в атомі існують енергетичні рівні, на яких електрони перебувати не можуть. Ці рівні енергії називаються забороненими. Інші енергетичні рівні, на яких можуть перебувати електрони називаються дозволеними. У твердому тілі енергетичні рівні внаслідок взаємодії атомів один з одним перетворюються на дозволені та заборонені енергетичні зони. Ширина цих зон коливається в межах кількох еВ, а відстань між сусідніми рівнями в зоні становить приблизно  $10^{-22}$  еВ, так що в межах зони електрон може практично вільно переміщатися з одного енергетичного рівня на інший енергетичний рівень [Kitis & Pagonis 2018].

Нагадаємо, що електронвольт (еВ) є позасистемною одиницею енергії. Енергію один електронвольт набуває один електрон, при проходженні через електростатичний бар'єр із потенціалом один вольт.

Дозволена зона, яку заповнюють валентні електрони, називається валентною зоною. Слід зазначити, що валентний електрон — це електрон, що знаходиться на зовнішньому електронному рівні атома та найслабше зв'язаний з ядром атома. Валентні електрони є джерелом фотонів світла.

Дозволена зона, вільна від електронів, називається зоною провідності (вільною). Дозволені зони в кристалі розділені забороненими зонами. При нагріванні електрони випромінюють фотони світла з переходом у заборонену зону.

В зразку присуття певна кількість збуджених атомів, але розкид їх енергетичних рівнів не дуже великий. Ці рівні розташовані близько один до одного, тобто вони утворюють між собою практично суцільну рівномірну енергетичну зону. Таким чином енергетичні спектри всіх атомів, які розташовані (сконцентровані) у вузлах кристалічної решітки, знаходяться в так званому основному, тобто в збудженому стані.

У зразках (на атомарних рівнях) можливі переходи між енергетичними рівнями (з рівня більш високих енергій до рівня більш низьких та навпаки). Цей процес супроводжується або випромінюванням або поглинанням фотонів світла [Konstantinidis *et al.* 2024]. Піддаючи зразок нагріву, ми стимулюємо потік фотонів теплового інфрачервоного випромінювання, що впливає на наш зразок. Далі виводимо формулу для лінійного коефіцієнту випромінювання.



**Рис. 1.** Класичний четвертинний розріз (Кліщинці, Золотоніський район, Черкаська область).

**Fig. 1.** A classic Quaternary section (Klishchyntsi, Zolotonosha Raion, Cherkasy Oblast).

### Аналіз формули Смакули-Декстера з метою визначення віку зразка

Розглянемо однорідний паралельний потік інфрачервоного теплового випромінювання, що розповсюджується від нагрівача (пічки) та впливає на зразок шляхом його нагрівання, через що, збуджений зразок випромінює енергію у вигляді фотонів світла, яка фіксується фотоелектронним підсилювачем (ФЕУ).

Введемо наступні позначення:  $I$  – інтенсивність пучка інфрачервоного теплового випромінювання (тепла, що дає нагрівач);  $dx$  – площа кювети для зразка;  $dI$  – енергетичний потік, випромінений зразком;  $k$  – лінійний коефіцієнт пропорційності.

Розглянемо наступне рівняння, що виражає взаємозв'язок між енергетичним потоком, випроміненим зразком та інтенсивністю тепла, що дає нагрівач:

$$-dI = k \cdot I \cdot dx, \quad (1)$$

де коефіцієнт пропорційності  $k$  називається лінійним коефіцієнтом випромінювання.

Далі, розв'язуючи диференціальне рівняння (1), знаходимо інтенсивність випромінювання, що йде від нагрівача.

1) Спочатку розділяємо змінні:

$$\frac{dI}{I} = -k \cdot dx. \quad (2)$$

2) Інтегруємо ліву та праву частини виразу (2):

$$\int \frac{dI}{I} = \int (-k \cdot dx).$$

Використовуючи таблицю інтегралів, маємо:

$$\ln|I| + \ln|C| = -k \cdot x.$$

3) Потенціюємо:

$$e^{(\ln|I| + \ln|C|)} = e^{-kx}.$$

4) Використовуючи властивість натурального логарифма, яка стверджує, що:

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|,$$

робимо наступні перетворення:

$$e^{\ln|I \cdot C|} = e^{-kx}.$$

5) Застосовуючи основну логарифмічну тотожність, маємо:

$$I \cdot C = e^{-kx}. \quad (3)$$

Нагадаємо, що основна логарифмічна тотожність стверджує, що:  $e^{\ln a} = a$ , ( $a > 0$ ).

6) Далі із виразу (3) виражаємо інтенсивність випромінювання, яка йде від нагрівача:

$$I = \frac{1}{C} e^{-kx}.$$

Для зручності перепозначимо константу  $\frac{1}{C}$  наступним чином:

$$\frac{1}{C} = \tilde{C}.$$

Тоді потік енергії від нагрівача розраховується наступним чином:

$$I = \tilde{C} e^{-kx}. \quad (4)$$

7) Далі із отриманого виразу (4) знаходимо коефіцієнт випромінювання  $k$ :

$$e^{-kx} = \frac{I}{\tilde{C}}.$$

Логарифмуємо ліву та праву частину:

$$\ln \frac{I}{\tilde{C}} = \ln e^{-kx}$$

$$\ln \frac{I}{\tilde{C}} = -kx$$

$$-\ln \frac{I}{\tilde{C}} = kx$$

Використовуючи логарифмічну властивість, яка стверджує, що  $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ , маємо:

$$\ln \frac{\tilde{C}}{I} = kx.$$

$$k = \frac{1}{x} \ln \frac{\tilde{C}}{I}. \quad (5)$$

Тепер у виразі (5) переходимо від натурального логарифма до десяткового, використовуючи наступну тотожність:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0,43429} \approx 2,30259 \lg x. \quad (6)$$

Тоді, використовуючи вираз (6), формулу (5) можемо переписати у наступному вигляді:

$$k = \frac{1}{x} \ln \frac{\tilde{C}}{I} \approx \frac{2,3}{x} \lg \frac{\tilde{C}}{I} - \text{коефіцієнт випромінювання.} \quad (7)$$

Концентрація випромінюючих центрів визначається за формулою Смакули-Декстера:

$$n = 0,87 \cdot 10^{17} \frac{\alpha_0}{(\alpha_0^2 + 2)^2} \cdot \frac{\Delta E}{f} \cdot k_0, \quad (8)$$

де  $n$  – концентрація випромінюючих центрів в  $см^{-3}$ ,  $\alpha_0$  – коефіцієнт випромінювання зразка, що знаходиться коло максимуму випромінювання зразка,  $f$  – енергія нагрівача, яка надана зразку,  $\Delta E$  – енергія, випромінена зразком (чим більше значення  $\Delta E$ , тим буде більший вік зразка),  $k_0$  – коефіцієнт випромінювання при максимальній інтенсивності випромінювання зразка.

Енергія випромінювання світлового потоку (концентрація випромінюючих центрів) прямо пропорційна віку зразка [Prylupko & Alpert 2023].

## Висновки

Під час перебування в захороненому стані під впливом радіоактивних елементів відбувається накопичення вікової енергії (електрони переходять із нижніх енергетичних рівнів на

верхні). В процесі нагрівання під дією нагрівача (пічки) відбувається випромінення накопиченої вікової енергії, що дозволяє встановити вік досліджуваної породи (електрони переходять із верхніх рівнів на нижні).

Інтенсивність піків ТЛ-графіка, як вище встановлено, залежить від накопиченої зразком в процесі формування та захоронення енергії. В залежності від віку та структури зразка (лес, суглинок, глина, викопний ґрунт) отримуємо спектри різної інтенсивності та конфігурації форм піків на графіках, характерних для кожного типу відкладів, які мають індивідуальні характеристики (ширину, висоту, інтенсивність та площу).

Встановлено прямо пропорційну залежність між концентрацією випромінюючих центрів, яка розраховується за формулою Смакули-Декстера та віком зразка.

### Декларації

Фінансування. Дослідження виконано у рамках та коштом планової наукової теми Інституту геологічних наук НАН України «Розробка та апробація стратиграфічної моделі осадових басейнів палеогену, неогену та кватеру України» (№ 1030).

Конфлікт інтересів. Автор не має жодних конфліктів інтересів, які могли б вплинути на зміст цієї статті.

### References

- Durcan, J. A., G. E. King, G. A. T. Duller. 2015. DRAC: Dose Rate and Age Calculator for trapped charge dating. *Quaternary Geochronology*, **28**: 54–61. <https://doi.org/10.1016/j.quageo.2015.03.012>
- Greulich, S., G. A. Glasmacher, G. A. Wagner. 2002. Spatially resolved detection of luminescence: a unique tool for archaeochronometry. *Naturwissenschaften*, **89**: 371–375. <https://doi.org/10.1007/s00114-002-0341-z>
- Kitis, G., V. Pagonis. 2018. Localized transition models in luminescence: A reappraisal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, **432**: 13–19. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2018.06.029>
- Konstantinidis, P. G., G. S. Polymeris, E. Tsoutsoumanos, G. Kitis. 2024. Optimization of an experimental TL protocol for discriminating the recombination pathways. *Applied Radiation and Isotopes*, **203**: 111106. <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2023.111106>
- Prylypko, S. K., S. I. Alpert. 2019. Mathematical model of the dynamics of accumulation light sum in subareal deposits. Conference Proceedings. *Ideas and innovations in geosciences*. Kyiv, 90–91.
- Prylypko, S., S. Alpert. 2023. Mathematical reasoning of age determination of quaternary sediments. *Geo&Bio*, **24**: 159–165. <https://doi.org/10.15407/gb2410>
- Prylypko, S., S. Alpert. 2024. Geochronological research of antropogenic sediments. *Ideas and innovations in earth sciences*. Proceedings of the 10th International Geosciences conference of Young Researchers, Kyiv, 32–34.
- Singhvi, A. K., V. Mejdahl. 1985. Thermoluminescence dating of sediments. *Nuclear Tracks and Radiation Measurements*, **10** (1-2): 137–161. [https://doi.org/10.1016/0735-245X\(85\)90020-1](https://doi.org/10.1016/0735-245X(85)90020-1)
- Wintle, A. G. 1990. A review of current research on TL dating of loess. *Quaternary Science Reviews*, **9** (4): 385–397. [https://doi.org/10.1016/0735-245X\(85\)90020-1](https://doi.org/10.1016/0735-245X(85)90020-1)