УДК 517.5

О. В. Коваленко (ДНУ им. О.Гончара, Днепропетровск)

ЗАДАЧА КОЛМОГОРОВА НА КЛАССЕ КРАТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Necessary and sufficient conditions for positive numbers $M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}$, $0 = k_1 < k_2 < k_3 \leq r-2$, $k_4 = r$, *to guarantee the existence of an* $r-1$*-monotone function defined on the negative half-line and such that* $\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i}$, $i = 1,2,3,4$ *were found.*

Найдены необходимые и достаточные условия на положительные числа $M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}$, $0 = k_1 < k_2 < k_3 \leq r-2$, $k_4 = r$, *для того, чтобы гарантировать существование* $r-1$*–кратно монотонной функции, определенной на отрицательной полуоси и такой, что* $\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i}$, $i = 1,2,3,4$.

1. Обозначения. Постановка задачи. Известные результаты. Пусть область G обозначает действительную ось $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или неотрицательную полуось $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Пусть $L_\infty(G)$ обозначает пространство измеримых существенно ограниченных функций $x : G \to \mathbb{R}$ с обычной нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty(G)}$. Для $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $L^r_\infty(G)$ пространство функций $x : G \to \mathbb{R}$, которые имеют локально абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, $x^{(0)} = x$, и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим $L^r_{\infty,\infty}(G) = L^r_\infty(G) \cap L_\infty(G)$.

Для действительного $t \in \mathbb{R}$ положим $t_+ := \max\{t, 0\}$.

А.Н. Колмогоров (см. [1]) сформулировал следующую задачу:

Задача Колмогорова

Пусть задан некоторый класс функций $X \subset L^r_{\infty,\infty}(G)$ *и произвольная система* d *целых чисел* $0 = k_1 < k_2 < ... < k_d = r$. *Найти необходимые и достаточные условия на систему положительных чисел*

$$M_{k_1}, M_{k_2}, ..., M_{k_d}$$

для того, чтобы гарантировать существование функции $x \in X$ *такой, что*

$$\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i},\ i = 1, ..., d.$$

В [1] А.Н. Колмогоров решил эту задачу в случае $d = 3$, $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ (частные случаи следуют из работ Адамара [2] и Шилова [3]). Он показал, что для трех положительных чисел M_0, M_k, M_r, $0 < k < r$, существует функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, для которой эти числа являются нормами функции, ее k-й и ее r-й производных соответственно, тогда и только тогда, когда

$$M_k \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r},$$

где φ_r — r-я периодическая первообразная со средним значением ноль на периоде функции $\varphi_0\,(t) = \operatorname{sgn}\sin t$.

Другие результаты в случае, когда областью определения функций является вся действительная ось, содержатся в статьях Родова [4, 5], Дзядыка и Дубовика [6, 7], Бабенко и Коваленко [8].

Остановимся подробнее на случае, когда областью определения является полуось $\mathbb{R}_-$. Решение задачи Колмогорова известно в следующих случаях

1. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r$ (частные случаи следуют из результатов Ландау 1913 [9], Маторина 1955 [10]; общий результат следует из работы Шенберга и Каваретта 1970 [11]).

2. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 1,\ k_4 = r$ (Бабенко и Бритвин 2002 [12]).

Пусть заданы $r, m \in \mathbb{Z}_+,\ m \leq r$. Обозначим через $L^{r,m}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ класс функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, которые неотрицательны вместе со всеми своими производными до порядка m включительно (производная порядка m должна быть неотрицательной почти всюду в случае $m = r$). Мы будем называть этот класс классом m-кратно монотонных функций.

В 1951 году Оловянишников [13] получил решение задачи Колмогорова в случае $d = 3$ и $X = L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$. Он показал, что для произвольных $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и положительных чисел M_0, M_k, M_r существует функция $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ такая, что

$$\|x\| = M_0, \;\; \|x^{(k)}\| = M_k, \;\; \|x^{(r)}\| = M_r,$$

тогда и только тогда, когда эти три числа удовлетворяют неравенству колмогоровского типа

$$M_0 \geq \frac{(r-k)!^{r/(r-k)}}{r!} M_k^{\frac{r}{r-k}} M_r^{-\frac{k}{r-k}}. \tag{1}$$

В [14] и независимо в [15] было получено обобщение этого результата на случай $(r-2)$-кратно монотонных функций (более того, в последней работе рассматривался случай произвольных норм).

Другие результаты на классах кратно монотонных функций известны в следующих случаях:

1. $X = L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r-1$, $k_4 = r$ (Ятцелев 1999 [16]).

2. $X = L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и $k_1 = 0 < k_2 < k_3 < k_4 = r$ (В. Бабенко, Ю. Бабенко 2007 [17]).

Цель данной статьи — решение задачи Колмогорова для системы положительных чисел $M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}$, $0 = k_1 < k_2 < k_3 < k_4 = r$ и класса $X = L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$. Отметим, что случай, когда $k_3 = r-1$, по сути содержится в работе Ятцелева [16]. Поэтому интерес представляет рассмотрение случая $0 = k_1 < k_2 < k_3 \leq r-2$, $k_4 = r$.

2. Экстремальные фунции и некоторые их свойства.

Для чисел $l > 0$ и $a > b \geq 0$ положим

$$\varphi_1(a,b,l;t) := l\left((t+a)_+ - 2(t+b)_+\right)_+,\ t \in \mathbb{R}_-.$$

Для $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ положим $\varphi_r(a,b,l;t) := \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_{r-1}(a,b,l;s)ds$. Отметим, что $\varphi_r(a,b,l;t) \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и $\varphi_r(a,b,l;t) = 0$, $t \leq -a$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть заданы функция $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и целые числа $0 = k_1 < k_2 < k_3 \leq r-2$, $k_4 = r$. Пусть числа $l > 0$ и $a > b \geq 0$ таковы, что*

$$\|x^{(k_i)}\| = \|\varphi_r^{(k_i)}(a,b,l)\|,\ i = 2,3,4. \tag{2}$$

Тогда $\|x\| \geq \|\varphi_r(a,b,l)\|$.

Доказательство. Предположим противное, пусть имеет место неравенство $\|x\| < \|\varphi_r(a,b,l)\|$. Положим $\delta(t) := x(t) - \varphi_r(a,b,l;t)$. В силу предположения и принадлежности $x, \varphi_r(a,b,l;t) \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ мы получаем, что $\delta(0) = x(0) - \varphi_r(a,b,l;0) = \|x\| - \|\varphi_r(a,b,l)\| < 0$. Кроме того, в силу определения фукнций $\varphi_r(a,b,l;t)$ $\delta(-a) \geq 0$. Это значит, что существует точка $-a < t_1^1 < 0$ такая, что $\delta'(t_1^1) < 0$. Кроме того, $\delta'(-a) \geq 0$. Это значит, что существует точка $-a < t_2^1 < 0$ такая, что $\delta''(t_2^1) < 0$. Повторяя аналогичные рассуждения, получим, что существует точка $-a < t_{k_2}^1 < 0$ такая, что $\delta^{(k_2)}(t_{k_2}^1) < 0$. Кроме того, $\delta^{(k_2)}(-a) \geq 0$ и в силу (2) $\delta^{(k_2)}(0) = 0$. Это значит, что существуют точки $-a < t_{k_2+1}^1 < t_{k_2+1}^2 < 0$ такие, что $\delta^{(k_2+1)}(t_{k_2+1}^1) < 0$ и $\delta^{(k_2+1)}(t_{k_2+1}^2) > 0$. Кроме того, $\delta^{(k_2+1)}(-a) \geq 0$. Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим, что существуют точки $-a < t_{k_3}^1 < t_{k_3}^2 < 0$ такие, что $\delta^{(k_3)}(t_{k_3}^1) < 0$ и $\delta^{(k_3)}(t_{k_3}^2) > 0$. Кроме того, $\delta^{(k_3)}(-a) \geq 0$ и в силу (2) $\delta^{(k_3)}(0) = 0$. Это значит, что существуют точки $-a < t_{k_3+1}^1 < t_{k_3+1}^2 < t_{k_3+1}^3 < 0$ такие, что $\delta^{(k_3+1)}(t_{k_3+1}^1) < 0$, $\delta^{(k_3+1)}(t_{k_3+1}^2) > 0$ и $\delta^{(k_3+1)}(t_{k_3+1}^3) < 0$. И так далее, существуют точки $-a < t_{r-1}^1 < t_{r-1}^2 < t_{r-1}^3 < 0$ такие, что $\delta^{(r-1)}(t_{r-1}^1) < 0$, $\delta^{(r-1)}(t_{r-1}^2) > 0$ и $\delta^{(r-1)}(t_{r-1}^3) < 0$. Однако в силу (2) (при $i = 4$) и определения функций $\varphi_r(a,b,l;t)$ это невозможно, поскольку на каждом из интервалов $(-a,-b)$ и $(-b,0)$ функция $\delta^{(r-1)}$ может иметь не более одной перемены знака, причем с "плюс" на "минус" на первом и с "минус" на "плюс" на втором. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следущая лемма доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. *Пусть заданы функция $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и целые числа $0 \leq k_1 < k_2 < k_3 = r$. Пусть числа $l > 0$ и $a > 0$ таковы, что*

$$\|x^{(k_i)}\| = \|\varphi_r^{(k_i)}(a,0,l)\|,\ i = 2,3. \tag{3}$$

Тогда $\|x^{(k_1)}\| \geq \|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\|$.

Отметим, что для любой функции $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и целых чисел $0 \leq k_1 < k_2 < k_3 = r$ можно выбрать параметры $a, l > 0$ так, чтобы выполнялись равенства (3). Кроме того, так как

$\varphi_r(a,0,l) = \frac{l}{r!}(t+a)_+^r$, то справедливо равенство

$$\left\|\varphi_r^{(k_1)}(a,0,l)\right\| = \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|\varphi_r^{(k_2)}(a,0,l)\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|\varphi_r^{(r)}(a,0,l)\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}. \quad (4)$$

Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть заданы функция $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и целые числа $0 \le k_1 < k_2 < k_3 = r$. Тогда*

$$\left\|x^{(k_1)}\right\| \ge \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!}\left\|x^{(k_2)}\right\|^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}\left\|x^{(r)}\right\|^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}.$$

Лемма 3 является обобщением неравенства Оловянишникова (1) и, по сути, содержится в [15].

Лемма 4. *Пусть заданы целые числа $0 \le k_1 < k_2 \le r-2$, $k_3 = r$ и положительные числа M_{k_1}, M_{k_2}, M_r такие, что выполняется неравенство*

$$M_{k_1} \ge \frac{(r-k_2)!^{\frac{r-k_1}{r-k_2}}}{(r-k_1)!} M_{k_2}^{\frac{r-k_1}{r-k_2}} M_r^{\frac{k_1-k_2}{r-k_2}}.$$

Тогда существуют такие числа $l > 0$, $a > b \ge 0$, что выполняются равенства

$$\|\varphi_r^{(k_i)}(a,b,l)\| = M_{k_i},\ i = 1,2,3. \quad (5)$$

Доказательство. Отметим, что в силу определения функций $\varphi_r(a,b,l)$ имеем $\|\varphi_r^{(r)}(a,b,l)\| = l$. Поэтому далее можем считать, что $M_r = l = 1$ и вместо $\varphi_r(a,b,1)$ будем писать $\varphi_r(a,b)$.

Для каждого $b \ge 0$ существует число $a = a(b)$ такое, что

$$\|\varphi_r^{(k_2)}(a(b),b)\| = M_{k_2}. \quad (6)$$

Действительно, при фиксированном b $\psi(a) := \|\varphi_r^{(k_2)}(a,b)\|$ есть непрерывная функция переменного a. Кроме того, $\psi(b) = 0$ и $\psi(a) \to \infty$ при $a \to \infty$. Это значит, что существует число $a = a(b)$ такое, что $\psi(a(b)) = M_{k_2}$. Таким образом на промежутке $[0,\infty)$ мы определили функцию $a(b)$ такую, что для всех $b \ge 0$ выполняется равенство (6). При этом функция $a(b)$ является непрерывной.

Покажем, что существует $b \geq 0$, такое, что выполняется

$$\|\varphi_r^{(k_1)}(a(b), b)\| = M_{k_1}. \tag{7}$$

Положим $\eta(b) := \|\varphi_r^{(k_1)}(a(b), b)\|$. По условию леммы $\eta(0) \leq M_{k_1}$. Покажем, что

$$\eta(b) \to \infty,\ b \to \infty. \tag{8}$$

Поскольку выполняется равенство (6), то в силу определения функций $\varphi(a, b, l; t)$ величина $a(b) - b$ ограничена. Поэтому

$$2b - a(b) \to \infty,\ b \to \infty. \tag{9}$$

Из определения функций $\varphi(a, b, l; t)$ следует, что сужение $p(b; t)$ функции $\varphi(a(b), b; t)$ на отрезок $[a(b) - 2b, 0]$ есть полином степени $r - 2$. Кроме того,

$$\max_{t \in [a(b)-2b, 0]} |p^{(k_2)}(b; t)| = p^{(k_2)}(b; 0) = M_{k_2} > 0. \tag{10}$$

Теперь применяя неравенство Маркова для алгебраических полиномов (см. [18], [19], см. также гл. 4 в монографии [20]) и учитывая (9) и (10), получаем, что

$$\max_{t \in [a(b)-2b, 0]} |p^{(k_1)}(b; t)| \to \infty,\ b \to \infty.$$

Отсюда получаем справедливость (8). Таким образом, существуют числа $l > 0$, $a > b \geq 0$ такие, что выполняются равенства (5). Лемма доказана.

Замечание. *При выполнении условий леммы 4 положим*

$$\Phi(M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}; t) = \varphi(a, b, l; t),$$

где числа a, b, l выбраны так, что выполняются равенства (5).

3. Решение задачи Колмогорова.

Теорема 1. *Пусть заданы целые числа $0 = k_1 \leq k_2 < k_3 \leq r - 2$, $k_4 = r$ и положительные числа $M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}$. Существует функция $x \in L_{\infty,\infty}^{r,r-1}(\mathbb{R}_-)$ такая, что*

$$\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i},\ i = 1, 2, 3, 4,$$

тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства

$$M_{k_2} \geq \frac{(r-k_3)!^{(r-k_2)/(r-k_3)}}{(r-k_2)!} M_{k_3}^{\frac{r-k_2}{r-k_3}} M_r^{\frac{k_2-k_3}{r-k_3}}$$

и

$$M_{k_1} \geq \|\Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r)\|.$$

Доказательство. Необходимость указанных неравенств следует из лемм 3 и 1. В случае выполнения указанных неравенств функция $x(t) := \Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r; t) + M_{k_1} - \|\Phi(M_{k_2}, M_{k_3}, M_r)\|$ является искомой. Теорема доказана.

1. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. // В кн. А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — С. 252 – 263.
2. *Hadamard J.* Sur le maximum d'une fonction et de ses derivees // C. R. Soc. Math. France. — 1914. — **41**. — P. 68 – 72.
3. *Шилов Г. Е.* О неравенствах между производными // Сборник работ студ. науч. кружков МГУ. — 1937. — **1**. — С. 17 – 27.
4. *Родов А.М.* Зависимость между верхними гранями производных функций действительного переменного // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1946. — **10**. — С. 257 – 270.
5. *Родов А.М.* Достаточные условия существования функции действительного переменного с заданными верхними гранями модулей самой функции и её пяти последовательных производных // Ученые записки БГУ имени В.И. Ленина. Серия физико-математическая. — 1954. — **19**. — С. 65 – 72.
6. *Дзядык В.К., Дубовик В.А.* К проблеме А.Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. — 1974. — **26**, №3. — С. 300 – 317.
7. *Дзядык В.К., Дубовик В.А.* К неравенствам А.Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. — 1975. — **27**, №3. — С. 291 – 299.
8. *Бабенко В.Ф., Коваленко О.В.* О зависимости между нормой функции и нормами ее производных порядка k, $r-2$ и r, $0 < k < r-2$ // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №5. — С. 597 – 603.
9. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. — 1913. — **13**. — P. 43 – 49.
10. *Маторин А.П.* О неравенствах между максимумами абсолютных значений функций и ее производных на полуоси // Укр. мат. журн. — 1955. — **7**. — С. 262 – 266.

11. *Schoenberg I.J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on half line // Proc. of Conference on Approximation theory. Varna. — 1970. — P. 297 – 308.

12. *Babenko, V.F., Britvin, Y.E.* On Kolmogorov's problem about existence of a function with given norms of its derivatives // East J. Approx. — 2002. — **8**, №1. — P. 95 – 100.

13. *Оловянишников В.М.* К вопросу о неравенствах между верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Успехи Мат. Наук. — 1951. — **6**, №2/42. — С. 167 – 170.

14. *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Неравенства для производных монотонных функций // Приближение функций. Теорет. и прикл. аспекты: Сб. ст., посвящ. памяти проф. А.В. Ефимова. — МИЭТ.— 2003. — С. 199 – 211.

15. *Babenko V., Babenko Yu.* The Kolmogorov Inequalities for Multiply Monotone Functions Defined on a Half-line // East J. Approx. — 2005. —**11**, №2. — P. 169 – 186.

16. *Ятцелев М.Л.* Неравенство между четырьмя верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Математика. — 1998. — **4**. — С. 106 – 111.

17. *Babenko V., Babenko Yu.* On the Kolmogorov's problem for the upper bounds of four consecutive derivatives of a multiply monotone function // Constr. Approx. — 2007. — **26**, №1. — P. 83 – 92.

18. *Марков В.А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке // СПб. — 1892.

19. *Марков А.А.* Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Изв. АН. — СПб. — 1989. — **62**. — С. 1 – 24.

20. *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев: Наук. думка, 1992. — 304 с.