Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 148-160

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін–т математики НАН України, Київ)
О. В. Федуник-Яремчук (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using linear operators subjected to some conditions for some means of parametres p and q.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою лінійних операторів, які підпорядковані певним умовам, для деяких значень параметрів p та q.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1,...,x_d)$, в якому норма визначається наступним чином

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1,...,x_d)$ з нормою

$$||f||_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0\ , \quad j = \overline{1,d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, і $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta^l_h f(\cdot)||_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_1} \dots \Delta^l_{h_d} f(x) = \Delta^l_{h_d}(\dots(\Delta^l_{h_1} f(x)))$ — мішана різниця порядку l з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Отже, нехай $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4. Тоді, згідно з означенням [2]

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, ..., t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1,d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_{p}, які були розглянуті М.М. Пустовойтовим в [3].

Для подальших міркувань нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \Big)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f * A_s.$$

Отже, якщо $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l), то з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \le \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|A_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}, \quad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що рівності (1) і (2) були отримані в роботах [4] і [3] відповідно.

Відмітимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [5]).

Нижче ми будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r, j = \overline{1,d}$, і $0 < r < l$, а значить для функції $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1 – 4, а також умови (S) і (S_l).

А зараз наведемо означення величини, яка буде нами досліджуватись (див. [6]).

Для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ означимо

$$d^B_M(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \quad (4)$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, виконується нерівність $\left\| G e^{i(k,\cdot)} \right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m.

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d_M^B(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7— 11], в яких вивчались величини (4) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$ та H^Ω_p, і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

В даній роботі встановлюються точні за порядком оцінки величин $d_M^B(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$ при $(p,q) = (1,1), (\infty,\infty)$. Одержані оцінки доповнюють результати отримані в роботі [12].

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{ \ k = (k_1, \dots, k_d) : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \ j = \overline{1,d} \right\}.$$

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Враховуючи (3) множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \prod_{j=1}^{d} 2^{r s_j} s_j^{b_j} \leq N \right\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^{\perp}(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \ \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

В прийнятих позначеннях мають місце наступні твердження, які встановлені М. М. Пустовойтовим.

Лема 1[11]. *Кількість елементів множини $Q(N)$ рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N \big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1}.$$

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Лема 2 [13]. *Для кількості елементів множини $\Theta(N)$ має місце співвідношення*

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Лема 3 [13]. *Для функції $\Omega(t)$, яка визначена рівністю (3), при $r > 0$, $0 < p < \infty$ має місце співвідношення*

$$\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s}) \big)^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s}) \big)^p.$$

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів покладемо $M = |Q(N)|$. Тоді внаслідок леми 1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N \big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1},$$
$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r \big(\log M \big)^{b_1 + \ldots + b_d - (d-1)r}.$$

Має місце.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (3). Тоді при $0 < r < l$ має місце порядкова рівність*

$$d^B_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_1) \asymp M^{-r} \big(\log M \big)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1)\left(r + 1 - \frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (5)$$

Доведення. Встановимо в (5) оцінку зверху. З цією метою розглянемо наближення функції $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ поліномом виду

$$V_{Q(N)}(x) = \sum_{s\in\chi(N)} A_s(f,x).$$

Оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном $V_{Q(N)}(x)$, належить до $L_M(1)_q, 1 \leq q \leq \infty$. Врахувавши, що $f(x) = \sum\limits_s A_s(f,x)$ [14, с. 304], і скориставшись нерівністю Мінковського, матимемо

$$||f(\cdot) - V_{Q(N)}(\cdot)||_1 = \Big\| \sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} A_s(f,\cdot) \Big\|_1 \leq \sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} ||A_s(f,\cdot)||_1 =$$

$$= \sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \Omega^{-1}(2^{-s})||A_s(f,\cdot)||_1 \Omega(2^{-s}) = I_1.$$

Щоб оцінити I_1, розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $1 < \theta < \infty$. Застосовуючи до I_1 нерівність Гельдера з показником θ, а також використовуючи послідовно леми 3 і 2 одержимо

$$I_1 \leq \Big(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(f,\cdot)||_1^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Big)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \Big(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Big)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{s\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Big)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll N^{-1} \Big(\sum_{s\in\Theta(N)} 1 \Big)^{1-\frac{1}{\theta}} =$$

$$= N^{-1}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp N^{-1}\big(\log N\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)r}\big(\log M\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $\theta = 1$, матимемо

$$I_1 \leq N^{-1} \sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \Omega^{-1}(2^{-s})||A_s(f,\cdot)||_1 \ll$$

$$\ll N^{-1}\ ||f||_{B^{\Omega}_{1,1}} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)r}.$$

Таким чином, оцінка зверху в (5) встановлена.

Перейдемо до встановленння відповідної оцінки знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_1)$. При цьому розглянемо функцію, яка аналогічна функції з прикладу 7 роботи [7].

Нехай N достатньо велике. За допомогою аналогічних міркувань, що і в [15], можна показати, що існує множина $\Theta'(N) \subset \Theta(N)$ така, що для $s = (s_1, ..., s_d) \in \Theta'(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1,d} \ \text{ і } \ |\Theta'(N)| \asymp \big(\log N\big)^{d-1}.$$

Покладемо

$$v = [|\Theta'(N)|^{\frac{1}{d}}],$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Далі, розіб'ємо куб π_d на v^d кубів з довжиною ребра $\frac{2\pi}{v}$. Встановимо взаємнооднозначну відповідність між множиною $\overline{\Theta}(N) \subset \Theta'(N)$, $|\overline{\Theta}(N)| = v^d$ і утвореною множиною кубів. При цьому через $x^s \in \pi_d$ позначимо центр куба, що відповідає вектору $s \in \overline{\Theta}(N)$, і покладемо

$$u = 2^{\left[\frac{1}{d}\log|\Theta'(N)|\right]} \asymp \big(\log N\big)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Означимо через $K_n(t)$ ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, ..., k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2; \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1,d}. \end{cases}$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тоді існують число N і множина $\widetilde{\Theta}(N) \subset \overline{\Theta}(N)$ такі, що

$$|\widetilde{\Theta}(N)| \geq \frac{1}{2}|\overline{\Theta}(N)|,$$

і в кожному $\rho(s)$, $s \in \widetilde{\Theta}(N)$, знайдуться куби з центрами в k^s і довжинами ребер $2u$ такі, що для функції

$$g_1(x) = \sum_{s \in \widetilde{\Theta}(N)} e^{i(k^s,x)} \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j - x_j^s)$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_1(x+y^*) - Gg_1(x+y^*)\|_1 \gg \big(\log M\big)^{d-1}. \tag{6}$$

Доведення оцінки (6) проводиться за допомогою тих же міркувань, які використовувались при доведенні відповідної оцінки в прикладі 7 роботи [7].

Тепер повертаємось безпосередньо до оцінки знизу величини $d_M^B(B_{1,\theta}^{\Omega}, L_1)$. Розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_3 N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_1(x), \quad C_3 > 0,$$

і оцінимо $||g_2||_{B_{1,\theta}^{\Omega}}$.

Враховуючи, що внаслідок вибору параметра u

$$\|A_s(g_1,\cdot)\|_1 \ll \left\| \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j) \right\|_1 \leq C_4, \quad \forall s \in \widetilde{\Theta}(N), \quad C_4 > 0,$$

будемо мати

$$||g_2||_{B_{1,\theta}^{\Omega}} = \Bigg(\sum_{s \in \widetilde{\Theta}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_2,\cdot)||_1^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{s\in\widetilde{\Theta}(N)}\Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_1,\cdot)||_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{s\in\widetilde{\Theta}(N)}\Omega^{-\theta}(2^{-s})\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}|\widetilde{\Theta}(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1. \tag{7}$$

Таким чином, із (7) робимо висновок, що функція $g_2 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, з відповідною сталою $C_3 > 0$.

Далі, внаслідок (6), існує вектор y^* такий, що

$$\|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\|g_1(x+y^*) - Gg_1(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1}\big(\log N\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $1 \le \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (3). Тоді при $0 < r < l$ має місце порядкова рівність*

$$d^B_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{8}$$

Доведення. Оцінка зверху в (8) встановлюється аналогічно, як і оцінка зверху в теоремі 1.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. При цьому використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувалися у прикладі 2 роботи [7].

Розглянемо функцію

$$g_3(x) = \sum_{s\in\Theta'(N)}\mathcal{K}^s(x),$$

де множина $\Theta'(N)$ означена вище, а

$$\mathcal{K}^s(x) = e^{i(k^s,x)}\prod_{j=1}^{d}K_{2^{s_j-2}}(x_j),$$

$K_n(t)$ — ядро Фейєра.

Припустимо, що оператор G належить $\mathcal{L}_M(B)_\infty$. В роботі [12] встановлено, що існує вектор $y^* = (y_1^*, ..., y_d^*)$ такий, що

$$\|g_3(x-y^*) - Gg_3(x-y^*)\|_\infty \gg M. \tag{9}$$

Розглянемо функцію

$$g_4(x) = C_5 N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-...-\frac{b_d}{r}}\Big)^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_3(x),\ C_5>0.$$

Покажемо, що функція g_4 при відповідному виборі сталої C_5 належить до класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$.

Дійсно, скориставшись співвідношенням

$$||A_s(g_3,\cdot)||_\infty \ll \|\mathcal{K}^s(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{\|s\|_1},$$

де $\|s\|_1 = s_1 + ... + s_d$, $s_j \in \mathbb{N}$, будемо мати

$$||g_4||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} = \Bigg(\sum_{s\in\Theta'(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_4,\cdot)||_\infty^\theta\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-...-\frac{b_d}{r}}\Big)^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times\Bigg(\sum_{s\in\Theta'(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_3,\cdot)||_\infty^\theta\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-...-\frac{b_d}{r}}\Big)^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{s\in\Theta'(N)} 2^{\|s\|_1\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} = I_2.$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta'(N) \subset \Theta(N)$ виконуються співвідношення

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}}\prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}} \text{ і } s_j \asymp \log N,\ j=\overline{1,d},$$

будемо мати

$$I_2 \asymp \Big(N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r}} \Big)^{-1} \big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r}} |\Theta'(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \big(\log N\big)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Тепер, скориставшись співвідношенням (9), отримаємо

$$\|g_4(x - y^*) - Gg_4(x - y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg N^{-1} \Big(N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1} \Big)^{-1} \big(\log N\big)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} \times$$

$$\times \|g_3(x - y^*) - Gg_3(x - y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg M^{-r} \big(\log M\big)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1)r} M^{-1} \big(\log M\big)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} M =$$

$$= M^{-r} \big(\log M\big)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1)\left(r + 1 - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** *У випадку* $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$, *результати теорем 1 і 2 (для класів* $B^r_{p,\theta}, 1 \le \theta < \infty$*) отримані А. С. Романюком в* [9, 10].

***Зауваження* 2.** *Точні за порядком оцінки величин* $d^B_M(H^{\Omega}_p, L_q)$ *при значеннях параметрів* p *і* q*, які задовольняють умовам теорем 1 і 2, отримані М. М. Пустовойтовим в* [11].

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.

3. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35 – 48.

4. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692 – 704.

5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1989. — **187**. — С. 143 – 161.

6. *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, № 2. — С. 314 – 317.

7. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.

8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.

9. *Романюк А.С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008. — **199**, № 2. — С. 93 – 114.

10. *Романюк А.С.* Поперечники и наилучшие приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**. — С. 181 – 213.

11. *Пустовойтов Н.Н.* Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. — 2008. — **34**. — С. 187 – 224.

12. *Конограй А.Ф.* Оценки аппроксимативных характеристик классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 2013. — В печати.

13. *Пустовойтов Н.Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 1999. — **65**, № 1. — С. 107 – 117.

14. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

15. *Пустовойтов Н.Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — **29**. — С. 201 – 218.