Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 199-203

УДК 517.98+517.5

Е. И. Радзиевская (Национальный университет пищевых технологий, Киев)

ОБ ОЦЕНКАХ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ЕГО ЯДРА

We consider the estimates for singular numbers of a Hilbert–Schmidt integral operator in terms of the modules of continuity of its kernel.

Работа посвящена оценкам сингулярных чисел интегрального оператора через модули непрерывности его ядра.

Рассмотрим в $L_2[0;1]$ интегральный оператор

$$(Af)(t) := \int_0^1 a(t,s)f(s)\,ds, \quad f \in L_2[0;1], \tag{1}$$

с ядром Гильберта-Шмидта, т.е. $a(t,s)$ измеримая на $[0;1]\times[0;1]$ функция с суммируемым квадратом,

$$\int_0^1\int_0^1 |a(t,s)|^2\,dt\,ds < \infty.$$

Через $\lambda_k(A)$, как обычно, обозначают собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания их модулей; $s_k(A) = \sqrt{\lambda_k(AA^*)}$ — сингулярные числа (s-числа) оператора A, где A^* — оператор сопряженный к A.

В работе [1] было установлено, что если область значений оператора A лежит в пространстве непрерывных функций, то для сингулярных чисел (s-чисел) оператора A справедлива оценка

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\left(\frac{2}{r}, a\right), \quad r = m+1, m+2, \dots, \tag{2}$$

где $\omega_m(\delta, a)$ — модуль непрерывности порядка m ($m = 2, 3, ...$) ядра $a(t, s)$, определяемый следующим образом

$$\omega_m(\delta, a) := \sup_{f \in L_2, \|f\|_2 = 1} \ \sup_{0 \le \ h \le \delta} \ \sup_{0 \le \ t \le 1 - hm} |\Delta_h^m (Af)(t)|. \tag{3}$$

Здесь $\Delta_h^m (Af)(t)$ — m-я разность значения оператора A на функции f с шагом h а $0 \le \delta \le m^{-1}$, если $\delta > m^{-1}$ считаем, что $\omega_m(\delta, a) = \omega_m(m^{-1}, a)$.

В данной работе покажем, что если рассматривать второй модуль непрерывности, то в неравенстве (2) постоянные, находящиеся перед модулем непрерывности, можно значительно уменьшить, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 1. *Для s-чисел оператора A вида* (1), *область значений которого лежит в пространстве непрерывных функций, имеет место оценка*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le \omega_2^2 \left(\frac{1}{2(r-1)}, a \right), \quad r = 3, 4, ... \ . \tag{4}$$

Для доказательства теоремы потребуется следующий факт.

Лемма 1. *Пусть функции $a(s)$ и $f(s)$ принадлежат $L_2[0; 1]$. Тогда*

$$\sup_{f \in L_2, \|f\|_2 = 1} \int\limits_0^1 a(s) f(s)\, ds = \|a\|_2, \tag{5}$$

где $\|a\|_2$ — норма в $L_2[0; 1]$.

Утверждение леммы сразу следует из определения нормы линейного функционала в L^p.

Доказательство теоремы. Условие непрерывности функции $(Af)(t)$ для каждой f из $L_2[0; 1]$, означает, что функция $a(t, s)$, рассматриваемая как вектор-функция от $t \in [0; 1]$ со значениями (по s) в пространстве $L_2[0; 1]$, является непрерывной в слабом смысле. Поэтому при каждом $t_0 \in [0; 1]$ определена функция $a(t_0, s)$, которая принадлежит L_2. Тем самым для каждого натурального n определено ядро

$$a_n(t, s) := a\left(\frac{l}{n}, s\right)(l + 1 - nt) + a\left(\frac{l+1}{n}, s\right)(nt - l), \tag{6}$$

$$\frac{l}{n} \le t < \frac{l+1}{n}, \quad l = 0, ..., n-1, \quad 0 \le s \le 1.$$

Рассмотрим функцию

$$g(t) = \int_0^1 (a(t,s)f(s) - a_n(t,s))f(s)\,ds.$$

Из определения $a_n(t,s)$ имеем $g(\frac{l}{n}) = g(\frac{l+1}{n}) = 0$. Отсюда и из неравенства Баркилла [3, ст. 38] заключаем, что для любой $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 a(t,s)f(s)\,ds - \int_0^1 a_n(t,s)f(s)\,ds \right| \le \omega_{l,2} \left(\frac{1}{2n}, \int_0^1 a_n(t,s)f(s)\,ds \right)$$

для $\frac{l}{n} \le t < \frac{l+1}{n}$ с модулем непрерывности

$$\omega_{l,2}(\delta, b) := \sup_{0 \le \ h \le \delta} \ \sup_{\frac{l}{n} \le \ t \le \frac{l+h}{n} - 2h} \left| \Delta_h^2 b(t) \right|,$$

$0 \le \delta \le (2n)^{-1}$. Здесь b — произвольная непрерывная на отрезке $[\frac{l}{n}; \frac{l+1}{n}]$ числовая функция. Из этого неравенства, учитывая определение модуля непрерывности $\omega_2(\delta, a)$, а также утверждение леммы, имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |a(t,s) - a_n(t,s)|^2\,dt\,ds \le \omega_2^2 \left(\frac{1}{2n}, a \right). \tag{7}$$

Обозначим через A_n интегральный оператор с ядром $a_n(t,s)$ заданным равенствами (6). Область значений оператора A_n^* лежит в линейной оболочке $\overline{a\left(\frac{l}{n} + \frac{j}{n}, t\right)}$, $\quad l = 0, ..., n-1$, а $j = 0, 1$, поэтому размерность оператора A_n не превышает $n+1$, а значит, (см., например, [2, с. 49]), $s_{k+n+1}(A) \le s_k(A - A_n)$.

Учитывая эту оценку и замечая, что левая часть неравенства (7) определяет квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора $A - A_n$, получаем

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} s_k^2(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(A-A_n) \le \omega_2^2\left(\frac{1}{2n}, a\right).$$

и

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_r^2(A) \le \omega_2^2\left(\frac{1}{2(r-2)}, a\right).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Для сингулярных чисел оператора A вида* (1), *область значений которого лежит в пространстве непрерывных функций, справедлива оценка*

$$s_r(A) \le \left(\frac{2}{r-2}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_2\left(\frac{1}{r-1}, a\right), \quad r = 3, 4, \dots .$$

Доказательство. Для произвольного натурального числа $r \ge 2$ выполняется неравенство

$$s_r^2(A) \le \frac{1}{r-[\frac{r}{2}]} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^{r} s_k^2(A).$$

Отсюда и из неравенства (4) получаем оценки

$$s_r^2(A) \le \frac{1}{r-[\frac{r}{2}]} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^{\infty} s_k^2(A) \le \frac{1}{r-[\frac{r}{2}]}\omega_2^2\left(\frac{1}{2([\frac{r}{2}]-1)}, a\right)$$

и

$$s_r^2(A) \le \frac{2}{r-2}\omega_2^2\left(\frac{1}{r-1}, a\right),$$

доказывающие следствие 1.

Замечание. Утверждения теоремы 1 и следствия 1, в общем случае, несправедливы для $r = 1, 2$. Действительно, пусть ядро оператора $b(t,s) = 1 + ts$. Для него $\omega_2(\delta, b) \equiv 0$, а соответствующий этому ядру интегральный оператор является самосопряженным в L_2 и имет размерность, равную 2. Поэтому его сингулярные числа $s_1(A)$ и $s_2(A)$ отличны от нуля, а все остальные равны 0.

1. *Радзиевская Е.И.* Об оценках сингулярных чисел интегрального оператора Гильберта–Шмидта // Український математичний вісник. — 2012. — **9**, №1. — С. 114 — 124.

2. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.

3. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — Киев: Наукова думка, 1992.