Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 245-254

УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ КЛАСІВ $(\psi, \bar{\beta})$–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We calculate the least upper bounds for approximations in the metric of the space L_2 by linear methods of summation of Fourier series on classes of periodic functions $L^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ defined by sequences of multipliers $\psi = \psi(k)$ and shifts of argument $\bar{\beta} = \beta_k$.

Обчислено точні верхні межі наближень в метриці простору L_2 лінійними методами підсумовування рядів Фур'є класів періодичних функцій $L^{\psi}_{\bar{\beta},1}$, які задаються послідовностями мультиплікаторів $\psi = \psi(k)$ та зсувів аргументу $\bar{\beta} = \beta_k$.

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{L_p}$. Одиничну кулю в просторі L_p позначатимемо через B_p, тобто

$$B_p = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_{L_p} \le 1\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Нехай далі $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots,$ — довільні послідовності дійсних чисел такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_1$. Тоді через $L^{\psi}_{\bar{\beta},p}, 1 \le p \le \infty$, позначимо множину всіх 2π-періодичних функцій f, які майже скрізь зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)dt = \frac{a_0}{2} + \big(\varphi * \Psi_{\bar{\beta}}\big)(x), \ a_0 \in \mathbb{R}, \varphi \in B_p^0, \ (1)$$

де $B_p^0 = \{\varphi \in B_p : \ \varphi \perp 1\}$.

Функцію φ в зображенні (1) називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції f і позначають $f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x)$. Поняття $(\psi, \bar{\beta})$-похідної введено О.І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 142]). Якщо $\varphi \in B^0_1$, а $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_p$, то з нерівності Юнга для згорток (див. [1, с. 293]):

$$\|y*z\|_{L_p} \leq \frac{1}{\pi}\|y\|_{L_s}\|z\|_{L_q}, 1 \leq s \leq p \leq \infty,\ \frac{1}{q} = 1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p}, y \in L_s, z \in L_q,$$

випливає, що $L^{\psi}_{\bar{\beta},1} \subset L_p, 1 \leq p \leq \infty$. При $p = 2$ включення $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_2$ еквівалентне виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Розглянемо послідовності функцій $\lambda_k(\delta)$ і $\mu_k(\delta)$, які задані на деякій множині $E \subset \mathbb{R}$ з граничною точкою δ_0 і задовольняють умови

$$\begin{aligned} &\lambda_0(\delta) = 1, && \mu_0(\delta) = 0 && \forall \delta \in E, \\ &\lim_{\delta \to \delta_0} \lambda_k(\delta) = 1, && \lim_{\delta \to \delta_0} \mu_k(\delta) = 0 && k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

При довільному фіксованому $\delta \in E$ означимо лінійний оператор $U_\delta = U_\delta(\lambda; \mu)$, який кожній функції $f \in L^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ ставить у відповідність функцію

$$U_\delta(\lambda; \mu; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k(\delta)(a_k \cos kx + b_k \sin kx) +$$

$$+\mu_k(\delta)(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f.

У даній роботі розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$\mathcal{E}_\delta(L^{\psi}_{\bar{\beta},1}; \lambda; \mu)_{L_2} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\bar{\beta},1}} \|f(x) - U_\delta(\lambda; \mu; f; x)\|_{L_2}. \tag{4}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність $\psi = \psi(k)$ задовольняє умову (2), а послідовності функцій $\lambda_k(\delta)$ і $\mu_k(\delta)$ — умови (3). Тоді для довільної послідовності дійсних чисел $\bar{\beta} = \beta_k$ і довільного $\delta \in E \subset \mathbb{R}$*

$$\mathcal{E}_\delta(L^\psi_{\bar{\beta},1}; \lambda; \mu)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \big((1-\lambda_k(\delta))^2 + \mu_k^2(\delta)\big)\, \psi^2(k) \right)^{1/2}.$$

Доведення. Оскільки згідно з (1) для будь-якої $f \in L^\psi_{\bar{\beta},1}$

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \cos\left(k(x-t) - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) f^\psi_{\bar{\beta}}(t) dt,$$

$$-b_k \cos kx + a_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \sin\left(k(x-t) - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) f^\psi_{\bar{\beta}}(t) dt,$$

то майже скрізь виконується рівність

$$U_\delta(\lambda; \mu; f; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi_{\bar{\beta}}(x-t) U_\delta(\lambda; \mu; t) dt, \tag{5}$$

в якій $U_\delta(\lambda; \mu; t)$ — функція, ряд Фур'є якої можна представити у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \left(\lambda_k(\delta) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) + \mu_k(\delta) \sin\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right).$$

З рівностей (1) і (5) одержуємо

$$\mathcal{E}_\delta(L^\psi_{\bar{\beta},1}; \lambda; \mu)_{L_2} = \sup_{\varphi \in B_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \big(\Psi_{\bar{\beta}}(t) - U_\delta(\lambda; \mu; t) \big) dt \right\|_{L_2}.$$

Оскільки функція $\Psi_{\bar{\beta}}(t) - U_\delta(\lambda; \mu; t)$ ортогональна до будь-якої сталої, то

$$\mathcal{E}_\delta(L^\psi_{\bar{\beta},1}; \lambda; \mu)_{L_2} = \sup_{\varphi \in B_1} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \big(\Psi_{\bar{\beta}}(t) - U_\delta(\lambda; \mu; t) \big) dt \right\|_{L_2}.$$

Як відомо (див., наприклад, [2, наслідок Д 1.2., с. 392]), якщо $u \in L_p,\ 1 \le p \le \infty$, то

$$\|u\|_{L_p} = \sup_{g \in B_{p'}} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)u(t)dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{6}$$

Враховуючи співвідношення (6), інваріантність множини B_2 відносно зсуву аргументу та рівність Парсеваля, маємо

$$\mathcal{E}_\delta(L^\psi_{\bar\beta,1}; \lambda; \mu)_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in B_1} \sup_{g \in B_2} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \big(\Psi_{\bar\beta}(x-t) - U_\delta(\lambda; \mu; x-t)\big) dt dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{g \in B_2} \sup_{\varphi \in B_1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \big(\Psi_{\bar\beta}(x) - U_\delta(\lambda; \mu; x)\big) dx dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{g \in B_2} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \big(\Psi_{\bar\beta}(x) - U_\delta(\lambda; \mu; x)\big) dx \right\|_{L_\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{g \in B_2} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \big(\Psi_{\bar\beta}(x) - U_\delta(\lambda; \mu; x)\big) dx = \frac{1}{\pi} \big\| \Psi_{\bar\beta} - U_\delta(\lambda; \mu) \big\|_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \left((1 - \lambda_k(\delta)) \cos\left(kx - \frac{\beta_k \pi}{2}\right) + \mu_k(\delta) \sin\left(kx - \frac{\beta_k \pi}{2}\right) \right) \right\|_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \big((1 - \lambda_k(\delta))^2 + \mu_k^2(\delta) \big) \psi^2(k) \right)^{1/2}.$$

Теорему доведено.

Зауваження **1.** З теореми 1 даної роботи і теореми 1 з роботи [3] випливає, що

$$\mathcal{E}_\delta(L^\psi_{\bar\beta,1}; \lambda; \mu)_{L_2} = \mathcal{E}_\delta(C^\psi_{\bar\beta,2}; \lambda; \mu)_C,$$

де $\mathcal{E}_\delta(C^\psi_{\bar\beta,2};\lambda;\mu)_C = \sup\limits_{f\in C^\psi_{\bar\beta,2}} \|f(x) - U_\delta(\lambda;\mu;f;x)\|_C$, а $C^\psi_{\bar\beta,2} = C\cap L^\psi_{\bar\beta,2}$.

Таким чином, мають місце всі твердження по наближенню класів $L^\psi_{\bar\beta,1}$ в метриці простору L_2, які є аналогічними до тверджень, що стосуються рівномірних наближень класів $C^\psi_{\bar\beta,2}$, отриманих у [3]. Наведемо деякі з них.

Розглянемо лінійні поліноміальні методи наближення функцій з класів $L^\psi_{\bar\beta,1}$. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $\mathrm{M} = \|\mu_k^{(n)}\|$, $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots,$ — нескінченні трикутні матриці чисел такі, що:

$$\begin{gathered}
\lambda_0^{(n)} = 1, \qquad \mu_0^{(n)} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots,\\
\lambda_k^{(n)} = 0, \qquad \mu_k^{(n)} = 0, \qquad k = n+1, n+2,\ldots, \\
\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\mu_k^{(n)} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,
\end{gathered} \tag{7}$$

і лінійний оператор $U_n = U_n(\Lambda;\mathrm{M})$ кожній функції $f\in L_1$ ставить у відповідність тригонометричний поліном

$$U_n(\Lambda;\mathrm{M};f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) +$$

$$+\mu_k^{(n)}(-b_k\cos kx + a_k\sin kx)), \tag{8}$$

де a_k *і* b_k — коефіцієнти Фур'є функції f.

Для методів U_n теорема 1 формулюється таким чином.

Теорема 1′. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умову* (2)*, а* $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ *і* $\mathrm{M} = \|\mu_k^{(n)}\|$ *— умови* (7)*. Тоді для довільної послідовності дійсних чисел* $\bar\beta = \beta_k$ *і довільного* $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\bar\beta,1};\Lambda;\mathrm{M})_{L_2} = \sup_{f\in L^\psi_{\bar\beta,1}} \|f(x) - U_n(\Lambda;\mathrm{M};f;x)\|_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left((1-\lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2\right)\psi^2(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^2(k)\right)^{1/2}. \tag{9}$$

З теореми $1'$ для деяких класичних лінійних методів наближення випливають такі наслідки.

Якщо

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \qquad i \quad \mu_k^{(n)} \equiv 0,$$

то тригонометричний поліном $U_n(\Lambda; \mathrm{M}; f; x)$ є частинною сумою Фур'є $S_n(f;x)$ функції f порядку n. В цьому випадку

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; \Lambda; \mathrm{M})_{L_2} = \mathcal{E}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; S_n)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{1/2}. \qquad (10)$$

Для класів $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ при $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, з (10) одержуємо

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; S_n)_{L_2} = \frac{q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}. \qquad (11)$$

При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, рівність (11) уточнює асимптотичну рівність (12) з [4] у тому сенсі, що зазначена рівність (12) з [4] при $p = 2$ залишиться вірною, якщо в ній вилучити залишковий член.

З (9) і (10) випливає, що найкращим лінійним методом наближення вигляду (8) класів $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ у метриці простору L_2 є метод Фур'є. Цей факт можна отримати з інших міркувань. Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, і

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_{L_p}$$

— найкраще наближення функції f в метриці простору L_p тригонометричними поліномами порядку не вищого ніж n.

Нехай далі $\mathfrak{N} \subset L_p$ і U_n — лінійний оператор вигляду (8). Тоді величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{L_p} = \inf_{U_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - U_n(f)\|_{L_p} \qquad (12)$$

називають найкращим лінійним наближенням класу $\mathfrak{N}$ за допомогою лінійних операторів вигляду (8) у метриці простору L_p, а оператор U_n^*, який реалізує inf у правій частині (12), називається найкращим лінійним оператором наближення класу $\mathfrak{N}$.

Виконується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, *а послідовності* $\psi = \psi(k)$ *і* $\bar\beta = \beta_k$ *такі, що* $\psi(k) \ne 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *і* $\Psi_{\bar\beta} \in L_p$. *Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_{L_p}. \tag{13}$$

Доведення. Неважко переконатися, що якщо $\psi(k)\neq 0$ для $\forall k\in\mathbb{N}$, то для будь-якої $f \in L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ і довільного тригонометричного полінома з нульовим середнім значенням $T^0_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \gamma_k \sin kt)$, $\alpha_k,\ \gamma_k \in \mathbb{R}$, згортка

$$\frac{a_0}{2} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t) T^0_n(t) dt \tag{14}$$

зображується у вигляді полінома $U_n(\Lambda; \mathrm{M}; f; x)$, означеного в (8), при

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\alpha_k}{\psi(k)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} + \frac{\gamma_k}{\psi(k)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2},$$

$$\mu_k^{(n)} = \frac{\gamma_k}{\psi(k)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} - \frac{\alpha_k}{\psi(k)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2};$$

і навпаки, довільний тригонометричний поліном $U_n(\Lambda; \mathrm{M}; f; x)$ вигляду (8) зображується у вигляді згортки (14) з поліномом $T^0_n(t)$, коефіцієнти якого мають вигляд

$$\alpha_k = \psi(k) \left(\lambda_k^{(n)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} - \mu_k^{(n)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2} \right),$$

$$\gamma_k = \psi(k) \left(\lambda_k^{(n)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2} + \mu_k^{(n)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} \right).$$

Тому, з урахуванням (1), (8) і (12), маємо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p} = \inf_{U_n} \sup_{f\in L^{\psi}_{\bar\beta,1}} \|f - U_n(f)\|_{L_p} =$$

$$= \inf_{T_n^0} \sup_{f \in L^{\psi}_{\bar\beta,1}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t) \left(\Psi_{\bar\beta}(t) - T_n^0(t)\right) dt \right\|_{L_p} =$$

$$= \inf_{T_n^0} \sup_{\varphi \in B_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \left(\Psi_{\bar\beta}(t) - T_n^0(t)\right) dt \right\|_{L_p}.$$

Враховуючи, що $(\Psi_{\bar\beta} - T_n^0) \perp 1$, співвідношення (6) та інваріантність $B_{p'}$ відносно зсуву аргумента, одержуємо

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \sup_{\varphi \in B_1} \sup_{g \in B_{p'}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \left(\Psi_{\bar\beta}(x-t) - T_n^0(x-t)\right) dt dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \sup_{g \in B_{p'}} \sup_{\varphi \in B_1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \left(\Psi_{\bar\beta}(x-t) - T_n^0(x-t)\right) dx dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \sup_{g \in B_{p'}} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \left(\Psi_{\bar\beta}(x) - T_n^0(x)\right) dx \right\|_{L_\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \sup_{g \in B_{p'}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \left(\Psi_{\bar\beta}(x) - T_n^0(x)\right) dx.$$

Як відомо з [2, с. 27], для довільної функції $u \in L_p, 1 \le p \le \infty$, має місце співвідношення двоїстості:

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|u - \alpha\|_{L_p} = \sup_{g \in B^0_{p'}} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) u(t) dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{15}$$

Оскільки $(\Psi_{\bar\beta} - T_n^0) \perp 1$, то в силу (15)

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \sup_{g \in B^0_{p'}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \left(\Psi_{\bar\beta}(x) - T_n^0(x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \inf_{T_n^0} \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\Psi_{\bar\beta}(t) - T_n^0(t) - \alpha\|_{L_p} = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_{L_p}.$$

Теорему 2 доведено.

З міркувань, використаних при доведенні теореми 2, випливає також, що при $\psi(k) \neq 0$ для $\forall k \in \mathbb{N}$, для класу $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ серед усіх лінійних методів наближення U_n вигляду (8) у метриці простору L_p найкращим є метод $U_n^*(\Lambda; \mathrm{M}; f; x)$, що породжений системою чисел

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\alpha_k^*}{\psi(k)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} + \frac{\gamma_k^*}{\psi(k)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2},$$

$$\mu_k^{(n)} = \frac{\gamma_k^*}{\psi(k)} \cos\frac{\beta_k\pi}{2} - \frac{\alpha_k^*}{\psi(k)} \sin\frac{\beta_k\pi}{2},$$

де α_k^* і γ_k^* — коефіцієнти полінома найкращого наближення твірного ядра $\Psi_{\bar\beta}$ у метриці простору L_p. Оскільки $E_n(\Psi_{\bar\beta})_2 = \|\Psi_{\bar\beta} - S_n(\Psi_{\bar\beta})\|_2$, то найкращим лінійним методом наближення U_n^* класів $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ у метриці простору L_2 є метод Фур'є.

Наведемо наслідок з теореми $1'$ для методу Валле Пуссена. Нехай $n = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 \le m \le n,\ m \in \mathbb{N}$, і

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n-m, \\ 1 - \frac{k-n+m}{m+1}, & n-m < k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \qquad \mu_k^{(n)} \equiv 0.$$

Тоді поліном $U_n(\Lambda; \mathrm{M}; f; x)$ вигляду (8) є сумою Валле Пуссена $V_{n,m}(f; x)$ функції f і згідно з (9)

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; \Lambda; \mathrm{M})_{L_2} = \mathcal{E}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; V_{n,m})_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=n-m+1}^{n} (k-n+m)^2 \psi^2(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{1/2}, \quad (16)$$

В [5, с. 1680] доведено, що при $0 < q < 1$

$$\frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=n-m+1}^{n} (k-n+m)^2 q^{2k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{2k} =$$

$$= \frac{q^{2(n-m+1)}(1+q^2-q^{2(m+1)}(2m+3-q^2(2m+1)))}{(m+1)^2(1-q^2)^3}. \qquad (17)$$

З (16) і (17) для класів $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ при $\psi(k)=q^k$, $0<q<1$, отримуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\bar\beta,1};V_{n,m})_{L_2}=$$

$$= \frac{q^{n-m+1}}{\sqrt{\pi}(m+1)}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2(m+1)}(2m+3-q^2(2m+1))}{(1-q^2)^3}}. \qquad (18)$$

При $\beta_k\equiv\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$, рівність (18) уточнює асимптотичну рівність (71), отриману в [5]. А саме, зазначена рівність (71) з [5] залишається вірною, якщо в ній вилучити залишковий член.

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
2. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 423 с.
3. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi,\bar\beta)$-диференційовних функцій лінійними методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2011. — **8**, №1.— С. 181 – 189.
4. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 10. — С. 1395 – 1408.
5. *Сердюк А.С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральной метриках // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 12. — С. 1672 – 1686.