УДК 517.5

А. Л. Шидліч* (Ін–т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ ДЛЯ ДЕЯКИХ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

We obtain the exact order estimates of certain quantities, which are expressions of the important approximative characteristics of the spaces S^p.

В роботі отримано точні порядкові оцінки деяких величин, в термінах яких виражаються значення важливих апроксимативних характеристик просторів S^p.

1. Вступ. Нехай $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довільна незростаюча додатна числова послідовність, для якої

$$\lim_{k\to+\infty} \Psi(k) = 0. \tag{1.1}$$

В роботі вивчається поведінка при $n \to \infty$ величин $H_n(\Psi, s)$, котрі при $s \in (0, 1]$ задаються рівністю

$$H_n(\Psi, s) = \sup_{l>n} (l-n) \bigg(\sum_{k=1}^{l} \Psi^{-s}(k) \bigg)^{-\frac{1}{s}}, \tag{1.2}$$

а при $s \in (1, \infty)$ — рівністю

$$H_n(\Psi, s) = \bigg((l^* - n)^{s'} \bigg(\sum_{j=1}^{l} \Psi^{-s}(j) \bigg)^{-s'/s} + \sum_{j=l^*+1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) \bigg)^{1/s'}, \tag{1.3}$$

в якій $1/s + 1/s' = 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) < \infty, \tag{1.4}$$

*Робота виконана за часткової підтримки Гранту НАН України для молодих вчених.

а число l^* однозначно визначається співвідношенням

$$\Psi^{-s}(l^*) \leq \frac{1}{l^* - n} \sum_{j=1}^{l^*} \Psi^{-s}(j) < \Psi^{-s}(l^* + 1). \tag{1.5}$$

Зауважимо, що в термінах подібних величин формулюються розв'язки багатьох задач теорії апроксимації (див., наприклад, [1, 2 (гл. XI), 3-7]). Зокрема, Л.Б. Софман [3, 4, див. також 5 (гл.VI)] показав, що колмогорівський поперечник $d_n(O_\alpha, H)$ октаедра O_α (який визначається додатною спадною до нуля числовою послідовністю $\alpha = \{\alpha_k\}_{j=1}^{\infty}$) у гільбертовому просторі H обчислюється за формулою

$$d_n(O_\alpha, H) = \sup_{l>n} \sqrt{\frac{l-n}{\sum\limits_{j=1}^{l} \bar{\alpha}_j^{-2}}} = \sqrt{H_n(\bar{\alpha}^2, 1)},$$

де $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка послідовності $|\alpha_j|$. Фан Генсун та Кіен Ліксін [6] отримали аналогічні формули для обчислення точних значень гельфандівських, інформаційних та деяких інших поперечників деяких функціональних класів в просторах l_p. О.І. Степанець в роботах [1, 2 (гл. XI)] показав, що значення найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів в просторах S^p збігаються за певних умов зі значеннями величин $H_n(\Psi, s)$ (детальніше ці результати будуть розглянуті в підрозділі 4). Тому задача про знаходження порядкових при $n \to \infty$ оцінок для величин $H_n(\Psi, s)$ є на наш погляд актуальною.

У випадку, коли послідовності $\Psi = \Psi(k)$ є слідами на множині натуральних чисел деяких опуклих функцій, порядкові оцінки для величин $H_n(\Psi, s)$ було отримано в [8, 9], а для їх інтегральних аналогів — в роботі [7]. В даній роботі розглядається випадок, коли послідовності Ψ є ступінчастими, а впорядковані множини їх значень є слідами на множині натуральних чисел деяких додатних функцій, які спадають до нуля швидше довільної геометричної прогресії.

2. Основні результати. Нехай $d \in \mathbb{N}$; M, c_1 і c_2 — деякі додатні числа; $\nu = \{\nu_i\}_{i=0}^{\infty}$ — довільна зростаюча послідовність цілих невід'ємних чисел таких, що $\nu_0 := 0$, а при всіх m, більших ніж деяке число k_0, виконується умова

$$M(m-c_1)^d < V_m := \sum_{i=0}^{m} \nu_i \le M(m+c_2)^d. \qquad (2.1)$$

Тоді через $S_d(\nu, M) = S_d(\nu, M, c_1, c_2)$ позначимо множину всіх додатних незростаючих послідовностей $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умову (1.1) і зображуються у вигляді

$$\Psi(k) = \psi(m), \quad k \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad (2.2)$$

де ψ — спадна послідовність значень послідовності Ψ.

Будемо вважати послідовності ψ слідом на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких спадних додатних функцій $\psi(t)$ від неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$. Крім цього, позначимо через $\mathfrak{M}''_\infty$ множину всіх додатних опуклих вниз функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$, які задовольняють умови

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0 \qquad (2.3)$$

і

$$\psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0, \quad \psi'(t) := \psi'(t+). \qquad (2.4)$$

Зазначимо, що природними представниками множини $\mathfrak{M}''_\infty$ є, зокрема, функції $\exp(-\beta t^s)$, $\beta > 0$, при $s > 1$.

Теорема 2.1. *Нехай $s \in (1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}''_\infty$, яка при $\alpha = 1$ задовольняє умову*

$$k^{(d-1)/\alpha} \psi(k+1)/\psi(k) \to 0, \quad k \to \infty. \qquad (2.5)$$

Тоді при всіх $n \in [V_{m-1}, V_m)$ має місце оцінка[1]

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m) \frac{V_m - n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}. \qquad (2.6)$$

[1]Тут і далі для додатних послідовностей $a(m)$ та $b(m)$ вираз "$a(m) \asymp b(m)$" означає, що при всіх $m \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $a(m) \le K_2 b(m)$ (в цьому випадку пишемо "$a(m) \ll b(m)$") і $a(m) \ge K_1 b(m)$ (в такому випадку пишемо "$a(m) \gg b(m)$").

Через K, K_1, $K_2, \ldots$ скрізь в роботі позначаються деякі додатні сталі, що не залежать від величин, які є у розглядуваному випадку параметрами (в данному випадку — від змінної m).

Зазначимо, що у випадку, коли для послідовності $\Psi \in S_d(\nu, M)$ послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ, що задовольняє умову (2.4), ряд в (1.4) збігається. Дійсно, в такому випадку внаслідок теореми 2 роботи [10] для довільного $\beta > 0$ маємо $\psi(t) \ll t^{-\beta}$ і тому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} k^{-s'\beta} < \infty.$$

Зауваження 2.1. Якщо виконуються умови теореми 2.1 і $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то внаслідок (2.1) маємо

$$(V_m - V_{m-1}) \asymp m^{d-1} \asymp n^{\frac{d-1}{d}}. \tag{2.7}$$

Тому при всіх $n \in [V_{m-1}, V_m)$ виконується співвідношення

$$\frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{sd}}} \ll H_n(\Psi, s) \ll \psi(m) n^{\frac{d-1}{d}(1-\frac{1}{s})}. \tag{2.8}$$

У випадку, коли $s \in (0, 1]$, має місце наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $s \in (0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}''_\infty$, яка задовольняє умову (2.5) при $\alpha = s$. Тоді*

1) при $n = V_{m-1}$ справджується оцінка

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m); \tag{2.9}$$

2) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$ таких, що

$$s(V_m - V_{m-1}) \geq V_m - n, \tag{2.10}$$

справджується оцінка (2.6);

3) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, що не задовольняють умову (2.10),

$$H_n(\Psi, s) \asymp \frac{\psi(m)}{(n - V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{2.11}$$

У випадку, коли послідовність Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а впорядкована множина її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ, яка спадає до нуля не швидше деякої степеневої функції, аналогічні оцінки величин $H_n(\Psi, s)$ були отримані в роботі [11] (див. також [12]).

3.1. Доведення теореми 2.2. Розглянемо спочатку випадок, коли $s \in (0, 1]$. Для довільного $l \in \mathbb{N}$ через k_l позначимо номер такий, що

$$V_{k_l - 1} < l \le V_{k_l}. \tag{3.1}$$

Тоді внаслідок (2.2) величини $H_n(\Psi, s)$ можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi, s) = \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} (l - n) \bigg(\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\Psi^s(j)} \bigg)^{-\frac{1}{s}} =$$

$$= \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} (l - n) \bigg(\sum_{k=1}^{k_l - 1} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} + \frac{l - V_{k_l - 1}}{\psi^s(k_l)} \bigg)^{-\frac{1}{s}} =: \widetilde{H}_n(\psi, s). \tag{3.2}$$

На підставі (2.1) маємо

$$\nu_k = V_k - V_{k-1} \asymp k^{d-1}, \tag{3.3}$$

звідси

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)}.$$

Оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$, то при всіх $t \ge 1$

$$\psi^s(t) \le K_1 |(\psi^s(t))'|.$$

Тому при всіх $l \in \mathbb{N}$

$$\frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} \le \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \le \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} + \int_1^l \frac{t^{d-1} dt}{\psi^s(t)} \le \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} +$$

$$+K_1 l^{d-1} \int\limits_1^l \frac{|(\psi^s(t))'|dt}{\psi^{2r}(t)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} + K_1 l^{d-1}\left(\frac{1}{\psi^s(l)} - \frac{1}{\psi^s(1)}\right) \ll \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}.$$

Отже, для довільного $s > 0$

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{3.4}$$

Підставивши оцінку (3.4) у співвідношення (3.2), отримуємо

$$\widetilde{H}_n(\psi, s) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} (l-n)\left(\frac{(k_l-1)^{d-1}}{\psi^s(k_l-1)} + \frac{l-V_{k_l-1}}{\psi^s(k_l)}\right)^{-\frac{1}{s}}.$$

Оскільки функція ψ задовольняє умову (2.5) з $\alpha = s$, то

$$\widetilde{H}_n(\psi, s) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} \frac{\psi(k_l)(l-n)}{(l-V_{k_l-1})^{\frac{1}{s}}}. \tag{3.5}$$

Далі, якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то внаслідок виконання умови (2.5) та (3.3) робимо висновок, що при відшуканні точної верхньої межі в (3.5) достатньо обмежитися множиною натуральних чисел $l > n$ з проміжку $(V_{m-1}, V_m]$. Таким чином, з урахуванням (2.2) та (3.1) отримуємо

$$\sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} \frac{\psi(k_l)(l-n)}{(l-V_{k_l-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp \psi(m) \sup_{l\in\mathbb{N},\, l\in[n+1,V_m]} \frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp$$

$$\asymp \psi(m) \sup_{l\in[n+1,V_m]} \frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}}. \tag{3.6}$$

Далі, якщо $n = V_{m-1}$, то функція

$$\frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} = (l-n)^{1-\frac{1}{s}}$$

не зростає при довільних $l > n$, тому в цьому випадку (внаслідок (3.5) та (3.6)) справджується співвідношення (2.9).

Нехай тепер $n > V_{m-1}$. Якщо $s = 1$, то функція

$$h(l,s) := \frac{l-n}{(l-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}}$$

при $l > n$ не спадає і тому

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,1) = h(V_m,1) = \frac{V_m - n}{V_m - V_{m-1}}. \tag{3.7}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.2), (3.5)–(3.7), з урахуванням (2.7) робимо висновок, що

$$H_n(\Psi,s) \asymp \psi(m)\frac{V_m-n}{V_m-V_{m-1}} \asymp \psi(m)\frac{V_m-n}{n^{\frac{d-1}{d}}}.$$

Якщо $s \in (0,1)$, то функція $h(l,s)$ має при $l > n$ єдину критичну точку

$$l^* = \frac{n - sV_{m-1}}{1-s},$$

яка є її точкою максимуму. Функція $h(l,s)$ не спадає при $l \in (n, l^*)$ і не зростає при $l > l^*$.

Звідси випливає, що коли $l^* \geq V_m$, що рівносильно умові (2.10), то

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,s) = h(V_m,s) = \frac{V_m-n}{(V_m-V_{m-1})^{\frac{1}{s}}} \asymp \frac{V_m-n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}. \tag{3.8}$$

Якщо ж $l^* < V_m$, тобто умова (2.10) не виконується, то

$$\sup_{l\in[n+1,V_m]} h(l,s) = h(l^*,s) = \frac{s(1-s)^{\frac{1}{s}-1}}{(n-V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{1}{(n-V_{m-1})^{\frac{1}{s}-1}}.$$

Об'єднуючи співвідношення (3.2), (3.5), (3.6) та (3.8), робимо висновок, що коли при даному $s \in (0,1)$ виконується умова (2.10), то має місце оцінка (2.6). Якщо ж умова (2.10) не виконується, то аналогічно справджується оцінка (2.11).

3.2. Доведення теореми 2.1. Нехай тепер $s \in (1,\infty)$. Внаслідок (1.5) маємо $\Psi(l^*+1) > \Psi(l^*)$. Тому якщо функція $\Psi(t)$ задається у вигляді (2.2), а $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то з огляду на монотонність функції ψ та (3.1) отримуємо $l^* = V_{k_{l^*}} \geq V_m$. При цьому умова (1.5) має вигляд

$$\psi^{-s}(k_{l^*}) \leq \frac{1}{l^* - n} \sum_{j=1}^{k_{l^*}} \frac{\nu_j}{\psi^s(j)} < \psi^{-s}(k_{l^*} + 1). \tag{3.9}$$

Внаслідок (3.4) та умови (2.5) при достатньо великих n

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\nu_j}{\psi^s(j)} \asymp \frac{m^{d-1}}{\psi^s(m)} < \psi^{-s}(m+1). \tag{3.10}$$

Звідси робимо висновок, що $l^* = V_m$.

Таким чином, при достатньо великих $n \in [V_{m-1}, V_m)$ величини $H_n(\Psi, s)$, $s \in (1, \infty)$, можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi, s) = \Bigg((V_m - n)^{s'} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \right)^{-s'/s} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \Bigg)^{1/s'} := \widetilde{H}_n(\psi, s), \tag{3.11}$$

де $s \in (1, \infty)$, $1/s + 1/s' = 1$.

Покажемо тепер, що для функцій $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і будь-яких $s' \in (1, \infty)$ має місце співвідношення

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \asymp (l+1)^{d-1} \psi^{s'}(l+1). \tag{3.12}$$

Внаслідок (3.3) маємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \gg (l+1)^{d-1} \psi^{s'}(l+1). \tag{3.13}$$

З іншого боку, похідна функції

$$h(t) := t^{d-1} \psi^{s'}(t), \quad t \geq 1,$$

має вигляд

$$h'(t) = s'\psi^{s'}(t)t^{d-2}\left(\frac{d-1}{s'} - \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\right).$$

Тому при достатньо великих t функція $h(t)$ спадає і виконується співвідношення

$$h(t) \le K|h'(t)|.$$

Звідси з урахуванням (3.3) отримуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \ll (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1) + \int\limits_{l+1}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt \ll$$

$$\ll (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1) + K\int\limits_{l+1}^{\infty} |h'(t)|dt \asymp (l+1)^{d-1}\psi^{s'}(l+1). \quad (3.14)$$

Із співвідношень (3.13) та (3.14) випливає (3.12).

Об'єднуючи співвідношення (3.10)–(3.12), робимо висновок, що

$$H_n(\Psi, s) \asymp \left(\psi^{s'}(m)(V_m - n)^{s'} m^{-\frac{s'(d-1)}{s}} + m^{d-1}\psi^{s'}(m+1)\right)^{\frac{1}{s'}}, \quad (3.15)$$

звідки з урахуванням умови (2.5) та (2.7) отримуємо

$$H_n(\Psi, s) \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{m^{\frac{d-1}{s}}} \asymp \psi(m)\frac{V_m - n}{n^{\frac{d-1}{sd}}}. \quad (3.16)$$

Теорему 2.1 доведено.

4. Застосування отриманих результатів до оцінок апроксимативних характеристик просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$.

4.1. Нехай d — фіксоване натуральне число, $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{Z}^d$ — множини усіх впорядкованих наборів $\mathbf{k}:=(k_1, \dots, k_d)$ відповідно із d дійсних та цілих чисел і $\mathbb{T}^d := [0, 2\pi]^d$.

Нехай далі $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$ функцій 2π-періодичних по кожній змінній зі скінченною нормою

$$||f||_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}.$$

Покладемо $(\mathbf{k},\mathbf{x}) := k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_dx_d$ і для довільної функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ означимо її коефіцієнти Фур'є формулою

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Через l_p^N, $N = 1, 2, \ldots$, $0 < p \le \infty$, позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$, для яких є скінченною l_p-норма (квазінорма)

$$|\mathbf{x}|_p := ||\mathbf{x}||_{l_p} = \begin{cases} \Big(\sum_{k=1}^N |x_k|^p \Big)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{1\le i\le N} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Простір $S^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, (див., наприклад, [2 (гл. XI)]) — це простір всіх функцій $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, для яких

$$||f||_{S^p(\mathbb{T}^d)} := ||\{\widehat{f}(\mathbf{k})\}_{k\in\mathbb{Z}^d}||_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \Bigg(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \Bigg)^{1/p} < \infty. \qquad (4.1)$$

Функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ та $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ є еквівалентними в просторі $S^p(\mathbb{T}^d)$, якщо $\|f - g\|_{S^p(\mathbb{T}^d)} = 0$.

Нехай $\psi = \psi(t)$, $t \ge 1$, — довільна додатна спадна функція, $\psi(0) := \psi(1)$ і $0 < q, r \le \infty$. В даному підрозділі наведено застосування отриманих вище результатів до знаходження точних порядкових оцінок деяких важливих апроксимативних характеристик в просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$ класів

$$\mathcal{F}_{q,r}^{\psi} := \Big\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) \;\;:\;\; ||\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}||_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \le 1 \Big\}.$$

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$ і $q = 1$, класи $\mathcal{F}_{q,\infty}^{\psi} =: \mathcal{F}_{q,\infty}^{s}$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. Якщо ж $q = 2$, то класи $\mathcal{F}_{2,\infty}^{s}$ еквівалентні одиничним кулям відомих класів Соболєва W_2^s. Апроксимативні характеристики класів $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ для різних $r \in (0, \infty]$ і різних функцій ψ досліджувались, зокрема, в роботах [11]–[16].

4.2. Нехай тепер f — довільна функція з простору $L_1(\mathbb{T}^d)$. Позначимо через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^{\infty} = \{\mathbf{k}(l,f)\}_{k=1}^{\infty}$ перестановку чисел $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ таку, що

$$|\widehat{f}(\mathbf{k}(1))| \geq |\widehat{f}(\mathbf{k}(2))| \geq \dots . \tag{4.2}$$

Якщо така перестановка не єдина, то через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ позначимо будь-яку з перестановок, яка задовольняє умову (4.2).

Основними апроксимативними величинами для функцій $f \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$, які розглядаються в даній роботі, є наступні величини:

$$||f - G_n(f)||_X := ||f(\cdot) - \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(\mathbf{k}(l)) e^{i(\mathbf{k}(l),\cdot)}||_X, \tag{4.3}$$

$$e_n^{\perp}(f)_X := \inf_{\gamma_n} ||f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\cdot)}||_X \tag{4.4}$$

та

$$e_n(f)_X := \inf_{\gamma_n, c_{\mathbf{k}}} ||f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\cdot)}||_X, \tag{4.5}$$

де X — один із просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$ або $S^p(\mathbb{T}^d)$, γ_n — довільний набір із n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, c_k —довільні комплексні числа; за умови, що $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi} \subset X$.

Величини (4.5) та (4.4) називають відповідно найкращим n-членним тригонометричним та найкращим n-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f в просторі X, а величину (4.3) — наближенням в просторі X функції f за допомогою "greedy" апроксимант.

Вивчення величин вигляду (4.3)–(4.5) бере свій початок від роботи С.Б. Стєчкіна [17]. Порядкові оцінки при $n \to \infty$ таких величин на різних класах функцій однієї та багатьох змінних встановлювались багатьма авторама. З бібліографією робіт, в яких отримуються подібні результати, можна ознайомитись, зокрема, в [18] та [19].

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з простору X, то покладають

$$e_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X := \sup_{f\in\mathfrak{N}} e_n^{\perp}(f)_X \quad \text{та} \quad e_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f\in\mathfrak{N}} e_n(f)_X .$$

Слід також зазначити, що для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ має місце співвідношення

$$e_n(f)_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le e_n^{\perp}(f)_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^d)}, \tag{4.6}$$

а для довільної функції $f \in S^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, внаслідок (4.1) — співвідношення

$$e_n(f)_{S^p(\mathbb{T}^d)} = e_n^{\perp}(f)_{S^p(\mathbb{T}^d)} = ||f - G_n(f)||_{S^p(\mathbb{T}^d)}. \tag{4.7}$$

Поряд з величинами (4.3)–(4.5) для функцій $f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ природно також розглянути величини

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X := ||f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\cdot)}||_X, \tag{4.8}$$

де, як і раніше, X — один із просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$ або $L_p(\mathbb{T}^d)$, γ_n — довільний набір із n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, а також величини

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X := \inf_{\gamma_n} \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X = \inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X, \tag{4.9}$$

за умови, що $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset X$. Величини $\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X$ та $\mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X$ називають наближенням в просторі X відповідно функції f та класу $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ сумами Фур'є порядку n, гармоніки яких взяті із множини γ_n. Величини $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X$ можна називати ортопроекційним тригонометричним поперечником порядку n класу $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ в просторі X.

З означення величин $e_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X$, $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X$ та $\mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X$ випливає, що для довільного набору $\gamma_n \subset \mathbb{Z}^d$

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X \le \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X \le \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_X. \tag{4.10}$$

4.3. Точні значення величин $e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$, а отже, і величин $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} ||f - G_n(f)||_{S^p(\mathbb{T}^d)}$ та $e_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$ при будь-яких $0 < p$, $q < \infty$ випливають із результатів О.І. Степанця [1; 2, гл. XI]. Зокрема, із теореми 9.1 роботи [2, гл. XI] випливає, що для будь-яких $0 < q \le p < \infty$

та довільної додатної функції $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, яка задовольняє умову (2.3) при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \sup_{l>n}(l-n)(\sum_{j=1}^{l} \bar{\psi}^{-q}(j))^{-\frac{p}{q}}, \tag{4.11}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$; якщо ж $0 < p < q < \infty$, а додатна функція $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, задовольняє умову

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(|\mathbf{k}|_r) < \infty, \tag{4.12}$$

то із теореми 9.4 роботи [2, гл. XI] випливає, що

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \left((l^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}^{-q}(k)\right)^{\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=l^*+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{4.13}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, а число l^* вибране з умови

$$\bar{\psi}^{-q}(l^*) \leq \frac{1}{l^*-n} \sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}^{-q}(k) < \bar{\psi}^{-q}(l^*+1).$$

Враховуючи позначення (1.2) та (1.3), співвідношення (4.11) та (4.13) можна записати у вигляді

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = H_n(\bar{\psi}^p, q/p), \quad 0 < p,\, q < \infty.$$

Далі, важливим при формулюванні результатів є виконання наступної умови: кількість елементів $V_m := |\widetilde{\Delta}_{m,r}^d|$ множини

$$\widetilde{\Delta}_{m,r}^d := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_r \leq m, \quad m = 0, 1, \ldots\} \tag{4.14}$$

при всіх достатньо великих m (більших, ніж деяке додатне число k_0) задовольняє співвідношення

$$M_r(m-c_1)^d < V_m = |\widetilde{\Delta}_{m,r}^d| \leq M_r(m+c_2)^d, \tag{4.15}$$

де M_r, c_1 та c_2 — деякі додатні сталі.

Зрозуміло, що у випадку, коли $r=\infty$, співвідношення (4.15) виконується і $M_\infty = vol\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_\infty\le 1\} = 2^d$, якщо ж $r=1$, то $M_1 = vol\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_1 \le 1\} = 2^d/d!$. Чи має місце подібне співвідношення при інших r нам невідомо, однак навіть для цих випадків наведені далі результати є новими.

Якщо виконується умова (4.15), а функція ψ спадає до нуля, то незростаючу перестановку $\bar\psi = \bar\psi(j)$, $j=1,2,\ldots$, системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$ можна визначити рівністю

$$\bar\psi(l) = \psi(m), \quad l\in(V_{m-1},V_m], \quad m=1,2,\ldots, \tag{4.16}$$

тобто, $\bar\psi$ належить множині $S_d(\nu,M){=}S_d(\nu,M,c_1,c_2)$ при $M{=}M_r$. Тому на підставі теорем 2.1 та 2.2 можна сформулювати такі наслідки.

Твердження 4.1. *Нехай $m\in\mathbb{N}$, $0<r\le\infty$, $0<p<q<\infty$, $\psi^p\in\mathfrak{M}''_\infty$, виконуються умови (4.15) та (2.5) при $\alpha=p$. Тоді при всіх $n\in[V_{m-1},V_m)$*

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m)\frac{(V_m-n)^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{d-1}{dq}}}. \tag{4.17}$$

Зауваження 4.1. Якщо виконуються умови твердження 4.1 і $n\in[V_{m-1},V_m)$, то внаслідок (2.7) справджується співвідношення

$$\frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{qd}}} \ll e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \ll \psi(m)n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.18}$$

Твердження 4.2. *Нехай $m\in\mathbb{N}$, $0<r\le\infty$, $0<q\le p<\infty$, $\psi^p\in\mathfrak{M}''_\infty$, виконуються умови (4.15) та (2.5) при $\alpha=q$. Тоді*

1) при $n=V_{m-1}$ має місце оцінка

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m); \tag{4.19}$$

2) для всіх $n\in(V_{m-1},V_m)$ таких, що

$$q(V_m-V_{m-1}) \ge p\,(V_m-n), \tag{4.20}$$

справджується оцінка (4.17);

3) для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, *що не задовольняють умову* (4.20),

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \frac{\psi(m)}{(n - V_{m-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}. \tag{4.21}$$

Зазначимо, що у випадку, коли $r = \infty$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо $V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,\infty}| = (2m+1)^d$. Тому якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то число m визначається рівністю $m = [\frac{(n+1)^{\frac{1}{d}}}{2}]$, де $[c]$ — ціла частина числа c.

У випадку, коли $d = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} =: \mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (4.15) виконується з сталою $M_r = 2$, і якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $n = V_{m-1} = V_m - 1$, а $m = [(n+1)/2]$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ та будь-яких $0 < p,\, q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \tag{4.22}$$

Як бачимо, при $d > 1$ у випадку $0 < q \le p < \infty$ отримані оцінки істотно залежать від розміщення числа n на півсегменті $[V_{m-1}, V_m)$. Розглядаючи у твердженнях 4.1 та 4.2 деякі конкретні підпослідовності $n(m)$, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $n \in [V_{m-1}, V_m)$, $0 < r \le \infty$, $0 < p,\, q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, *виконуються умови* (4.15) *та* (2.5) *при* $\alpha = \min\{p, q\}$. *Тоді*

1) якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, $m = 1, 2, \ldots$, *то для довільних* $0 < p,\, q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{dq}}}; \tag{4.23}$$

2) якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, $m = 1, 2, \ldots$, *то для довільних* $0 < p < q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}, \tag{4.24}$$

а для довільних $0 < q < p < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m); \tag{4.25}$$

3) якщо ж підпослідовність $n = n(m)$ така, що

$$(V_m - V_{m-1}) \asymp (V_m - n), \tag{4.26}$$

то для довільних $0 < p < q < \infty$ справджується оцінка (4.24), *а при $0 < q \le p < \infty$ оцінка* (4.24) *справджується за умови, що $n = n(m) \ne V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.*

4.3. Запишемо також відповідні оцінки величин $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$. Точні значення величин $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$, а також величин

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} =$$

$$= \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} \inf_{a_k} ||f(\cdot) - \sum_{k \in \gamma_n} a_k e^{i(k,\cdot)}||_{S^p(\mathbb{T}^d)} \tag{4.27}$$

випливають із результатів роботи О.І. Степанця [20]. Зокрема, із теорем 6.1 та 6.4 з [20] випливає, що для будь-яких $0 < q \le p < \infty$ і довільної додатної функції $\psi = \psi(t)$, $t \ge 0$, яка задовольняє умову (2.3), при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \bar{\psi}(n+1); \tag{4.28}$$

якщо ж $0 < p < q < \infty$, а додатна функція $\psi = \psi(t)$, $t \ge 0$, задовольняє умову (4.12), то

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{4.29}$$

де, як і раніше, через $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, позначається незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$.

Із співвідношень (4.28) та (4.16) випливає, що коли виконується умова (4.14), функція $\psi = \psi(t)$, $t \ge 0$, спадає і задовольняє співвідношення (2.3), то для будь-яких $0 < q \le p < \infty$ при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ має місце рівність

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \psi(m). \tag{4.28$'$}$$

У випадку, коли $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, можна отримати також оцінку правої частини співвідношення (4.29). Дійсно, на підставі (4.16) та (4.15) при $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) = (V_m - n)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m) + \sum_{s=m+1}^{\infty} (V_s - V_{s-1})\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s) \asymp$$

$$\asymp (V_m - n)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m) + \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s). \qquad (4.30)$$

Далі, якщо $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ виконується умова (2.5), то внаслідок (3.12)

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} s^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s) \asymp (m+1)^{d-1}(\psi^p(m+1))^{\frac{q}{q-p}} \asymp$$

$$\asymp (m+1)^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m+1) \ll \psi^{\frac{pq}{q-p}}(m). \qquad (4.31)$$

Об'єднуючи співвідношення (4.29), (4.30) та (4.31), робимо висновок, що коли $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ виконується умова (2.5), то при всіх $0 < p < q < \infty$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (4.32)$$

Таким чином, справджується наступне твердження.

Твердження 4.3. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ і виконується умова* (4.15). *Тоді*

1) якщо $0 < q \le p < \infty$, то для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$, при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ справджується рівність (4.28$'$)*;*

2) якщо ж $0 < p < q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і при $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ виконується умова (2.5), *то при кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$ справджується оцінка* (4.32).

У випадку $d = 1$ аналогічно можна зробити висновок, що при будь-яких $0 < q \le p < \infty$ для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$,

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]), \qquad (4.28'')$$

а при будь-яких $0 < p < q < \infty$ для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \qquad (4.32')$$

Зауваження 4.1. Аналізуючи результати даного підрозділу бачимо, що у випадку, коли $d = 1$, для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ і всіх $0 < p,\, q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{S^p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$, то при всіх $0 < q < p < \infty$ аналогічне співвідношення

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \qquad (4.33)$$

виконується (за відповідних умов на функцію ψ) для підпослідовності вигляду $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, а при всіх $0 < p = q < \infty$ — для підпослідовності $n = n(m) = V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$. У випадку, коли $0 < p < q < \infty$, співвідношення (4.33) виконується для підпослідовностей $n = n(m)$, що задовольняють умову (4.26); якщо ж дана підпослідовність $n = n(m)$ така, що $(V_m - n) = o(V_m - V_{m-1})$, $m \to \infty$, то справджується співвідношення

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = o\big(\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}\big),\ n \to \infty.$$

5. Застосування отриманих результатів до оцінок апроксимативних характеристик просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$. У випадку, коли $2 \leq p < \infty$, на підставі теореми Гаусдорфа-Юнга (див., наприклад, [21, с. 16]) для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$||f||_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leq ||f||_{S^{p'}(\mathbb{T}^d)}. \qquad (5.1)$$

[2] Якщо ж $1 \leq p < 2$, то

$$||f||_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leq ||f||_{L_2(\mathbb{T}^d)} = ||f||_{S^2(\mathbb{T}^d)}. \qquad (5.2)$$

[2]Тут і далі, для довільного $1 < p < \infty$ покладаємо $p' := \frac{p}{p-1}$ і $p' := \infty$ при $p = 1$. При цьому, очевидно, $p' > 1$.

Таким чином, із отриманих у підрозділі 4 оцінок апроксимативних величин просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$ випливають також і оцінки зверху аналогічних величин просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$.

В даному підрозділі розглянемо випадки, у яких вдається також отримати відповідні оцінки знизу.

Твердження 5.1. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0<q<\infty$, виконується умова* (4.15) *і $n \in [V_{m-1}, V_m)$. Тоді*

1) якщо $0 < q \le p'$, то для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$, справджується рівність

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \psi(m); \tag{5.3}$$

2) якщо ж $1 < p' < q < \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}''$ і задовольняє умову (2.5) *при $\alpha = \frac{p'q}{q-p'}$, то для підпослідовності вигляду $n = n(m) = V_m - c_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, має місце*

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m). \tag{5.4}$$

Доведення. Для отримання оцінок зверху в (5.3) та (5.4) достатньо скористатись співвідношеннями (5.1) та (5.2) і твердженням 4.1 (із врахуванням того, що коли $n = n(m) = V_m - c_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, величина $(V_m - n) \asymp K$).

Щоб отримати оцінки знизу, розглянемо для довільного набору $\gamma_n \in \mathbb{Z}^d$ систему $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1(\gamma_n), \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2(\gamma_n), \ldots$ всіх векторів з множини $\mathbb{Z}^d \setminus \gamma_n$ таких, що

$$\psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) \ge \psi(|\mathbf{k}_2(\gamma_n)|_r) \ge \ldots$$

і функцію $f_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}, \gamma_n) = \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) e^{i(\mathbf{k}_1(\gamma_n), \mathbf{x})}$. Очевидно, що $f_1 \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ і

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f_1)_{L_p(\mathbb{T}^d)} = ||\psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) e^{i(\mathbf{k}_1(\gamma_n), \mathbf{x})}||_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r),$$

Звідси з врахуванням (4.16) випливає необхідна оцінка знизу величини $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)}$:

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ge \inf_{\gamma_n} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f_1)_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \inf_{\gamma_n} \psi(|\mathbf{k}_1(\gamma_n)|_r) = \bar{\psi}(n+1) = \psi(m),$$

де, як і раніше, через $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, позначається незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Твердження доведено.

Як вже зазначалося, у випадку, коли $d = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} =: \mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (4.15) виконується з константою $M_r = 2$, і якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $n = V_{m-1} = V_m - 1$, а $m = [(n+1)/2]$. Тому з твердження 5.1 можна отримати такий наслідок.

Наслідок 5.1. *Нехай $1 \leq p < \infty$, тоді для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \geq 1$, та будь-яких $0 < q \leq p' < \infty$*

$$\mathscr{D}^{\perp}_{n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{L_p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]); \qquad (5.3')$$

якщо ж $q > p'$, то для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$

$$\mathscr{D}^{\perp}_{n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \qquad (5.4')$$

Твердження 5.2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $0 < r \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, виконується умова (4.15) і $n \in [V_{m-1}, V_m)$. Тоді*

1) якщо $n = n(m) = V_{m-1}$, то при всіх $q \leq p'$ для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, що задовольняє умову (2.5) при $\alpha = \min\{p', q\}$, справджується оцінка

$$e^{\perp}_{n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi(m); \qquad (5.5)$$

2) якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, то для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, що задовольняє умову (2.5) з $\alpha = \min\{p', q\}$, при всіх $0 < q < \infty$ справджується оцінка

$$e^{\perp}_{n}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \frac{\psi(m)}{n^{\frac{d-1}{dq}}}; \qquad (5.6)$$

3) якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, то при всіх $q < p'$ для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, що задовольняє умову (2.5) з $\alpha = \min\{p', q\}$, справджується оцінка (5.5).

Доведення. Із врахуванням (4.6) та (4.7) для отримання оцінок зверху в твердженні 5.2 достатньо скористатись співвідношеннями

(5.1) та (5.2) і відповідними оцінками величин $e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$ (у твердженні 1) — оцінкою (4.19), у твердженні 2) — оцінкою (4.23), у твердженні 3) — оцінкою (4.25)).

Для отримання оцінок знизу розглянемо систему $\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \ldots$ всіх векторів з множини $\mathbb{Z}^d$ таких, що

$$\psi(|\mathbf{k}_j^*|_r) = \bar{\psi}(j), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.7}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$f_2(\mathbf{x}) = C_2 \sum_{j=1}^{n+1} e^{i(\mathbf{k}_j^*, \mathbf{x})}, \quad \text{де} \quad C_2 = C_2(n) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \psi^{-q}(|\mathbf{k}_j^*|_r) \right)^{-\frac{1}{q}}.$$

Тоді очевидно, що $f_2 \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ і внаслідок (5.7) та (4.16) при $n \in [V_{m-1}, V_m)$.

$$C_2^{-q} = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\psi}^{-q}(j) \asymp \sum_{k=1}^{m-1} \frac{V_k - V_{k-1}}{\psi^q(k)} + \frac{n + 1 - V_{m-1}}{\psi^q(m)}. \tag{5.8}$$

На підставі співвідношень (4.15) та (3.4) маємо

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{V_k - V_{k-1}}{\psi^q(k)} \asymp \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{d-1}}{\psi^q(k)} \asymp \frac{(m-1)^{d-1}}{\psi^q(m-1)}. \tag{5.9}$$

Об'єднуючи співвідношення (5.8) та (5.9), з урахуванням умови (2.5) робимо висновок

$$C_2^{-q} \asymp \frac{n + 1 - V_{m-1}}{\psi^q(m)}. \tag{5.10}$$

Для довільного набору чисел γ_n і полінома $\sum\limits_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}_2(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \cdot)}$ із врахуванням теореми Гаусдорфа-Юнга отримуємо

$$\Big\| f_2 - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}_2(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{k}_j^* \notin \gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*) e^{i(\mathbf{k}_j^*, \cdot)} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \geq$$

$$\geq \Bigg|\Bigg| \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{k}_j^* \notin \gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*) e^{i(\mathbf{k}_j^*, \cdot)} \Bigg|\Bigg|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \gg \max_{\substack{j=\overline{1,n+1} \\ \mathbf{k}_j^* \notin \gamma_n}} |\widehat{f}_2(\mathbf{k}_j^*)| = C_2. \qquad (5.11)$$

Із співвідношень (5.11) та (5.10) випливає, що при всіх $1 \leq p < \infty$ має місце оцінка:

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \gg e_n^{\perp}(f_2)_{L_p(\mathbb{T}^d)} \gg \frac{\psi(m)}{(n+1-V_{m-1})^{1/q}}.$$

Далі, якщо $d = 1$, то, очевидно, $n+1-V_{m-1} = 1$. При $d > 1$ у випадку, коли $n = n(m) = V_m + c_m$, $c_m \in \mathbb{Z}_+$, $c_m \leq K$, залишається помітити, що $(n+1-V_{m-1}) \asymp K$; а у випадку, коли $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, скористатись співвідношенням (2.7). Теорему доведено.

Наслідок 5.2. *Для будь-яких* $1 \leq p < \infty$ *та* $0 < q < \infty$ *і довільної функції* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}_q^{\psi}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]). \qquad (5.12)$$

Зауваження 5.1. Аналізуючи результати даного підрозділу бачимо, що у випадку, коли $d = 1$, для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$ і будь-яких $1 \leq p < \infty$ та $0 < q < \infty$

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp e_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}_q^{\psi}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$ і виконуються умови тверджень 5.1 та 5.2, то при всіх $q < p'$ аналогічне співвідношення

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^d)}$$

виконується для підпослідовності вигляду $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, а при всіх $q = p'$ — для підпослідовності $n = n(m) = V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Якщо ж підпослідовність $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \le K$, то для всіх $0 < q < \infty$ маємо $e_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)} = o\big(\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}\big)$ і $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}} ||f - G_n(f)||_{L_p(\mathbb{T}^d)} = o\big(\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}\big)$, $n \to \infty$.

Автор вдячний рецензенту за цінні зауваження та рекомендації щодо даної роботи.

1. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001.— **53**, № 8. — С. 1121–1146.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч.II. — 468 с.
3. *Софман Л.Б.* Поперечники октаэдров // Мат. заметки. — 1969. — **5**, №4. — С. 429–436.
4. *Софман Л.Б.* Поперечники бесконечного октаэдра // Вестн. москов. ун-та. — 1973. — №5. — С. 54–56.
5. *Pinkus A.* n-widths in approximation theory // Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985. — 291 p.
6. *Fang Gensun, Qian Lixin.* Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings // J. Approx. Theory. — 2006. — **140**, №2. — P. 178–190.
7. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций // Изв. РАН. Сер. матем. — 2010. — **74**, № 3. — С.169—224.
8. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций. — Киев, 2007. — 103 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).
9. *Шидліч А.Л.* Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень і поперечників // Укр. мат. журн. — 2009.— **61**, № 10. — С. 1403–1423.
10. *Степанець О.І., Шидліч А.Л.* Про один критерій для опуклих функцій // Доповіді НАНУ. — 2007. — №8. — с.31-36.
11. *Шидліч А.Л.* Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 216–235.
12. *Shidlich A.L.* Approximations of certain classes of functions of several variables by greedy approximants in the integral metrics // arXiv.org: arXiv1302.2790v1. — 2013. — 16 p.
13. *DeVore R.A., Temlyakov V.N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — **2**, № 1. — P. 29-48.

14. *Temlyakov V.N.* Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation // Constr. Approx. — 1998. — **14**, № 4. — P. 569–587.

15. *Li, R. S., Liu, Y. P.* Asymptotic Estimations of m-term Approximation and Greedy Algorithm for Multiplier Function Classes Defined by Fourier Series // Chinese Journal of Engineering Mathematics. — 2008. — **25**, № 1. — P. 90–96.

16. *Li, R. S., Liu, Y. P.* Best m-term One-sided Trigonometric Approximation of Some Function Classes Defined by a Kind of Multipliers // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2010. — **26**, № 5. — P. 975–984.

17. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37–40.

18. *De Vore R.* Nonlinear approximation // Acta Numer. — 1998. — **7**. — P. 51 – 150.

19. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — **67**, №2. — С. 61–100.

20. *Степанец А.И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах. // Укр. мат. журн. — 2006.— **58**, № 1. — С. 47–92.

21. *Temlyakov V.N.* Approximation of Periodic Functions // Computational Mathematics and Analysis Series. — Commack, New York: Nova Science Publ., 1993. — 419 p.