Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 138–169

УДК 517.983

Грушка Я.І.

(Інститут математики НАН України, Київ)

Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца

grushka@imath.kiev.ua

In the present paper we investigate the algebraic properties of the generalized Lorentz transforms for superlight velocities in Minkowski space time over any real Hilbert space. In particular, it is proved that, unlike the classical case, the set of generalized Lorentz transformations does not form a group.

В даній роботі досліджуються алгебраїчні властивості узагальнених перетворень Лоренца для надсвітлових швидкостей в просторі Мінковського над довільним дійсним гільбертовим простором. Зокрема, доведено, що, на відміну від класичного випадку, множина узагальнених перетворень Лоренца не утворює групу.

1 Вступ

Той факт, що існування надсвітлових швидкостей не суперечить кінематиці спеціальної теорії відносності на сьогодні є загальновідомим. В роботах [1, 2] цей факт обґрунтовується з допомогою математичної логіки. Цікаво, що останній факт можна обґрунтувати також іншим способом, а саме шляхом побудови явним чином, за допомогою теорії мінливих множин ([3–5]), кінематики, що дозволяє надсвітлові трансформації [3, с. 128, приклад 2.3], [4, p. 41, example 10.3]. Хоча існування тахіонів не можна вважати експериментально доведеним, теорія тахіонів і надсвітлового руху розвивається вже понад 50 років [6, 7], і на даний час є дуже актуальною. В багатьох попередніх дослідженнях теорія тахіонів розглядалась в рамках класичних перетворень Лоренца, і для систем відліку надсвітлова швидкість була заборонена. Але, в роботі [8] було запропоноване розширення множини класичних перетворень Лоренца, яке включає надсвітлові швидкості систем відліку. Ці перетворення координат в просторі Мінковського $\mathbb{R}^4$ задаються наступною формулою:

$$U_v\left(t,x,y,z\right)=\left(\frac{s\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},\ \frac{s\left(x-vt\right)}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},y,z\right),\ (t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4, \quad (1.1)$$

де $v\in\mathbb{R}$, $|v|>c$, $s\in\{-1,1\}$, і c — додатна дійсна константа, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі. Результати роботи [8] виявились певною сенсацією, і про них стало відомо не лише в середовищі фізиків та математиків. Один з висновків роботи [8] полягає в тому, що деякі аспекти існуючої теорії тахіонів, можливо, слід переглянути, оскільки з огляду на перетворення (1.1), відпадає необхідність вводити уявну масу спокою для тахіонних частинок і використовувати складний фізичний апарат, щоб побудувати кінематику і динаміку тахіонів [8]. Зауважимо, що перетворення координат (1.1) також були отримані і раніше (див. [9,10]), але, на жаль, ці роботи не стали такими відомими, як [8].

Слід підкреслити, що в роботах [8–10] розглядається лише випадок, коли обидві системи відліку рухаються вздовж спільної осі “x”, і не досліджуються нові перетворення для систем відліку з довільною орієнтацією осей. В роботі [11] сформульовано умови, які мають задовольняти узагальнені перетворення Лоренца типу (1.1) для систем відліку з довільною орієнтацією осей у просторі Мінковського над довільним дійсним гільбертовим простором і доведено теореми про загальний вигляд перетворень, що задовольняють ці умови. Зазначимо, що узагальнення класичних перетворень Лоренца на випадок довільного дійсного гільбертового простору розглядалось також в роботах [12–14].

Мета даної роботи — дослідити деякі алгебраїчні властивості узагальнених перетворень Лоренца над дійсним гільбертовим простором, введених в [11]. Зокрема, в даній роботі доведено, що, на відміну від класичного випадку, множина узагальнених перетворень Лоренца не утворює групу операторів, а саме, показано, що композиція узагальнених перетворень Лоренца зі скінченними надсвітловими швидкостями і перпендикулярними напрямками руху не належить до вихідного класу перетворень.

2 Абстрактні перетворення координат в просторі Мінковського над гільбертовим простором та їхні властивості.

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел, де $\|\cdot\|$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — норма і скалярний добуток в просторі $\mathfrak{H}$ відповідно. Позначимо через $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ гільбертовий простір

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) := \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{H}\},$$

оснащений скалярним добутком та нормою:

$$\langle\omega_1, \omega_2\rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2\rangle; \quad \|\omega_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1^2 + \|x_1\|^2,$$

де $\omega_i = (t_i, x_i),\ i \in \{1, 2\}$. Простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ називатимемо ***простором Мінковського*** над простором $\mathfrak{H}$. В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виділимо наступні підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 = \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbb{R}\}; \quad \mathfrak{H}_1 = \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{H}\},$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Підпростір $\mathfrak{H}_0$ ізоморфний полю дійсних чисел $\mathbb{R}$ а підпростір $\mathfrak{H}_1$ ізоморфний простору $\mathfrak{H}$. Отже, простір $\mathfrak{H}$ можна ототожнити з підпростором $\mathfrak{H}_1$ простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тобто, простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна вважати розширенням простору $\mathfrak{H}$. Тому, надалі будемо використовувати однакові позначення для норми і скалярного добутку в просторах $\mathfrak{H}$ та $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (тобто в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ будуть використовуватись позначення $\|\cdot\|$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, без індекса “$\mathcal{M}(\mathfrak{H})$” знизу).

Позначимо через $\mathbf{e}_0$ вектор

$$\mathbf{e}_0 = (1, \mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

Введемо наступні ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_0$ та $\mathfrak{H}_1$:

$$\mathbf{T}\omega = t\mathbf{e}_0 = (t, \mathbf{0}) \in \mathfrak{H}_0, \quad \omega = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H});$$

$$\mathbf{X}\omega = (0, x) \in \mathfrak{H}_1, \qquad \omega = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

(нагадаємо, що оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ортопроектором, якщо $P^2 = P^* = P$, де P^* — спряжений оператор до оператора P). Також позначимо через $\mathcal{T}$ наступний лінійний оператор

$$\mathcal{T}(\omega) = t, \quad \omega = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

з $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ в $\mathbb{R}$. Тоді:

$$\mathbf{T}\omega = \mathcal{T}(\omega)\, \mathbf{e}_0, \quad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{2.1}$$

Довільний вектор $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна єдиним чином подати у вигляді:

$$\omega = t\mathbf{e}_0 + x = \mathcal{T}(\omega)\, \mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\omega, \tag{2.2}$$

де $x = \mathbf{X}\omega \in \mathfrak{H}_1,\ t = \mathcal{T}(\omega) \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}$.

Означення 2.1. *Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається* ***перетворенням координат****, якщо існує неперервний обернений оператор $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.*

Очевидно, що множина всіх перетворень координат є групою операторів в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, відносно групової операції добутку (композиції) операторів.

Означення 2.2. *Перетворення координат $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ будемо називати* ***v-детермінованим****, якщо $\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right) \neq 0$. Вектор*

$$\mathcal{V}(S) = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)} \in \mathfrak{H}_1$$

будемо називати ***швидкістю*** *v-детермінованого перетворення координат S.*

Означення 2.2 повністю відповідає фізичному розумінню швидкості системи відліку. Справді, припустимо, що v-детерміноване перетворення координат $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ відображає координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\boldsymbol{l}$ в координати цієї ж точки в іншій системі відліку $\boldsymbol{l}'$, що рухається зі сталою швидкістю відносно системи відліку $\boldsymbol{l}$. Розглянемо довільну нерухому відносно системи відліку $\boldsymbol{l}'$ точку

$\omega_t' = x_0 + t\mathbf{e}_0$ (де $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ — фіксований вектор, а змінна t пробігає всю дійсну вісь $\mathbb{R}$). Тоді точка ω_t' в системі відліку $\boldsymbol{l}$ буде виглядати, як точка $\omega_t = S^{-1}\omega_t'$. Тому, застосовуючи (2.2) отримуємо:

$$\begin{aligned}\omega_t &= S^{-1}x_0 + tS^{-1}\mathbf{e}_0 = \\ &= \mathcal{T}\left(S^{-1}x_0\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}x_0 + t\left(\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0\right) = \\ &= \mathcal{T}\left(S^{-1}\left(x_0 + t\mathbf{e}_0\right)\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}\left(x_0 + t\mathbf{e}_0\right).\end{aligned}$$

Отже, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_1 \neq t_2$ маємо:

$$\frac{\mathbf{X}\omega_{t_2} - \mathbf{X}\omega_{t_1}}{\mathcal{T}\left(\omega_{t_2}\right) - \mathcal{T}\left(\omega_{t_1}\right)} = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\left(x_0 + t_2\mathbf{e}_0 - \left(x_0 + t_1\mathbf{e}_0\right)\right)}{\mathcal{T}\left(S^{-1}\left(x_0 + t_2\mathbf{e}_0\right) - S^{-1}\left(x_0 + t_1\mathbf{e}_0\right)\right)} = \mathcal{V}(S).$$

Таким чином, довільна нерухома відносно системи відліку $\boldsymbol{l}'$ точка, рухається відносно системи відліку $\boldsymbol{l}$ зі сталою швидкістю $\mathcal{V}(S)$.

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\begin{gathered}\mathfrak{H}_1[V] = \mathbf{span}\,\{V\}; \\ \mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[V] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, V\rangle = 0\},\end{gathered}$$

де $\mathbf{span}\, M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[V]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$ ортопроектори на підпростори (відповідно) $\mathfrak{H}_1[V]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_1[V]\,\omega = \begin{cases}\frac{\langle V,\omega\rangle}{\|V\|^2}V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0}\end{cases}, \quad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \\ \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[V] \end{gathered} \tag{2.3}$$

Неважко переконатись, що для довільного вектора $V \in \mathfrak{H}_1$ справедливі рівності:

$$\begin{gathered}\mathbf{T} + \mathbf{X} = \mathbb{I}; \quad \mathbf{X}_1[V] + \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}; \quad \mathbf{T} + \mathbf{X}_1[V] + \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbb{I}; \\ \mathbf{TX} = \mathbf{XT} = \mathbb{O}; \quad \mathbf{X}_1[V]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathbf{X}_1[V] = \mathbb{O}; \\ \mathbf{TX}_1[V] = \mathbf{X}_1[V]\,\mathbf{T} = \mathbb{O}; \quad \mathbf{TX}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathbf{T} = \mathbb{O}; \\ \mathbf{XX}_1[V] = \mathbf{X}_1[V]\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_1[V]; \quad \mathbf{XX}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_1^{\perp}[V]; \\ \mathbf{X}_1[\lambda V] = \mathbf{X}_1[V]; \quad \mathbf{X}_1^{\perp}[\lambda V] = \mathbf{X}_1^{\perp}[V] \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).\end{gathered} \tag{2.4}$$

де $\mathbb{I}$ і $\mathbb{O}$ — нульовий та одиничний оператор в просторі $\mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ відповідно.

3 Загальна група Лоренца в гільбертовому просторі.

Всюди в даній роботі число c означає додатну дійсну константу, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі. Позначимо через $\mathsf{M}_c(\cdot)$ псевдо-метрику Лоренца-Мінковського на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathsf{M}_c(\omega) = \|\mathbf{X}\omega\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\omega), \qquad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{3.1}$$

Позначимо через $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ множину перетворень координат $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що залишають незмінними значення функціоналу (3.1):

$$\mathsf{M}_c(L\omega) = \mathsf{M}_c(\omega) \qquad (\forall \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{3.2}$$

З (3.2) випливає, що множина $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ *утворює групу операторів* в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ відносно операції добутку операторів. Відповідно до [15] групу $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ будемо називати ***загальною групою Лоренца*** над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Можна довести [11], що будь-яке загальне перетворення Лоренца $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є v-детермінованим, причому $\|\mathcal{V}(L)\| < c$.

4 Узагальнені перетворення Лоренца

Позначимо через $\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ множину перетворень координат $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що задовольняють наступні умови:

1. Обидва перетворення координат L та L^{-1} є v-детермінованими;
2. $(\mathsf{M}_c(L\omega))^2 = (\mathsf{M}_c(\omega))^2$ $(\forall \omega \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)])$;
3. Якщо $\mathbf{T}\omega = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\omega = \mathbf{0}$, то $\mathbf{T}L\omega = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]L\omega = \mathbf{0}$ $(\forall \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$;
4. $\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\omega\right\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]L\omega\right\|$, $(\forall \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.

В роботі [11] доведено, що

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c). \tag{4.1}$$

З теореми 4.1 (див. далі) випливає, що включення, обернене до (4.1) не може мати місця. Очевидно, що для класичних перетворень Лоренца $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ умову 2 можна замінити на наступну (більш сильну) умову:

$2'$. $\quad \mathsf{M}_c\,(L\omega) = \mathsf{M}_c\,(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\,[\mathcal{V}\,(L)])$.

Твердження 4.1 ([11]). *Перетворення координат $L \in \mathcal{L}\,(\mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))$ належить до групи $\mathfrak{O}\,(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє умови 1, $2'$, 3, 4.*

Покладемо:

$$\mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1) = \{U \in \mathcal{L}\,(\mathfrak{H}_1) \mid U - \text{унітарний оператор}\}\,; \tag{4.2}$$

$$\mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1) = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\}\,; \tag{4.3}$$

Нагадаємо, що оперптор $U \in \mathcal{L}\,(\mathfrak{H}_1)$ називається унітарним, якщо $\forall x \in \mathfrak{H}_1$ $\|Ux\| = \|x\|$ і $U\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$ (де $U\mathfrak{H}_1 = \{Ux \mid x \in \mathfrak{H}_1\}$).

Теорема 4.1 ([11]). *Оператор $L \in \mathcal{L}\,(\mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}\,(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли існують число $s \in \{-1, 1\}$, вектор $V \in \mathfrak{H}_1$, $\|V\| \neq c$ і оператор $J \in \mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного вектора $\omega \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ справедлива рівність:*

$$L\omega = \frac{s\left(\mathcal{T}\,(\omega) - \frac{\langle V, \omega\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\frac{s\left(\mathcal{T}\,(\omega)\,V - \mathbf{X}_1\,[V]\,\omega\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} + \mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\omega\right), \tag{4.4}$$

при цьому, $\quad \mathcal{V}\,(L) = V$.

Надалі буде необхідний наступний наслідок з теореми 4.1.

Наслідок 4.1. *Якщо $L \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}\,(\mathfrak{H}, c)$ і $\|\mathcal{V}\,(L)\| < c$, то $L \in \mathfrak{O}\,(\mathfrak{H}, c)$.*

Доведення. Нехай, $L \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}\,(\mathfrak{H}, c)$ і $\|\mathcal{V}\,(L)\| < c$. Згідно з теоремою 4.1, існують число $s \in \{-1, 1\}$ і оператор $J \in \mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного вектора $\omega \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ дію оператора L на вектор ω можна подати у вигляді (4.4), де $V = \mathcal{V}\,(L)$, $\|V\| < c$. Оскільки $\|V\| < c$, то згідно з формулою (4.4) для довільного вектора $\omega = t\mathbf{e}_0 + \lambda V = t\mathbf{e}_0 + \lambda \mathcal{V}\,(L) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\,[\mathcal{V}\,(L)]$ маємо:

$$L\omega = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}}}\left(\left(t - \lambda\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_0 + (t-\lambda)JV\right).$$

Оскільки J — унітарний оператор, то $\|JV\| = \|V\|$. Отже:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_c(L\omega) &= \|\mathbf{X}L\omega\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(L\omega) = \\ &= \frac{1}{1-\frac{\|V\|^2}{c^2}}\left((t-\lambda)^2\|V\|^2 - c^2\left(t-\lambda\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)^2\right) = \\ &= \lambda^2\|V\|^2 - c^2t^2 = \|\mathbf{X}\omega\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\omega) = \mathsf{M}_c(\omega),\end{aligned}$$

де ω — довільний вектор з підпростору $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$. Звідси, в силу твердження 4.1, $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. □

Узагальненими перетвореннями Лоренца для нескінченних швидкостей будемо називати лінійні неперервні оператори в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виду:

$$\mathbf{W}_\infty[\mathbf{n}, J]\,\omega = -\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega\right), \tag{4.5}$$
$$\text{де } \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\},\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1).$$

Введемо наступний клас лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathfrak{OT}_\infty(\mathfrak{H}, c) := \{\mathbf{W}_\infty[\mathbf{n}, J] \mid \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}.$$

В роботі [11] показано, що оператори виду (4.5) є граничними випадками операторів виду (4.4), коли норма швидкості системи відліку ($\|V\|$) прямує до нескінченності, і доведено, що довільний оператор $\mathbf{W}_\infty[\mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}_\infty(\mathfrak{H}, c)$ ***є перетворенням координат***. Отже, можна ввести наступний клас перетворень координат:

$$\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) := \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) \cup \mathfrak{OT}_\infty(\mathfrak{H}, c).$$

Теорема 4.2 ([11])**.** *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ має місце рівність:*

$$\begin{aligned}L\omega = \mathbf{U}_\theta[s, \mathbf{n}, J]\,\omega &:= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &+ J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega\right), \quad \textit{де}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\varphi_0(\theta)=\frac{1+\theta|\theta|}{2|\theta|};\quad \varphi_1(\theta)=\frac{1-\theta|\theta|}{2|\theta|}. \tag{4.7}$$

Перетворення координат $L=\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta\neq -1$, і в цьому випадку:

$$\mathcal{V}(L)=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}. \tag{4.8}$$

Переформулюємо теорему 4.2 у більш зручній для подальшого застосування формі.

Зауважимо, що функції $\varphi_0(\theta)$ і $\varphi_1(\theta)$ можна визначити за формулою (4.7) і при $|\theta|>1$. Отже, ці функції можна вважати визначеними при $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Легко первірити, що для довільного $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ справедливі наступні рівності:

$$\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta)=-\frac{1}{4}\left(\theta^2-\frac{1}{\theta^2}\right);\quad c\frac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_0(\theta)}=\lambda=c\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|};$$
$$\varphi_0(\theta)+\varphi_1(\theta)=\frac{1}{|\theta|};\quad \varphi_0(\theta)-\varphi_1(\theta)=\theta;\quad \varphi_0(\theta)^2-\varphi_1(\theta)^2=\operatorname{sign}\theta;$$
$$\varphi_0(-\theta)=\varphi_1(\theta);\quad \varphi_1(-\theta)=\varphi_0(\theta). \tag{4.9}$$

За означенням функцій $\varphi_0(\cdot),\varphi_1(\cdot)$, отримуємо:

$$\varphi_0(\theta)=\varphi_0\left(\theta^{-1}\right),\quad \varphi_1(\theta)=-\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\qquad (\text{при }\theta>0);$$
$$\varphi_0(\theta)=-\varphi_0\left(\theta^{-1}\right);\qquad \varphi_1(\theta)=\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\qquad (\text{при }\theta>0).$$

Тому, в обох випадках справедливі рівності:

$$\varphi_0(\theta)=\operatorname{sign}\theta\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right);\qquad \varphi_1(\theta)=-\operatorname{sign}\theta\,\varphi_1\left(\theta^{-1}\right). \tag{4.10}$$

Отже, за формулою (4.6) можна визначити лінійні неперервні оператори $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]$ і при $|\theta|>1$. При цьому, враховуючи (4.10) і використовуючи рівності (2.4) отримаємо:

$$\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\,\omega=\left(s\operatorname{sign}\theta\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}(\omega)-\left(-\operatorname{sign}\theta\,\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\right)\frac{\langle\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+J\left(c\left(-\operatorname{sign}\theta\,\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\right)\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}-s\operatorname{sign}\theta\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\omega\right)=$$
$$=\left(\widetilde{s}\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}(\omega)-\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\frac{\langle\widetilde{\mathbf{n}},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+$$

$$+J\left(c\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}(\omega)\,\widetilde{\mathbf{n}}-\widetilde{s}\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathbf{X}_1[\widetilde{\mathbf{n}}]\,\omega+\mathbf{X}_1^{\perp}[\widetilde{\mathbf{n}}]\,\omega\right)=\mathbf{U}_{\theta^{-1}}[\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{n}},J]\,\omega,$$

де $\widetilde{s}=s\operatorname{sign}\theta$; $\widetilde{\mathbf{n}}=-\operatorname{sign}\theta\,\mathbf{n}$. Таким чином:

$$\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{\theta^{-1}}[s\operatorname{sign}\theta,-\operatorname{sign}\theta\,\mathbf{n},J] \qquad (s\in\{-1,1\},\ \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}),\ J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)). \tag{4.11}$$

Оскільки при $|\theta|>1$ маємо $0<\left|\theta^{-1}\right|<1$, то формула (4.11) показує, що підстановка значень параметра θ таких, що $|\theta|>1$ не виводить за межі класу перетворень, визначених формулою (4.6). Крім того, при $|\theta|>1$, згідно з формулою (4.11) і теоремою 4.2, отримуємо:

$$\mathcal{V}(\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])=\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta^{-1}}[s\operatorname{sign}\theta,-\operatorname{sign}\theta\,\mathbf{n},J])=$$
$$=cs\operatorname{sign}\theta\,\frac{1-\theta^{-1}\left|\theta^{-1}\right|}{1+\theta^{-1}\left|\theta^{-1}\right|}(-\operatorname{sign}\theta\,\mathbf{n})=cs\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|}\mathbf{n}.$$

Таким чином, з теореми 4.2 випливає наступний наслідок:

Наслідок 4.2. *Твердження теореми 4.2 залишиться правильним, якщо в формулюванні теореми 4.2 умову $\theta\in[-1,1]\setminus\{0\}$ замінити на умову $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

Зауваження 4.1. З формули (4.8) випливає, що перетворення координат $L=\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ має швидкість, меншу за швидкість світла, тоді і тільки тоді, коли $\theta>0$. Отже, згідно з наслідком 4.1, $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ тоді і тільки тоді, коли $\theta>0$.

Нехай, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Покладемо:

$$\widetilde{J}\omega:=\mathbf{T}\omega+J\mathbf{X}\omega=\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega,\quad \omega\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{4.12}$$

Легко бачити, що для довільних операторів $J,J_1\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ мають місце наступні рівності:

$$\widetilde{JJ_1}=\widetilde{J}\widetilde{J_1};\qquad \widetilde{J}^{-1}=\widetilde{(J^{-1})}. \tag{4.13}$$

Введемо позначення:

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]:=\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},\mathbb{I}_1] \qquad (\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad s\in\{-1,1\}), \tag{4.14}$$

де $\mathbb{I}_1$ — одиничний (тотожний) оператор на просторі $\mathfrak{H}_1$. Оператори $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]$ будемо називати ***елементарними*** узагальненими перетвореннями Лоренца.

Лема 4.1. *Для будь-якого узагальненого перетворення Лоренца* $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *справедливі наступні рівності:*

$$\widetilde{J}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]=\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J];\quad \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\widetilde{J}=\mathbf{U}_\theta\left[s,J^{-1}\mathbf{n},J\right],\tag{4.15}$$

де $\widetilde{J}$ *— оператор, визначений в (4.12).*

Доведення. Перша рівність (4.15) випливає з (4.6), (4.14) та (4.12). Доведемо другу рівність. Нехай, $\omega\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо

$$\omega':=\widetilde{J}\omega=\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega.$$

Використовуючи (4.6) та (4.14) отримуємо:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\widetilde{J}\omega=\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\omega'=\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\omega')-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\omega'\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+\\ +c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\omega')\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega'+\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\omega'=\\ =\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega)-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+\\ +c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega)\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}](\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega)+\\ +\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}](\mathcal{T}(\omega)\mathbf{e}_0+J\mathbf{X}\omega)=\\ =\left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\omega)-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},J\mathbf{X}\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+\\ +c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]J\mathbf{X}\omega+\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]J\mathbf{X}\omega.\end{gathered}\tag{4.16}$$

Оскільки J — унітарний оператор з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$, то

$$\langle\mathbf{n},J\mathbf{X}\omega\rangle=\left\langle J^{-1}\mathbf{n},\mathbf{X}\omega\right\rangle=\left\langle\mathbf{X}J^{-1}\mathbf{n},\omega\right\rangle=\left\langle J^{-1}\mathbf{n},\omega\right\rangle.\tag{4.17}$$

Далі, застосовуючи (2.3),(2.4), та (4.17) і враховуючи той факт, що оператор J відображає $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$, маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]J\mathbf{X}\omega&=\langle\mathbf{n},J\mathbf{X}\omega\rangle\mathbf{n},=\left\langle J^{-1}\mathbf{n},\omega\right\rangle\mathbf{n}=\\ &=J\left\langle J^{-1}\mathbf{n},\omega\right\rangle J^{-1}\mathbf{n}=J\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\omega;\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]J\mathbf{X}\omega&=(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1[\mathbf{n}])J\mathbf{X}\omega=\mathbf{X}J\mathbf{X}\omega-J\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\omega=\\ &=J\left(\mathbf{X}\omega-\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\omega\right)=J\mathbf{X}_1^\perp\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\omega.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Підставляючи замість виразів $\langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\omega \rangle$, $\mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] J\mathbf{X}\omega$, $\mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] J\mathbf{X}\omega$ праві частини рівностей (4.17), (4.18) та (4.19) у рівність (4.16), враховуючи рівність (4.6) отримуємо:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \widetilde{J}\omega = \left(s\varphi_0(\theta) \mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta) \frac{\langle J^{-1}\mathbf{n}, \omega \rangle}{c} \right) \mathbf{e}_0 + \\
+ c\varphi_1(\theta) \mathcal{T}(\omega) \mathbf{n} - s\varphi_0(\theta) J\mathbf{X}_1 \left[J^{-1}\mathbf{n} \right] \omega + J\mathbf{X}_1^{\perp} \left[J^{-1}\mathbf{n} \right] \omega = \\
= \left(s\varphi_0(\theta) \mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta) \frac{\langle J^{-1}\mathbf{n}, \omega \rangle}{c} \right) \mathbf{e}_0 + \\
+ J \left(c\varphi_1(\theta) \mathcal{T}(\omega) J^{-1}\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta) \mathbf{X}_1 \left[J^{-1}\mathbf{n} \right] \omega + \mathbf{X}_1^{\perp} \left[J^{-1}\mathbf{n} \right] \omega \right) = \\
= \mathbf{U}_\theta \left[s, J^{-1}\mathbf{n}, J \right] \omega \quad (\forall \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})) .
\end{gathered}
$$

□

Наслідок 4.3. *Нехай* $\mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *і* $J_1 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Тоді $\widetilde{J_1}\mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J], \mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J] \widetilde{J_1} \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$, *причому:*

$$\widetilde{J_1}\mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J] = \mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J_1 J] ; \tag{4.20}$$

$$\mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J] \widetilde{J_1} = \mathbf{U}_\theta \left[s, J_1^{-1}\mathbf{n}, JJ_1 \right] . \tag{4.21}$$

Доведення. Рівність (4.20) випливає з рівності (4.13) та леми 4.1.

Доведемо рівність (4.21). Використовуючи лему 4.1 та рівність (4.20) отримуємо:

$$\mathbf{U}_\theta [s, \mathbf{n}, J] \widetilde{J_1} = \widetilde{J}\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \widetilde{J_1} = \widetilde{J}\mathbf{U}_\theta \left[s, J_1^{-1}\mathbf{n}, J_1 \right] = \mathbf{U}_\theta \left[s, J_1^{-1}\mathbf{n}, JJ_1 \right] .$$

□

З леми 4.1 і наслідку 4.3 випливає, що питання про належність добутку будь-яких узагальнених перетворень Лоренца до вихідного класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ може бути зведене до питання про належність до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ добутку елементарних перетворень Лоренца. І в наступних розділах вивчатиметься саме останнє питання.

5 Композиція узагальнених перетворень Лоренца з паралельними напрямками руху

Спочатку дослідимо композицію елементарних узагальнених перетворень Лоренца з однаковим напрямним вектором.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\xi,\eta) &:= \frac{1}{2}(\operatorname{sign}\xi+1)(\operatorname{sign}\eta+1)-1\\ &= \begin{cases}1, & \xi,\eta>0\\ -1, & \xi<0 \text{ або } \eta<0\end{cases}, \qquad \xi,\eta\in\mathbb{R}\setminus\{0\};\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]\,x := \sigma\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,x+\mu\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x, \quad x\in\mathfrak{H}_1\\ (\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \sigma,\mu\in\{-1,1\}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Очевидно, що $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ (для довільних $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\sigma,\mu\in\{-1,1\}$).

Лема 5.1. *Нехай* $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}],\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}]$ *(*$\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \theta,\theta_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ s,s_1\in\{-1,1\}$*) — елементарні узагальнені перетворення Лоренца з однаковим напрямним вектором* $\mathbf{n}$*. Тоді:*

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-ss_1}}[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]], \qquad \text{де} \quad s'=\mathfrak{S}(ss_1,\theta_1).$$

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\omega\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\omega' := \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}]\,\omega.$$

Тоді, використовуючи формули (4.6),(4.14) та рівності (2.4) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}]\,\omega = \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega' = \\ = \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\omega')-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\omega'\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+\\ + c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\omega')\,\mathbf{n}-s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega'+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\omega';\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\omega' = \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c} \right)\mathbf{e}_0 + \\ + c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega;$$

$$\mathcal{T}(\omega') = s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c}; \tag{5.4}$$

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega' = c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega; \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, \omega'\rangle &= \langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{n}, \omega'\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega'\rangle = \\ &= \langle \mathbf{n}, c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega\rangle = \\ &= c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle - s_1\varphi_0(\theta_1)\langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{n}, \omega\rangle = \\ &= c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - s_1\varphi_0(\theta_1)\langle \mathbf{n}, \omega\rangle; \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega' = \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega. \tag{5.7}$$

Підставляючи значення $\mathcal{T}(\omega')$, $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega'$, $\langle \mathbf{n}, \omega'\rangle$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega'$ з (5.4),(5.5),(5.6) та (5.7) в (5.3) одержуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta[s, \mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1, \mathbf{n}]\omega = \Bigg\{ & s\varphi_0(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c} \right) - \\ & - \varphi_1(\theta)\frac{c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - s_1\varphi_0(\theta_1)\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c} \Bigg\}\mathbf{e}_0 + \\ & + c\varphi_1(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c} \right)\mathbf{n} - \\ & - s\varphi_0(\theta)\left(c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega \right) + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega = \\ = \Bigg\{ & \left(ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\varphi_1(\theta_1) \right)\mathcal{T}(\omega) + \\ & + s\left(ss_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1) \right)\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c} \Bigg\}\mathbf{e}_0 + \\ & + cs\left(ss_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1) \right)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} + \\ & + \left(ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\varphi_1(\theta_1) \right)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\omega. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Використовуючи означення функцій $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_1(\cdot)$ (формула (4.7)) отримуємо:

$$ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\varphi_1(\theta_1) =$$

$$= ss_1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|}+\theta\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta_1|}+\theta_1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|}-\theta\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta_1|}-\theta_1\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(ss_1\left(\frac{1}{|\theta|}\frac{1}{|\theta_1|}+\theta\frac{1}{|\theta_1|}+\frac{1}{|\theta|}\theta_1+\theta\theta_1\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{|\theta|}\frac{1}{|\theta_1|}-\theta\frac{1}{|\theta_1|}-\frac{1}{|\theta|}\theta_1+\theta\theta_1\right)\right)=$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{|\theta_1|}+\frac{\theta_1}{|\theta|}\right), & ss_1=1\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta\theta_1|}+\theta\theta_1\right), & ss_1=-1\end{cases}=\begin{cases}\varphi_0\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right), & ss_1=1,\ \theta_1>0\\ -\varphi_0\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right), & ss_1=1,\ \theta_1<0\\ -\varphi_0\left(\theta\theta_1\right), & ss_1=-1\end{cases}=$$
$$=\mathfrak{S}\left(ss_1,\theta_1\right)\varphi_0\left(\theta\theta_1^{-ss_1}\right)=s'\varphi_0\left(\theta'\right), \tag{5.9}$$

де $s'=\mathfrak{S}\left(ss_1,\theta_1\right)$; $\theta'=\theta\theta_1^{-ss_1}$. Аналогічно знаходимо:

$$ss_1\varphi_1\left(\theta\right)\varphi_0\left(\theta_1\right)-\varphi_0\left(\theta\right)\varphi_1\left(\theta_1\right)=s'\varphi_1\left(\theta'\right). \tag{5.10}$$

Підставляючи праві частини рівностей (5.9),(5.10) замість відповідних виразів у формулі (5.8), отримуємо:

$$\mathbf{E}_\theta\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1}\left[\sigma s_1,\mathbf{n}\right]\omega=\left(s'\varphi_0\left(\theta'\right)\mathcal{T}\left(\omega\right)+ss'\varphi_1\left(\theta'\right)\frac{\langle\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+css'\varphi_1\left(\theta'\right)\mathcal{T}\left(\omega\right)\mathbf{n}+s'\varphi_0\left(\theta'\right)\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\omega+\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\omega.$$

Враховуючи рівності (2.4) останню формулу можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{E}_\theta\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1}\left[\sigma s_1,\mathbf{n}\right]\omega=\left(s'\varphi_0\left(\theta'\right)\mathcal{T}\left(\omega\right)+\varphi_1\left(\theta'\right)\frac{\langle ss'\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+c\varphi_1\left(\theta'\right)\mathcal{T}\left(\omega\right)\left(ss'\mathbf{n}\right)+s'\varphi_0\left(\theta'\right)\mathbf{X}_1\left[ss'\mathbf{n}\right]\omega+\mathbf{X}_1^{\perp}\left[ss'\mathbf{n}\right]\omega=$$
$$=\mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-ss_1}}\left[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right]\omega. \qquad \square$$

Тепер розглянемо композицію елементарних узагальнених перетворень Лоренца $\mathbf{E}_\theta\left[s,\mathbf{n}\right]$ та $\mathbf{E}_\theta\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]$ з паралельними напрямками руху (тобто при умові $\mathbf{n}\parallel\mathbf{n}_1$, що рівносильно $\mathbf{n}=\sigma\mathbf{n}_1$, де $\sigma\in\{-1,1\}$).

Лема 5.2. *Нехай* $\mathbf{E}_\theta\left[s,\mathbf{n}\right],\mathbf{E}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma\mathbf{n}\right]$ $\left(\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right),\ \theta,\theta_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \sigma,s,s_1\in\{-1,1\}\right)$ *— елементарні узагальнені перетворення Лоренца з паралельними напрямками руху. Тоді:*

$$\mathbf{E}_\theta\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma\mathbf{n}\right]=\mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma ss_1}}\left[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right],$$

де $s' = \mathfrak{S}(\sigma s s_1, \theta_1)$.

Доведення. Нехай, $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, — елементарні узагальнені перетворення Лоренца з паралельними напрямками руху. Використовуючи формули (4.6),(4.14) та рівності (2.4) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}]\,\omega &= \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\sigma\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\sigma\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\sigma\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\sigma\mathbf{n}]\,\omega = \\ &= \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\sigma\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\sigma\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\omega = \\ &= \sigma\left(\sigma s_1\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + \sigma\left(c\varphi_1(\theta_1)\mathcal{T}(\omega)\mathbf{n} - \sigma s_1\varphi_0(\theta_1)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \sigma\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\omega\right) = \\ &= \sigma\mathbf{U}_{\theta_1}[\sigma s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]]\,\omega \qquad (\omega\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})).\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що $\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n} = \mathbf{n}$, і застосовуючи лему 4.1, маємо:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}] = \sigma\mathbf{U}_{\theta_1}[\sigma s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]] = \sigma\mathbf{E}_{\theta_1}[\sigma s_1,\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] \\ (\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ \theta_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ \sigma,s_1\in\{-1,1\}).\end{gathered} \tag{5.11}$$

Отже, скориставшись лемою 5.1 та лемою 4.1, отримаємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}] &= \sigma\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[\sigma s_1,\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] = \\ &= \sigma\mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1}}[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] = \\ &= \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\sigma\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1}}[s',-ss'\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}]\right), \\ &\qquad\text{де } s' = \mathfrak{S}(\sigma s s_1,\theta_1).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Згідно з рівностями (5.2) та (2.4), $\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}] = \mathbb{I}_{1,\sigma}[-ss'\mathbf{n}]$, отже, рівність (5.12) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}] = \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\sigma\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1}}[\sigma(\sigma s'),-ss'\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[-ss'\mathbf{n}]\right).$$

І, скориставшись рівністю (5.11), отримаємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\sigma\mathbf{n}] &= \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1}}[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n}]\right) = \\ &= \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1}}[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]].\end{aligned}$$

□

Наступне твердження показує, що композиція довільних узагальнених перетворень Лоренца з паралельними напрямками руху завжди є узагальненим перетворенням Лоренца.

Твердження 5.1. *Нехай,* $\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right], \mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right] \in \mathfrak{OT}\left(\mathfrak{H},c\right)$.
Тоді $\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] \in \mathfrak{OT}\left(\mathfrak{H},c\right)$, *причому:*

$$\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1 J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right],$$

де $s' = \mathfrak{S}\left(\sigma s_1 s,\theta\right)$.

Доведення. Згідно з лемою 4.1,

$$\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbf{E}_\theta\left[s,J\mathbf{n}\right]\widetilde{J}$$
$$\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right] = \widetilde{J_1}\mathbf{E}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n}\right].$$

Отже, скориставшись лемою 5.2, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] &= \widetilde{J_1}\mathbf{E}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_\theta\left[s,J\mathbf{n}\right]\widetilde{J} = \\ &= \widetilde{J_1}\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-\sigma s_1 s'(\sigma J\mathbf{n}),\mathbb{I}_{-1,1}\left[\sigma J\mathbf{n}\right]\right]\widetilde{J} = \\ &= \widetilde{J_1}\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-s_1 s' J\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]\right]\widetilde{J},\end{aligned}$$

де $s' = \mathfrak{S}\left(\sigma s_1 s,\theta\right)$. Застосовуючи до останньої формули наслідок 4.3, маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] &= \widetilde{J_1}\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]J\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]J\right].\end{aligned} \tag{5.13}$$

Використовуючи (5.2) та унітарність оператора J для $x\in\mathfrak{H}_1$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]Jx &= -\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]Jx + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[J\mathbf{n}\right]Jx = \\ &= -\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]Jx + \left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]\right)Jx = \\ &= -\left\langle J\mathbf{n},Jx\right\rangle J\mathbf{n} + \mathbf{X}Jx - \left\langle J\mathbf{n},Jx\right\rangle J\mathbf{n} = \\ &= -\left\langle \mathbf{n},x\right\rangle J\mathbf{n} + Jx - \left\langle \mathbf{n},x\right\rangle J\mathbf{n} = \\ &= J\left(-\left\langle \mathbf{n},x\right\rangle \mathbf{n} + \mathbf{X}x - \left\langle \mathbf{n},x\right\rangle \mathbf{n}\right) = \\ &= J\left(-\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]x + \left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\right)x\right) = \\ &= J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]x.\end{aligned}$$

Отже, згідно з (5.13):

$$\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_\theta\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1 J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right]. \quad \square$$

Зауваження 5.1. Перетворення координат $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\,,\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1]$ у твердженні 5.1 справді мають паралельні напрямки руху. Щоб пояснити останню тезу для прикладу розглянемо випадок $\theta\neq-1$. Тоді, згідно з теоремою 4.2, перетворення координат $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]$ є v-детермінованим, причому $\mathcal{V}(\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$. Тому згідно з [11, формула (53)] перетворення координат $(\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])^{-1}$ також є v-детермінованим, причому $\mathcal{V}\left((\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])^{-1}\right)=J\mathcal{V}(\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}J\mathbf{n}$. Припустимо, що v-детерміноване перетворення координат $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]$ відображає координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\boldsymbol{l}$ в координати цієї ж точки в іншій системі відліку $\boldsymbol{l}'$, що рухається зі швидкістю $\mathcal{V}(\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$ відносно системи відліку $\boldsymbol{l}$. Тоді, система відліку $\boldsymbol{l}'$ буде рухатись відносно системи відліку $\boldsymbol{l}$ із швидкістю $\mathcal{V}\left((\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J])^{-1}\right)=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}J\mathbf{n}$. Отже, напрямний вектор руху системи відліку $\boldsymbol{l}'$ відносно $\boldsymbol{l}$ паралельний вектору $J\mathbf{n}$. Таким чином, система відліку $\boldsymbol{l}''$, пов'язана з перетворенням координат $\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1]$ має напрямний вектор руху $\sigma J\mathbf{n}$, паралельний вектору $J\mathbf{n}$.

Наступний наслідок показує, що операція взяття оберненого оператора не виводить за межі класу узагальнених пертворень Лоренца $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Наслідок 5.1. *Нехай,* $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. *Тоді* $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]^{-1}\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$*, причому:*

$$\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]^{-1}=\mathbf{U}_{\theta^s}\left[s_\theta,s_\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right], \tag{5.14}$$

де $s_\theta=\mathfrak{S}(s,\theta)$.

Доведення. Нехай, $\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Покладемо:

$$\begin{aligned}\theta_1:=\theta^s,\quad & s_1:=\sigma:=s_\theta=\mathfrak{S}(s,\theta),\\ & J_1:=J^{-1}.\end{aligned}$$

Згідно з твердженням 5.1:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1]\mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},J]&=\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s}}[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1J\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]=\\&=\mathbf{U}_{\theta^s\theta^{-s_\theta\cdot s_\theta\cdot s}}\left[s_\theta s',-s_\theta s'\mathbf{n},J^{-1}J\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right]=\end{aligned}$$

$$= \mathbf{U}_1\left[s_\theta s', -s_\theta s'\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right],$$

де $s' = \mathfrak{S}(\sigma s_1 s, \theta) = \mathfrak{S}(s_\theta s_\theta s, \theta) = \mathfrak{S}(s, \theta) = s_\theta$. Отже:

$$\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1, \sigma J\mathbf{n}, J_1]\mathbf{U}_\theta[s, \mathbf{n}, J] = \mathbf{U}_1\left[s_\theta s_\theta,\ -s_\theta s_\theta \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right] = \\ = \mathbf{U}_1\left[1, -\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right].$$

Використовуючи (4.6), (5.2) та (2.4), неважко переконатись, що для довільного $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, $\mathbf{U}_1[1, -\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\omega = \omega$. Отже, $\mathbf{U}_1[1, -\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]] = \mathbb{I}$. Таким чином, $\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1, \sigma J\mathbf{n}, J_1]\,\mathbf{U}_\theta[s, \mathbf{n}, J] = \mathbb{I}$. Звідси:

$$\mathbf{U}_\theta[s, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta_1}[s_1, \sigma J\mathbf{n}, J_1] = \mathbf{U}_{\theta^s}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right]. \qquad \square$$

Зауваження 5.2. Використовуючи співвідношення (4.6), (5.1), (2.4) та (4.10), рівність (5.14) можна звести до вигляду:

$$\mathbf{U}_\theta[s, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{U}_\theta\left[\widetilde{s}_\theta, \widetilde{s}_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right], \quad \text{де } \widetilde{s}_\theta = s\,\mathrm{sign}\,\theta. \tag{5.15}$$

6 Композиція узагальнених перетворень Лоренца з перпендикулярними напрямками руху

Лема 6.1. *Нехай,* $\mathbf{E}_\theta[s, \mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1, \mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *— елементарні узагальнені перетворення Лоренца з перпендикулярними напрямними векторами, тобто* $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$*. Тоді для довільного вектора* $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *справедлива рівність:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta[s, \mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\omega = \Bigg\{ & s s_1 \varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \\ & - \left(s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \omega \rangle}{c} \right) \Bigg\}\, \mathbf{e}_0 + \\ & + c\varphi_1(\theta) \left(s_1 \varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c} \right) \mathbf{n} - \\ & - \left(s\varphi_0(\theta) + 1 \right) \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \\ & + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\omega. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\omega' := \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\omega.$$

Тоді, використовуючи формули (4.6),(4.14), рівності (2.4) і враховуючи той факт, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega = \\
&\qquad = \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega' = \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\omega') - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \omega' \rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad\quad + c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\omega')\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega' + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega';
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
\omega' = {} & \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
& + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega;
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(\omega') = s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c}; \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega' &= \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(\mathbf{T}\omega' + \mathbf{X}\omega'\right) = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}\omega' = \\
&= \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right) = \\
&= c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \\
&\quad + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle\,\mathbf{n} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] = \mathbb{O}; \\
&\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1] = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\right) = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}].
\end{aligned}$$

Отже, згідно з (6.4), отримуємо:

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega' = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega; \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}, \omega' \rangle = \langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \omega' \rangle &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega' \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega \rangle = \\
&= \langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \omega \rangle = \langle \mathbf{n}, \omega \rangle.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Далі, використовуючи (6.5), маємо:

$$\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega' \;=\; \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\right)\omega' = \mathbf{X}\omega' - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega =$$

$$= c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \\ +\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\omega - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega. \tag{6.7}$$

Підставляючи значення $\mathcal{T}(\omega')$, $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega'$, $\langle\mathbf{n},\omega'\rangle$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\omega'$ з формул (6.3),(6.5),(6.6),(6.7) в (6.2), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega = \\
&\quad= \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega' = \left\{ s\varphi_0(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\right)\right. \\
&\qquad\left. -\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right\}\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + c\varphi_1(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{n} - \\
&\qquad - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \\
&\qquad + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\omega - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega = \\
&\quad= \left\{ ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \right. \\
&\qquad \left. - \left(s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\omega\rangle}{c}\right)\right\}\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + c\varphi_1(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega) - \varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\right)\mathbf{n} - \\
&\qquad - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - \\
&\qquad - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\omega + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\omega - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega,
\end{aligned}$$

що й необхідно було довести. □

Лема 6.2. *Нехай, $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ — елементарні узагальнені перетворення Лоренца з перпендикулярними напрямними векторами ($\langle\mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$).*

1. Перетворення координат $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta,\theta_1 \neq -1$, причому у випадку $\theta,\theta_1 \neq -1$ маємо:

$$\|\mathcal{V}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{1 + \frac{1-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2(\theta_1)} - \frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}}. \tag{6.8}$$

2. Нерівність $\|\mathcal{V}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])\| < c$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\theta, \theta_1 > 0$.

Доведення. **1.** Використовуючи з наслідок 5.1, лему 4.1 та рівність (5.2) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]^{-1} &= \mathbf{U}_\theta[s,\mathbf{n},\mathbb{I}_1]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta^s}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}, \mathbb{I}_1^{-1}\right] = \\
&= \mathbf{U}_{\theta^s}[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}, \mathbb{I}_1] = \mathbf{E}_{\theta^s}[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}]\,; \\
\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]^{-1} &= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1}}\left[(s_1)_{\theta_1}, (s_1)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right], \\
&\qquad \text{де} \quad s_\theta = \mathfrak{S}(s,\theta),\ (s_1)_{\theta_1} = \mathfrak{S}(s_1,\theta_1)\,.
\end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\ \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])^{-1} &= \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]^{-1}\,\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]^{-1} = \\
&= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1}}\left[(s_1)_{\theta_1}, (s_1)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right]\mathbf{E}_{\theta^s}[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}]\,.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Підставимо в (6.9) вектор $\omega = \mathbf{e}_0$, і скористаємося рівністю (6.1):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])^{-1}\mathbf{e}_0 &= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1}}\left[(s_1)_{\theta_1}, (s_1)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right]\mathbf{E}_{\theta^s}[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}]\,\mathbf{e}_0 = \\
&= (s_1)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0(\theta^s)\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\,\mathbf{e}_0 + \\
&\quad + c\varphi_1(\theta_1^{s_1})\,s_\theta\varphi_0(\theta^s)\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\,(s_1)_{\theta_1}\mathbf{n}_1 + c\varphi_1(\theta^s)\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\,(s_\theta\mathbf{n}) = \\
&= (s_1)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0(\theta^s)\,\mathbf{e}_0 \\
&\quad + cs_\theta\,(s_1)_{\theta_1}\varphi_1(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0(\theta^s)\,\mathbf{n}_1 + cs_\theta\varphi_1(\theta^s)\,\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

З рівності (6.10) випливає, що $\mathcal{T}\left((\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])^{-1}\mathbf{e}_0\right) = (s_1)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0(\theta^s)$. Отже (оскільки $(s_1)_{\theta_1}, s_\theta \in \{-1,1\}$), нерівність $\mathcal{T}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathbf{e}_0) \neq 0$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\varphi_0(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0(\theta^s) \neq 0$, тобто тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 \neq -1$. Отже, за означенням 2.2, перетворення координат $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 \neq -1$.

Розглянемо тепер випадок $\theta, \theta_1 \neq -1$. За означенням 2.2, на основі рівності (6.10), отримуємо:

$$\mathcal{V}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]) = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}\left((\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1])^{-1}\mathbf{e}_0\right)} =$$

$$= \frac{cs_\theta\,(s_1)_{\theta_1}\,\varphi_1\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0\,(\theta^s)\,\mathbf{n}_1 + cs_\theta\varphi_1\,(\theta^s)\,\mathbf{n}}{(s_1)_{\theta_1}\,s_\theta\varphi_0\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0\,(\theta^s)} =$$
$$= c\frac{\varphi_1\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0\,(\theta^s)\,\mathbf{n}_1 + \mathfrak{S}\,(s_1,\theta_1)\,\varphi_1\,(\theta^s)\,\mathbf{n}}{\varphi_0\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0\,(\theta^s)}.$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, то:

$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{\frac{\left(\varphi_1\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0\,(\theta^s)\right)^2 + \left(\varphi_1\,(\theta^s)\right)^2}{\varphi_0^2\,(\theta_1^{s_1})\,\varphi_0^2\,(\theta^s)}}.$$

Згідно з (4.10) при $s \in \{-1,1\}$ $|\varphi_0\,(\theta^s)| = |\varphi_0\,(\theta)|$, $|\varphi_1\,(\theta^s)| = |\varphi_1\,(\theta)|$. Отже:

$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{\frac{\varphi_1^2\,(\theta_1)\,\varphi_0^2\,(\theta) + \varphi_1^2\,(\theta)}{\varphi_0^2\,(\theta_1)\,\varphi_0^2\,(\theta)}}.$$

Звідси, використовуючи рівності (4.9), маємо:

$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{\frac{\varphi_0^2\,(\theta_1) - \operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2\,(\theta_1)} + \frac{\varphi_0^2\,(\theta) - \operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2\,(\theta)\,\varphi_0^2\,(\theta_1)}} =$$
$$= c\sqrt{1 + \frac{1 - \operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2\,(\theta_1)} - \frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2\,(\theta)\,\varphi_0^2\,(\theta_1)}}.$$

2. а) У випадку $\theta, \theta_1 > 0$ ($\operatorname{sign}\theta = \operatorname{sign}\theta_1 = 1$), згідно з рівністю (6.8), маємо:

$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{1 - \frac{1}{\varphi_0^2\,(\theta)\,\varphi_0^2\,(\theta_1)}} < c.$$

б) Аналогічно випадках $\theta < 0$, $\theta_1 > 0$ ($\operatorname{sign}\theta = -1$, $\operatorname{sign}\theta_1 = 1$) та $\theta_1 < 0$ ($\operatorname{sign}\theta_1 = -1$), скориставшись рівностями (4.9) отримуємо відповідно:

$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi_0^2\,(\theta)\,\varphi_0^2\,(\theta_1)}} > c;$$
$$\|\mathcal{V}\,(\mathbf{E}_\theta\,[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}\,[s_1,\mathbf{n}_1])\| = c\sqrt{1 + \frac{2}{\varphi_0^2\,(\theta_1)} - \frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2\,(\theta)\,\varphi_0^2\,(\theta_1)}} =$$

$$= c\sqrt{1+\frac{\varphi_0^2(\theta)+\left(\varphi_0^2(\theta)-\operatorname{sign}\theta\right)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} = c\sqrt{1+\frac{\varphi_0^2(\theta)+\varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} > c. \qquad \square$$

Лема 6.3. *Нехай, для елементарних узагальнених перетворень Лоренца* $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *з перпендикулярними напрямними векторами* $\langle \mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$ *має місце рівність:*

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J'],$$

де $s' \in \{-1,1\}$, $\theta' \in [-1,1]\setminus\{0\}$, $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. *Тоді:*

1. $\operatorname{sign}\theta' = \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)$;
2. $\varphi_0(\theta') = |\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)|$;
3. *якщо* $\theta,\theta_1 \neq -1$, *то* $s' = ss_1\operatorname{sign}(\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1))$;
4. $\varphi_1(\theta') = \sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}$;

   якщо, додатково, $\theta,\theta_1 \neq 1$, *то:*
5. $\mathbf{n}' = \dfrac{s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1+\varphi_1(\theta)\,\mathbf{n}}{\varphi_1(\theta')} = \dfrac{s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1+\varphi_1(\theta)\,\mathbf{n}}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$;
6. $J'\mathbf{n}' = \dfrac{s_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n}+\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$.

Доведення. **1.** Нехай $\theta,\theta_1 \neq -1$. Тоді, згідно з лемою 6.2, перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J'] = \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ є v-детермінованим, причому нерівність $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J'])\| < c$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\theta,\theta_1 > 0$. За теоремою 4.2 та наслідком 4.2, $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J'])\| = c\left|\frac{1-\theta'|\theta'|}{1+\theta'|\theta'|}\right|\|\mathbf{n}'\| = c\left|\frac{1-\theta'|\theta'|}{1+\theta'|\theta'|}\right|$. Звідси видно, що нерівність $\theta' > 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J'])\| < c$, тобто тоді і тільки тоді, коли $\theta,\theta_1 > 0$. У випадку, коли $\theta = -1$ або $\theta_1 = -1$, за лемою 6.2, перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J']$ не є v-детермінованим. А це, за теоремою 4.2, можливо лише коли $\theta' = -1$. Отже і у випадку $\theta = -1$ або $\theta_1 = -1$ перше твердження леми є істинним.

2,3. За умовою леми і теоремою 4.2, для довільного $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ має місце рівність:

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega = \mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J']\,\omega =$$

$$= \left(s' \varphi_0 \left(\theta'\right) \mathcal{T}(\omega) - \varphi_1 \left(\theta'\right) \frac{\langle \mathbf{n}', \omega \rangle}{c} \right) \mathbf{e}_0 +$$
$$+ J' \left(c \varphi_1 \left(\theta'\right) \mathcal{T}(\omega) \mathbf{n}' - s' \varphi_0 \left(\theta'\right) \mathbf{X}_1 \left[\mathbf{n}'\right] \omega + \mathbf{X}_1^{\perp} \left[\mathbf{n}'\right] \omega \right) \quad (6.11)$$

Прирівнюючи в правих частинах рівностей (6.1) і (6.11) коефіцієнти при векторі $\mathbf{e}_0$ отримуємо рівність:

$$s s_1 \varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1) \mathcal{T}(\omega) - \left(s \varphi_0 (\theta) \varphi_1 (\theta_1) \frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c} + \varphi_1 (\theta) \frac{\langle \mathbf{n}, \omega \rangle}{c} \right) =$$
$$= s' \varphi_0 \left(\theta'\right) \mathcal{T}(\omega) - \varphi_1 \left(\theta'\right) \frac{\langle \mathbf{n}', \omega \rangle}{c}, \qquad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \quad (6.12)$$

Підставимо в останню рівність вектор виду $\omega_0 = \mathbf{e}_0$. Тоді отримаємо:

$$s s_1 \varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1) = s' \varphi_0 \left(\theta'\right);$$

Отже з рівності (6.12) випливає, що:

$$s \varphi_0 (\theta) \varphi_1 (\theta_1) \frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega \rangle}{c} + \varphi_1 (\theta) \frac{\langle \mathbf{n}, \omega \rangle}{c} = \varphi_1 \left(\theta'\right) \frac{\langle \mathbf{n}', \omega \rangle}{c}, \qquad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}),$$

тобто:

$$\langle s \varphi_0 (\theta) \varphi_1 (\theta_1) \mathbf{n}_1 + \varphi_1 (\theta) \mathbf{n}, \omega \rangle = \langle \varphi_1 \left(\theta'\right) \mathbf{n}', \omega \rangle, \qquad \omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

Звідси:

$$s \varphi_0 (\theta) \varphi_1 (\theta_1) \mathbf{n}_1 + \varphi_1 (\theta) \mathbf{n} = \varphi_1 \left(\theta'\right) \mathbf{n}'.$$

Таким чином, справедливі наступні рівності:

$$\begin{gathered} s' s s_1 \varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1) = \varphi_0 \left(\theta'\right) \\ s \varphi_0 (\theta) \varphi_1 (\theta_1) \mathbf{n}_1 + \varphi_1 (\theta) \mathbf{n} = \varphi_1 \left(\theta'\right) \mathbf{n}' \end{gathered} \quad (6.13)$$

За умовою леми $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, отже $\varphi_0 \left(\theta'\right) = \frac{1+\theta' |\theta'|}{2|\theta'|} \geq 0$. Тому з першої рівності (6.13) випливає рівність:

$$\varphi_0 \left(\theta'\right) = \left|\varphi_0 \left(\theta'\right)\right| = \left|\varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1)\right|,$$

а за умови $\theta, \theta_1 \neq -1$ $(\varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1) \neq 0)$ і рівність:

$$s' s s_1 = \operatorname{sign} \left(\varphi_0 (\theta) \varphi_0 (\theta_1) \right).$$

4. Використовуючи рівності (4.9), а також перший і другий пункти даної леми отримуємо, $\varphi_1^2(\theta') = \varphi_0^2(\theta') - \operatorname{sign}\theta' = \varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)$. Оскільки, за умовою, $\theta' \in [-1,1]\backslash\{0\}$, то $\varphi_1(\theta') = \frac{1-\theta'|\theta'|}{2|\theta'|} \geq 0$. Отже, $\varphi_1(\theta') = \sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}$.

5. П'ятий пункт даної леми випливає з четвертого пункту та другої рівності (6.13).

6. Підставляючи в рівності (6.1) та (6.11) $\omega = \mathbf{e}_0$, та враховуючи, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_0\rangle = \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_0\rangle = 0$ і $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{e}_0 = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathbf{e}_0 &= ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{e}_0 + \\ &+ cs_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1; \qquad (6.14)\\ \mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathbf{e}_0 &= \left(s'\varphi_0(\theta')\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) - \varphi_1(\theta')\,\frac{\langle \mathbf{n}', \mathbf{e}_0\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &+ J'\left(c\varphi_1(\theta')\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\,\mathbf{n}' - s'\varphi_0(\theta')\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}']\,\mathbf{e}_0 + \right.\\ &\left. + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}']\,\mathbf{e}_0\right) = s'\varphi_0(\theta')\,\mathbf{e}_0 + c\varphi_1(\theta')\,J'\mathbf{n}' \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (6.14) і (6.15) отримуємо:

$$\begin{aligned}&s'\varphi_0(\theta')\,\mathbf{e}_0 + c\varphi_1(\theta')\,J'\mathbf{n}' = \\ &= ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{e}_0 + cs_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1,\end{aligned}$$

або, враховуючи першу рівність (6.13), та пункт 4 даної леми маємо:

$$\begin{aligned}c\varphi_1(\theta')\,J'\mathbf{n}' &= cs_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1;\\ J'\mathbf{n}' &= \frac{s_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n} + \varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1}{\varphi_1(\theta')} = \\ &= \frac{s_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{n} + \varphi_1(\theta_1)\,\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}.\end{aligned}$$

□

Теорема 6.1. *Нехай,* $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *— елементарні узагальнені перетворення Лоренца з перпендикулярними напрямними векторами (*$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$*).*

Добуток перетворень $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]$ *і* $\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ *належить до класу* $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:*

1) $\theta, \theta_1 > 0$, *2)* $\theta = 1$ *або* $\theta_1 = 1$, *3)* $\theta = \theta_1 = -1$.

Доведення. Доведення теореми розіб'ємо на наступні випадки.

Випадок 1: $\theta, \theta_1 > 0$. В цьому випадку, згідно з теоремою 4.2, $\|\mathcal{V}(\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}])\| = c\left|\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\right| < c$ і $\mathcal{V}(\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]) < c$. Отже, за наслідком 4.1, $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$. Оскільки (див. розділ 3) множина операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ є групою операторів, то $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \subseteq \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ (згідно (4.1)).

Випадок 2: $\theta = 1$ або $\theta_1 = 1$. Нехай, $\theta = 1$. Тоді, перетворення координат $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega &= \mathbf{E}_1[s,\mathbf{n}]\,\omega = s\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0 - s\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega = \\
&= s\left(\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0 - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + s\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega\right) = \\
&= s\left(\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0 + \mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\left(\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega\right)\right).
\end{aligned}$$

Отже, використовуючи формулу (4.12), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega &= s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^\sim\left(\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\omega + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega\right) = \\
&= s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^\sim\omega.
\end{aligned}$$

Отже, $\mathbf{E}_1[s,\mathbf{n}] = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^\sim$. Аналогічно отримуємо $\mathbf{E}_1[s,\mathbf{n}_1] = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^\sim$. Тому, враховуючи, що, згідно (4.13) та (5.2), $\left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^\sim\right)^2 = \left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^2\right)^\sim = \widetilde{\mathbb{I}_1} = \mathbb{I}$, застосовуючи лему 4.1, маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}] &= s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^\sim = \\
&= s\left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^\sim\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^\sim\right)\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^\sim = \\
&= \left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^\sim\mathbf{E}_1[s,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_1\left[s,\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right].
\end{aligned}$$

Отже, у випадку $\theta = 1$ перетворення $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]$ і $\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ мають паралельні напрямки руху. Тому, згідно з твердженням 5.1,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_1\left[s,\mathbb{I}_1\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right]\times \\
\times\,\mathbf{U}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c).
\end{aligned}$$

Аналогічно коли $\theta_1 = 1$, маємо $\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_1\left[s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\right]$. Оскільки $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$, то $\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n} = -s_1\mathbf{n}$. Тому, згідно з твердженням 5.1:

$$\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{U}_\theta \left[s, -s_1 \mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\, \mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \mathbb{I}_1\right] \times \\
&\quad \times \mathbf{U}_1 \left[s_1, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\, \mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)
\end{aligned}
$$

Випадок 3: $\theta = \theta_1 = -1$. Оскільки $\varphi_0(-1) = 0$, $\varphi_1(-1) = 1$, то у цьому випадку перетворення $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]$ і $\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]$ мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\omega &= -\frac{\langle \mathbf{n}, \omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\omega, \\
\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega &= -\frac{\langle \mathbf{n}_1, \omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega.
\end{aligned}
$$

Отже, враховуючи, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$, для довільного вектора $\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega = \\
&\quad = -\frac{\left\langle \mathbf{n}, -\frac{\langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega \right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + c\mathcal{T}\left(-\frac{\langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right)\mathbf{n} + \\
&\qquad + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\left(-\frac{\langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right) = \\
&\quad = -\frac{\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - c\frac{\langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle}{c}\mathbf{n} + \\
&\qquad + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\left(c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right) = \\
&\quad = -\frac{\left\langle \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n}, \omega\right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - \langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle\,\mathbf{n} + \\
&\qquad + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\left(c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega\right).
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$, то, використовуючи формули (2.4) маємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n} = \mathbf{X}\mathbf{n} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n} = \mathbf{n} - \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}\rangle\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}, \\
&\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1.
\end{aligned}
$$

Підставимо отримані значення в формулу (6.16):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\omega = -&\frac{\langle \mathbf{n},\omega\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{n}_1 - \langle \mathbf{n}_1,\omega\rangle\,\mathbf{n} + \\
&+ \mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^\perp[\mathbf{n}_1]\,\omega \quad (\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})).
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

(підкреслимо, що, оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, то $\mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] = 0$, а отже, згідно (2.4), оператори $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}]$ і $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1]$ комутують).

Покладемо:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} x = \langle \mathbf{n}, x \rangle \mathbf{n}_1 - \langle \mathbf{n}_1, x \rangle \mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x, \quad x \in \mathfrak{H}_1.$$

Використовуючи оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$ і співвідношення (2.4) рівність (6.17) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta} [s, \mathbf{n}] \mathbf{E}_{\theta_1} [s_1, \mathbf{n}_1] \omega = -\frac{\langle \mathbf{n}, \omega \rangle}{c} \mathbf{e}_0 + \\ + \mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \left(c\mathcal{T}(\omega) \mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] \omega \right) \quad (\omega \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Доведемо, що $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$ і оператори $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1]$ комутують, то для довільного $x \in \mathfrak{H}_1$ вектори $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1$ і $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x$ попарно ортогональні. Отже, за означенням оператора $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$, для $x \in \mathfrak{H}_1$ справедлива рівність:

$$\|\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} x\|^2 = \langle \mathbf{n}, x \rangle^2 + \langle \mathbf{n}_1, x \rangle^2 + \left\| \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x \right\|^2.$$

Далі, враховуючи, що, згідно (2.4),

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] &= (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}]) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1]) = \\ &= \mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] \mathbf{X} + \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] = \\ &= \mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}]. \end{aligned} \tag{6.19}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} x\|^2 &= \langle \mathbf{n}, x \rangle^2 + \langle \mathbf{n}_1, x \rangle^2 + \left\| \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x \right\|^2 = \\ &= \left\| \langle \mathbf{n}, x \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{n}_1, x \rangle \mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x \right\|^2 = \\ &= \left\| \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] x + \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] x + \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}] x \right\|^2 = \\ &= \|\mathbf{X}_1 [\mathbf{n}] x + \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] x + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}_1] - \mathbf{X}_1 [\mathbf{n}]) x\|^2 = \\ &= \|\mathbf{X} x\|^2 = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathfrak{H}_1). \end{aligned}$$

Отже, оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$ є ізометричним. Використовуючи означення оператора $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$, комутування операторів $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp} [\mathbf{n}_1]$ і рівність (6.19) неважко переконатися, що $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \mathcal{J}_{-\mathbf{n},-\mathbf{n}_1} x = \mathcal{J}_{-\mathbf{n},-\mathbf{n}_1} \mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} x = x$

($x \in \mathfrak{H}_1$). Отже, оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$ має обернений оператор $\mathcal{J}_{-\mathbf{n},-\mathbf{n}_1}$ на $\mathfrak{H}_1$. Тому $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Таким чином, згідно з рівністю (6.18), $\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \mathbf{E}_{\theta_1} [s_1, \mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{-1} [1, \mathbf{n}, \mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}] \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$.

Випадок 4: $\theta_1 < 0$, $\theta \notin \{-1, 1\}$. Припустимо, що в цьому випадку добуток перетворень координат $\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \mathbf{E}_{\theta_1} [s_1, \mathbf{n}_1]$ належить до класу $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$. Тоді, за теоремою 4.2 існують числа $s' \in \{-1, 1\}$, $\theta' \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, вектор $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і оператор $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що $\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \mathbf{E}_{\theta_1} [s_1, \mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{\theta'} [s', \mathbf{n}', J']$. Звідси, за лемою 6.3, $\mathbf{n}' = \frac{s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n}}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$. Тому, враховуючи, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$ і використовуючи формули (4.9), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{n}'\| &= \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_1^2(\theta_1) + \varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta, \theta_1)}} = \\
&= \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)\,(\varphi_0^2(\theta_1) - \operatorname{sign}\theta_1) + (\varphi_0^2(\theta) - \operatorname{sign}\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta, \theta_1)}} = \\
&= \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)\,(\varphi_0^2(\theta_1) + 1) + (\varphi_0^2(\theta) - \operatorname{sign}\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} = \\
&= \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta) - 1 - \operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}}.
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Оскільки $\theta \notin \{-1, 1\}$, то $\varphi_0(\theta) = \frac{1+\theta|\theta|}{2|\theta|} \neq 0$, $\varphi_1(\theta) = \frac{1-\theta|\theta|}{2|\theta|} \neq 0$. Отже, у випадку $\theta < 0$ з рівності (6.20) отримуємо:

$$
\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta) - 1 - (-1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} > 1,
$$

а у випадку $\theta > 0$ маємо:

$$
\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta) - 2}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} > 1.
$$

Таким чином, в обох випадках $\|\mathbf{n}'\| > 1$, що суперечить умові $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Остання суперечність доводить, що добуток операторів $\mathbf{E}_\theta [s, \mathbf{n}] \mathbf{E}_{\theta_1} [s_1, \mathbf{n}_1]$ не може належати до $\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$.

Випадок 5: $\theta < 0$, $\theta_1 \notin \{-1,1\}$. Припустимо, що в цьому випадку $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. За теоремою 4.2 існують числа $s' \in \{-1,1\}$, $\theta' \in [-1,1]\setminus\{0\}$, вектор $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і оператор $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{\theta'}[s',\mathbf{n}',J']$. Звідси, за лемою 6.3, $J'\mathbf{n}' = \frac{s_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n}+\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$. Тому, враховуючи, що $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$ і використовуючи формули (4.9), аналогічно до попереднього випадку, отримуємо:

$$\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta_1)\,\varphi_1^2(\theta)+\varphi_1^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-1-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}}. \tag{6.21}$$

Оскільки $\theta_1 \notin \{-1,1\}$, то $\varphi_0(\theta_1) \neq 0$, $\varphi_1(\theta_1) \neq 0$. Отже, у випадку $\theta_1 < 0$ з рівності (6.21) отримуємо:

$$\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-1-(-1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1,$$

а у випадку $\theta_1 > 0$ маємо:

$$\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-2}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_1^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1.$$

Таким чином, в обох випадках $\|J'\mathbf{n}'\| > 1$. Але, оскільки J' — унітарний оператор і $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, то норма $\|J'\mathbf{n}'\|$ мусить дорівнювати одиниці. Отже, ми приходимо до протиріччя. Остання суперечність доводить, що і в цьому випадку $\mathbf{E}_\theta[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1}[s_1,\mathbf{n}_1] \notin \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. □

Зауваження 6.1. Підкреслимо, що коли $\theta,\theta_1 \neq 1$ у всіх трьох випадках, перерахованих в формулюванні теореми 6.1 обчислення норми векторів $\mathbf{n}'$ та $J'\mathbf{n}'$ з допомогою леми 6.3 приводить до результату $\|\mathbf{n}'\| = \|J'\mathbf{n}'\| = 1$. Отже, в цих випадках, одержати суперечність (як при доведенні негативних результатів теореми 6.1) неможливо.

Література

[1] Madarász, J. X. & Székely, G. *The existence of superluminal particles is independent of a relativistic dynamics.* // First International Conference on Logic and Relativity. – Budapest, 2012. (http://www.renyi.hu/conferences/nemeti70/LR12Talks/madarasz-szekely.pdf).

[2] Székely, G. *The existence of superluminal particles is consistent with the kinematics of Einstein's special theory of relativity.* – Preprint: arXiv:1202.5790. – 2012. (http://arxiv.org/abs/1202.5790v1).

[3] Грушка Я.І. *Видимість у мінливих множинах.* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Том. 9. – N 2. – 2012. – С. 122-145.

[4] Grushka Ya.I. *Abstract concept of changeable set.* – Preprint: arXiv:1207.3751v1. – 2012. (http://arxiv.org/abs/1207.3751v1).

[5] Грушка Я.І. *Мінливі множини та їх властивості.* // Доповіді Національної академії наук України. – N 5. – 2012. – С. 12-18.

[6] Біланюк О. *Тахіони. Вибрані публікації до 40-річчя тахіонової гіпотези.* – Львів: Євросвіт, 2002. – 160 с.

[7] Bilaniuk, O., Sudarshan, E. C. G. *Particles beyond the Light Barrier.* // Physics Today. – vol. 22. – N 5. – 1969. – pp. 43-51.

[8] James M. Hill and Barry J. Cox. *Einstein's special relativity beyond the speed of light.* // Proceedings of the Royal Society (A: Mathematical, Physical and Engineering Science). – Published on-line, 3 October 2012 in advance of the print journal (doi:10.1098/rspa.2012.0340).

[9] Ricardo S. Vieira. *An Introduction to the Theory of Tachyons.* – Preprint: arXiv:1112.4187v2. – 2012. (http://arxiv.org/abs/1112.4187v2).

[10] E. Recami. *Classical Tachyons and Possible Applications.* // Riv. Nuovo Cim. Vol. 9. – s. 3. – no. 6. – 1986. – pp. 1-178.

[11] Grushka Ya.I. *Tachyon Generalization for Lorentz Transforms* // Methods of Functional Analysis and Topology. – Vol. 20. – no. 2. – 2013.

[12] W. F. Pfeffer. *Lorentz Transformations of a Hilbert Space.* // American Journal of Mathematics Vol. 103. – no. 4. – 1981. – pp. 691-709.

[13] W. Benz. *Lorentz-Minkowski distances in Hilbert spaces.* // Geometriae Dedicata Vol. 81. – no. 1. – 2000. - pp. 219-230.

[14] Benz, W. *On Lorentz-Minkowski geometry in real inner product spaces.* // Advances in Geometry. – 2003: S1-S12.

[15] М. А. Наймарк. *Линейные представления группы Лоренца.* // УМН. – Том IX. – Вып. 4 (62). – 1954. – С. 19-93.