Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 170–184

УДК 517.956.223

А.В. Заворотинский

(Черниговский нац. пед. ун-т им.Т.Г. Шевченко, Чернигов)

О слабо эллиптических с параметром краевых задачах

zavorot@ukr.net

In the bounded Euclidean domain, we investigate elliptic boundary value problems that depend polynomially on a parameter. Moreover, the boundary conditions are assumed to contain additional unknown functions defined on the boundary. We prove new a priori estimates of solutions to these problems in appropriate Sobolev spaces.

У евклідовій обмеженій області досліджуються еліптичні крайові задачі, для яких еліптичне рівняння залежить полиномиально від параметра, а крайові умови містять додаткові невідомі функції на межі. Отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач у просторах Соболєва.

1 Введение

Эллиптические операторы с параметром играют важную роль в теории эллиптических уравнений и её приложений. Среди них отдельный интерес представляют слабо эллиптические краевые задачи, рассмотренные Л. Р. Волевичем [1, 2]. Данный класс задач является обобщением эллиптических с параметром задач, рассмотренных Ш. Агмоном [3] и М. С. Аграновичем, М. И. Вишиком [4]. Эллиптические задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области были исследованы в работах [5, 6, 7]. Такие задачи возникают в теории упругости, гидродинамике и, как вспомогательные, в теории эллиптических краевых задач в негладких областях а также при исследовании гиперболических уравнений.

Цель настоящей работы – установить априорные оценки для слабо эллиптической с параметром граничной задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Эта статья является продолжением предыдущей работы автора [8], в которой были получены интегральные оценки фундаментальной системы решений для исследованной задачи.

Отметим, что слабо эллиптические задачи тесно связаны со смешанной задачей для параболических уравнений, не разрешённых относительно старшей производной по времени [9].

Статья состоит из 7 пунктов. Пункт 1 — введение. Пункт 2 содержит постановку задачи. В п. 3 введены необходимые функциональные пространства. В п. 4 сформулирован основной результат работы. В п. 5 приводятся вспомогательные утверждения, которые касаются оценок фундаментального решения задачи. В п. 6 приведено доказательство основного результата. В п. 7 сформулированы выводы.

2 Постановка задачи.

Пусть G – ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$. Предполагается, что её граница ∂G является бесконечно гладким многообразием без края и размерности $n-1$. Как обычно, $\overline{G} := G \cup \partial G$.

Рассмотрим следующую краевую задачу, содержащую параметр λ:

$$A(x, D, \lambda)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A_{2m-j}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \tag{2}$$

$$x' \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m+\varkappa.$$

Здесь $\lambda \in [0; \infty)$, $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu$, $A_{2m-j}(x, D)$ – линейный дифференциальный оператор (л. д. о.) в $\overline{G}$, $B_j(x, D)$ – граничный л.д.о. на ∂G, $C_{j,k}(x', D')$ – касательный л. д. о. на ∂G. Коэффициенты этих операторов – комплекснозначные бесконечно гладкие функции, а порядки удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \leq 2m - j, \quad \operatorname{ord} B_j = m_j, \quad \operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + \alpha_k,$$

где $m_j, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ и

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \leq \ldots m_{m+\varkappa}. \tag{3}$$

Как обычно, $C_{j,k} \equiv 0$, если $m_j + \alpha_k < 0$.

Задача (1), (2), кроме неизвестной функции $u(x)$ аргумента $x \in \overline{G}$, содержит $\varkappa$ дополнительных неизвестных функций $\sigma_1(x'), \ldots, \sigma_\varkappa(x')$ аргумената $x' \in \partial G$. Поэтому число краевых условий равно $m + \varkappa$.

Сформулируем условия, которым удовлетворяет задача (1), (2). Пусть $x \in \overline{G}$. Обозначим

$$A^0(x, \xi, \lambda) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A^0_{2m-j}(x, \xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0; \infty),$$

где $A^0_{2m-j}(x, \xi)$ — главный символ оператора $A_{2m-j}(x, D)$. Заметим, что функция $A^0(x, \xi, |\xi|)$ однородная по ξ порядка $2m$.

Условие 1. *Существует число* > 0 *такое, что*

$$|A^0(\xi, \lambda)| \geq C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu} \tag{4}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, *и* $\lambda \in [0; \infty)$.

Это — условие *слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x, D, \lambda)$ в точке $x \in \overline{G}$. При $\mu = 0$ оно переходит в известное условие эллиптичности с большим праметром [3, 4, 10].

Замечание 1. *Неравенство* (4) *равносильно выполнения следующих трёх условий:*

$$A^0_{2m}(x, \xi) \neq 0, \quad A^0_{2\mu}(x, \xi) \neq 0, \quad A^0(x, \xi, \lambda) \neq 0 \tag{5}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, *и* $\lambda > 0$. Отметим, что первые два неравенства в (5) означают эллиптичность операторов $A^0_{2m}(x, \xi)$ и $A^0_{2\mu}(x, \xi)$, соответственно.

Пусть $x' \in \partial G$, а U — достаточно малая окрестность точки x' из топологии на ∂G. Выберем в U локальные координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ такие, что x_n — расстояние от точки $x \in U$ до границы ∂G. Запишем в этих координатах символы $A^0_{2m-j}(x', \xi)$ и $A^0(x, \xi, \lambda)$ для каждого фиксированного $\lambda \in [0; \infty)$. Полученные полиномы обозначим через $A^0_{2m-j}(\xi)$ и $A^0(\xi, \lambda)$, соответственно.

Предположим, что выполняется условие 1 в точке $x = x'$. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$. Тогда уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ и

$A^0_{2\mu}(\xi',\tau) = 0$ не имеют вещественных τ-корней. Обозначим через $m^{\pm}(\xi',\lambda)$ и $\mu^{\pm}(\xi',\lambda)$ число корней советственно первого и второго уравнений, лежащих в полуплоскости $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\tau \gtrless 0\}$. Но тогда числа $m^{\pm}(\xi',\lambda)$ на самом деле не зависят от ξ' и λ, обозначим их через $m^{\pm}$, и $m^{+} + m^{-} = 2m$. Поскольку корни уравнения $A^0(\xi',\tau,\lambda) = 0$ непрерывно зависят от λ, то числа $m^{\pm}$ совпадают с числом нулей в верхней (нижней) полуплоскости уравнения $A^0_{2m}(\xi',\tau) = 0$, соответствующего значению параметра $\lambda = 0$.

Условие 2. *Для каждого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *выполняются равенства*

$$m^{+}(\xi') = m^{-}(\xi') = m, \quad \mu^{+}(\xi') = \mu^{-}(\xi') = \mu$$

Это условие *правильной слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x',D,\lambda)$ в точке $x' \in \partial G$.

Заметим, что при $n \geq 3$ равенство $\mu^{+}(\xi') = \mu^{-}(\xi')$ выполняется автоматически [15].

Пусть как и прежде, $x' \in \partial G$. Запишем в локальных координатах главные символы операторов $B_j(x',D)$ и $C_{j,k}(x',D')$. Полученные полиномы обозначим соответственно через $B^0_j(\xi)$ и $C^0_{j,k}(\xi)$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi',\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задаче (1), (2) отбросим младшие члены дифференциальных операторов, положим $f \equiv 0$, перейдем к локальным координатам в окрестности точки ξ' и применим преобразование Фурье по переменным $x_1,\cdots,x_{n-1}$. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (1) на полуоси $t := x_n > 0$:

$$A^0(\xi',D_t,\lambda)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$(B^0_j(\xi',D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1,\ldots,m+\varkappa. \tag{7}$$

Здесь гладкая функция $v(t)$ и числа $\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa$ искомые, а $\varphi_1,\ldots,\varphi_{m+\varkappa}$ — произвольно заданные комплексные числа. Задача (6), (7) зависит от двух параметров $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\lambda \in [0,\infty)$. Она называется *граничным символом* задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$.

Нас будут интересовать решения, удовлетворяющие условию

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} t \to +\infty. \tag{8}$$

Условие 3. *Для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\lambda > 0$ *и* $\varphi_1,\ldots,\varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (6), (7), (8) *имеет единственное решение* $(v(t),\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa)$.

Это аналог условия Лопатинского для краевой задачи (1), (2) при фиксированном λ.

В следующих двух условиях идет речь о разрешимости краевой задачи для оператора $A^0(\xi', D_t, \lambda)$ в предельных случаях $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$ (ср. с [15], [11]).

Пусть $r \in \{m, \mu\}$. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$A^0_{2r}(\xi', D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{10}$$

Условие 4. *Для любого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (9)*,* (10)*,* (8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ *при* $r = m$*.*

Условие 5. *Для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (9)*,* (10)*,* (8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ *при* $r = \mu$*.*

Поскольку при $\lambda \neq 0$ уравнение $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$A^0_{2\mu}(\xi', z) + \lambda^{-1} A^0_{2\mu+1}(\xi', z) + \cdots + \lambda^{2\mu-2m} A^0_{2m}(\xi', z) = 0,$$

то при $|\lambda| >> 1$ имеются 2μ корней уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$, близких к корням уравнения $A^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$. Сделаем замену $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Поскольку при $\varepsilon = 0$ оператор $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ совпадает с оператором $A^0_{2\mu}(\xi', D_t)$ порядка $2\mu < 2m$, то при малых $\varepsilon > 0$ требуются поправки к решению задачи (6), (7), позволяющие удовлетворить оставшимся $m - \mu$ краевым условиям. Из метода Вишика–Люстерника [13, 15] вытекает, что эти поправки являются решением следующей краевой задачи:

$$A^0(0, D_t, 1)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{11}$$

$$(B^0(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{12}$$

Условие 6. *Для любых* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (11)*,* (12)*,* (8) *имеет единственное решение* $v(t)$*.*

Определение. *Краевая задача* (1)*,* (2) *называется слабо эллиптической с параметром если в произвольной точке* $x \in \overline{G}$ *выполняется условие* 1 *и в произвольной точке* $x' \in \partial G$ *выполняются условия* $2 - -6$*.*

Из условий 1, 2 и 3 следует, что при произвольных фиксированных $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$ краевая задача (1), (2) эллиптическая как задача без параметра, но с дополнительными неизвестными функциями на границе области [6, 5].

Наряду с задачами вида (1), (2) можно рассматривать задачи, получающиеся при замене "большого" параметра λ на "малый" параметр $\varepsilon = 1/\lambda > 0$, рассмотренные в работах автора [11, 12]:

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A_{2m-j}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in G,$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'),$$
$$x' \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Замечание 2. Рассматриваемый класс задач без дополнительных неизвестных функция был рассмотрен в [13] и обобщен в [14, 15].

3 Функциональные пространства, зависящие от параметра

Введём необходимые нам функциональные пространства. Пусть $r, s \in \mathbb{R}^n$, $r \geq s \geq 0$. Через $H^{r,s} = H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность элементов соболевского пространства $H^r(\mathbb{R}^n)$, снабжённую гильбертовой нормой

$$||u||_{r,s} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\lambda|^2 + |\xi|^2)^{(r-s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2}, \tag{13}$$

где $\hat{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$.

Введем обозначение

$$\Xi_{\rho,\sigma}(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} |\xi|^\sigma (|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{(\rho-\sigma)/2}, & \sigma \geq 0\,, \\ (|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{\rho/2}, & \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Определим $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ как факторпространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)/H^{r,s}_-(\mathbb{R}^n)$, где $H^{r,s}_-(\mathbb{R}^n)$ подпространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений), сосредоточенных в полупространстве $\mathbb{R}^n_- = \{(x, t), \quad t \leq 0\}$ с фактор-нормой

$$||u; \mathbb{R}^n_+||_{r,s} := \inf_{Lu \in T(u)} ||Lu; \mathbb{R}^n||_{r,s}.$$

Здесь $T(u)$ обозначает класс смежности элемента u, а Lu — произвольные представители этого класса.

Поскольку $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ — это соболевское пространство $H^r(\mathbb{R}^n)$ с точностью до эквивалентности норм, то при $r > \ell+1/2$ определен оператор следа $\mathcal{T}_\ell : u(x) \to D_n^\ell u(x',0)$. Укажем нормы, в которых операторы следа будут равномерно ограниченными по $\lambda \in [0;\infty)$. Используя обозначения (14), определим пространство $\mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ функций $f(x')$ с нормой

$$||f, \mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})|| = \tag{15}$$

$$= \begin{cases} (1+|\lambda|)^{\rho-\sigma}||f,\mathbb{R}^{n-1}|| + ||\Xi_{\rho,\sigma}(D',\lambda)f,\mathbb{R}^{n-1}||\,, & \sigma \geq 0\,, \\ ||\Xi_{\rho,\sigma}(D',\lambda)f,\mathbb{R}^{n-1}||\,, & \sigma < 0\,. \end{cases}$$

Отметим, что $\mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ совпадает с пространством $H^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ при $\sigma \geq 0$, а при $\sigma < 0$, вообще говоря, является шире его. При $r > \ell + 1/2$ и $s \neq \ell + 1/2$ верно неравенство

$$||(D_n^\ell f)(.,0); \mathcal{H}^{r-\ell-1/2,s-\ell-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})|| \leq c||f;\mathbb{R}^n||_{r,s}.$$

Аналоги пространства $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ на многообразии G с гладкой границей ∂G определяются стандартным образом (см. детали в [1, 15]).

4 Основной результат

Сформулируем основной результат статьи. Пусть, для простоты, r и s - целые числа. Предположим, что выполнены условие (3) и неравенства

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r > m_j + \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{16}$$

Краевой задаче (1), (2) сопоставим линейный непрерывный оператор

$$\mathcal{A} : (u, \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa) \longrightarrow (f, g_1, \ldots, g_{m+\varkappa}),$$

который действует в паре пространств

$$H^{r,s}(G) \times \prod_{i=1}^{\varkappa} \mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2,s+\alpha_i-1/2}(\partial G) \to \tag{17}$$

$$\to H^{r-2m,s-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G).$$

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2) *слабо эллиптическая с параметром, и числа r, s удовлетворяют неравенствам* (16) *и условию $m_{\mu+\varkappa}+\frac{1}{2}\le s<m_{\mu+\varkappa+1}+\frac{1}{2}$. Тогда справедлива априорная оценка*

$$||u;G||_{r,s}+\sum_{i=1}^{\varkappa}||\sigma_i;\mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2,s+\alpha_i-1/2}(\partial G)||\le \tag{18}$$

$$\le C\Big(||A(x,D,\lambda)u;G||_{r-2m,s-2\mu}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G)||+(1+|\lambda|^{r-s})||u;G||\Big).$$

Здесь константа C не зависит от u, σ и λ.

Для доказательства теоремы приведём необходимый вспомогательный материал.

5 Оценки фундаментальной системы решений задачи (1), (2)

Пусть $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\lambda\in[0;\infty)$ и $r=\{1,\dots,m+\varkappa\}$. Рассмотрим граничный символ задачи (1), (2) в точке $x'\in\partial G$:

$$A^0(\xi',D_t,\lambda)v_r(t)=0\quad t>0, \tag{19}$$

$$(B_j^0(\xi',D_t)v_r)(0)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^0(\xi')\sigma_k^{(r)}=\delta_{j,r},\quad j=1,\dots,m+\varkappa. \tag{20}$$

Здесь $\delta_{j,r}$ — символ Кронекера.

Из условий 1, 2 и 3 следует, что краевая задача (19), (20) имеет единственное решение

$$v_r(t)=v_r(t,\xi',\lambda),\quad \sigma_k^{(r)}=\sigma_k^{(r)}(\xi',\lambda),\quad k=1,\dots,\varkappa,$$

такое, что функция $v_r(t)$ со всеми производными экспоненциально убывает при $t\to+\infty$.

Система векторов $(v_r(t),\sigma_1^{(r)},\dots,\sigma_\varkappa^{(r)})$, где $r=1,\dots,m+\varkappa$, линейно независимая. Она называется *фундаментальной системой решений* (ф. с. р.) граничного символа.

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2((0,+\infty))$.

Предложение 1[8, стр. 67]. *Пусть задача* (1), (2) *слабо эллиптическая с параметром, а целое число* $l \geq 0$. *Тогда для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ *и* $\lambda \in [0;\infty)$ *граничный символ задачи* (19), (20) *имеет единственное решение* $(v_r(t), \sigma_1^{(r)}, \dots, \sigma_{\varkappa}^{(r)})$, *и для* $v_r(t,\xi',\lambda)$ *выполняется оценка*

$$||D^l v_r(.,\xi',\lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} \leq \tag{21}$$

$$\leq C \begin{cases} |\xi'|^{l-m_r-1/2}, & r \leq \mu+\varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa+1}, \\ |\xi'|^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_r}(|\lambda|+|\xi'|)^{l-m_{\mu+\varkappa+1}-1/2}, & r \leq \mu+\varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa+1}, \\ |\xi'|^{l-m_{\mu+\varkappa}-1/2}(|\lambda|+|\xi'|)^{m_{\mu+\varkappa}-m_r}, & r > \mu+\varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa}, \\ (|\lambda|+|\xi'|)^{l-m_r-1/2}, & r > \mu+\varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa} \end{cases}$$

с некоторой константой $C > 0$, *не зависящей от* ξ' *и* λ.

Предложение 2. *Пусть выполнено неравенство* (21), *а число* s *удовлетворяет условию* $m_{\mu+\varkappa} + \frac{1}{2} \leq s < m_{\mu+\varkappa+1} + \frac{1}{2}$. *Тогда для решений задачи* (19), (20) *верны неравенства*

$$\Big(\int_0^\infty |D_n^\ell v_j(x_n,\xi',\lambda)|^2 dx_n\Big)^{1/2} \leq \mathrm{const}\frac{\Xi_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\lambda)}{\Xi_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda)}, \tag{22}$$

где $\ell = 0,1,2,\dots$.

Доказательство. Ввиду предложения 1 правые части в (22) достаточно оценить снизу через правые части (21). Используя определение (14), вычислим правую часть (22) для различных значений j и ℓ. Имеем:

$$\frac{\Xi_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\lambda)}{\Xi_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda)} = \tag{23}$$

$$\begin{cases} |\xi'|^{\ell-m_j-1/2}, & s-m_j-1/2 \geq 0, \quad \ell \leq s; \\ |\xi'|^{s-m_j-1/2}(|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}(\ell-s)}, & s-m_j-1/2 \geq 0 \quad \ell > s; \\ |\xi'|^{\ell-s}(|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}(s-m_j-\frac{1}{2})}, & s-m_j-1/2 < 0, \quad \ell \leq s; \\ (|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}(\ell-m_j-\frac{1}{2})}, & s-m_j-1/2 < 0, \quad \ell > s. \end{cases}$$

При сравнении правых частей в (23) и в (21) мы не будем различать $(|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$ и $|\lambda|+|\xi'|$.

Пусть $s-m_j-1/2 \geq 0$ и $\ell \leq s$. Так как $m_{\mu+\varkappa}+\frac{1}{2} \leq s < m_{\mu+\varkappa+1}+\frac{1}{2}$, то $j \leq \mu+\varkappa$ и заведомо $\ell \leq m_{\mu+\varkappa+1}$. В этом случае верхняя строка справа в (23) фактически совпадает с верхней строкой справа в (21).

Если же $\ell > s$ при условии $s - m_j - 1/2 \geq 0$, то остаётся рассмотреть случай, когда $\ell > m_{\mu+\varkappa+1}$. В этом случае отношение второй строки справа в (23) к аналогичной строке справа в (21) равно

$$\Big((|\lambda| + |\xi'|)/|\xi'|\Big)^{m_{\mu+\varkappa+1}+\frac{1}{2}-s} \geq 1.$$

Согласно $m_{\mu+\varkappa} + \frac{1}{2} \leq s < m_{\mu+\varkappa+1} + \frac{1}{2}$ из условия $s - m_j - 1/2 < 0$ следует, что $j > \mu + \varkappa$, а из условия $\ell \leq s$ вытекает, что $\ell \leq m_{\mu+\varkappa}$. В этом случае отношение третьей строки справа в (23) к аналогичной строке справа в (21) равно

$$\Big((|\lambda| + |\xi'|)/|\xi'|\Big)^{s-m_{\mu+\varkappa}-\frac{1}{2}} \geq 1.$$

Наконец, при условиях $s - m_j - 1/2 < 0$ и $\ell > m_{\mu+\varkappa+1}$ четвертые строки справа в (23) и (21) совпадают.

Предложение 2 доказано.

6 Доказательство основного результата

Используя стандартный метод локализации ("замораживания коэффициентов") доказательство теоремы 1 сводится к доказательству соответствующей теоремы для модельных областей $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому теорема будет доказана, если будут получены априорные оценки в модельных областях. В случае пространства $\mathbb{R}^n$ теорема доказана в работах Л. Р. Волевича [1, 2]. Докажем априорную оценку для задачи (1), (2) в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$.

Рассмотрим следующую задачу в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$:

$$A(D', D_n, \lambda)u(x) = f(x) \quad x_n > 0, \tag{24}$$

$$(B_j(D', D_n)u)(x', 0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(D')\sigma_k(x') = g_j(x'),\ j = 1, \ldots, m+\varkappa. \tag{25}$$

Верна следующая

Теорема 2. *Пусть для задачи* (24), (25) *выполнены условия* (1) – (3) *и для ф.с.р. задачи справедливы оценки* (21). *Пусть r и*

s натуральные числа, удовлетворяющие (16) *и условию* $m_{\mu+\varkappa}+\frac{1}{2}\leq s<m_{\mu+\varkappa+1}+\frac{1}{2}$. *Тогда для решений задачи справедливо неравенство*

$$||u;\mathbb{R}^n_+||_{r,s}+\sum_{i=1}^{\varkappa}||\sigma_i;\mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2,s+\alpha_i-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})||\leq$$

$$\leq C\Big(||A(x,D,\lambda)u;\mathbb{R}^n_+||_{r-2m,s-2\mu}+ \tag{26}$$

$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})||+(1+|\lambda|^{r-s})||u;\mathbb{R}^n_+||\Big).$$

Здесь константа C не зависит от u, σ и λ.

Доказательство этой теоремы опирается на следующий результат.

Лемма. *Пусть для задачи* (24), (25) *выполнены условия* (1) – (3) *и для её ф. с. р. верна оценка* (21). *Пусть, кроме того, натуральные числа r и s, удовлетворяющие* (16) *и неравенству* $m_{\mu+\varkappa}+\frac{1}{2}\leq s<m_{\mu+\varkappa+1}+\frac{1}{2}$. *Тогда для решений однородной задачи*

$$A(D',D_n,\lambda)u(x)=0,\quad x_n>0, \tag{27}$$

$$(B_j(D',D_n)u)(x',0)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{jk}(D')\sigma_k(x')=g_j(x'),$$

$$j=1,\ldots,m+\varkappa.$$

выполняется неравенство

$$||u;\mathbb{R}^n_+||_{r,s}+\sum_{j=1}^{\varkappa}||\sigma_j;\mathcal{H}^{r+\alpha_j-1/2,s+\alpha_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})||\leq$$

$$\leq C\Big(||A(x,D,\lambda)u;\mathbb{R}^n_+||_{r-2m,s-2\mu}+ \tag{28}$$

$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})||\Big).$$

Здесь C некоторое положительное число, независящее от u, σ и λ.

Доказательство. Ввиду (14) норма (13) при целых неотрицательных r и s будет эквивалентна норме

$$|[u;\mathbb{R}^n]|_{r,s}:=$$

$$:= ||u;\mathbb{R}^n|| + \Big(\sum_{\ell=0}^{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}||\Xi_{r-\ell,s-\ell}(D',\lambda)D_n^{2\ell}u(.,x_n);\mathbb{R}^{n-1}||^2dx_n\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= ||u;\mathbb{R}^n|| + \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{\ell=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda)D_n^{2\ell}|\hat{u}(\xi',x_n)|^2d\xi'dx_n\Big)^{1/2}. \qquad (29)$$

Здесь и далее $\hat{u}(\xi',x_n)$ — частичное преобразование Фурье функции $u(x)$ по переменным $(x_1,\ldots,x_{n-1}) = x'$.

Следовательно, норму первого слагаемого в левой части неравенства (26) можно заменить на эквивалентную норму (29), в результате чего это неравенство сводится к набору неравенств для $\ell = 0,1,\ldots,r$:

$$\int_0^{\infty}\sum_{\ell=0}^{r}||\Xi_{r-\ell,s-\ell}(D',\lambda)D_n^{\ell}u(.,x_n);\mathbb{R}^{n-1}||^2dx_n+$$

$$+\sum_{j=1}^{\varkappa}||\sigma_j;\mathcal{H}^{r+\alpha_j-1/2,s+\alpha_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})|| \leq \qquad (30)$$

$$\leq \mathrm{const}\sum_{j=1}^{m}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})||^2.$$

После частичного преобразования Фурье неравенства (30) доказательство сводится к установлению следующих оценок для подынтегральных выражений

$$\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda)\int_0^{\infty}|D_n^{\ell}\hat{u}(\xi',x_n)|^2dx_n+ \qquad (31)$$

$$+\sum_{j=1}^{\varkappa}\Xi^2_{r+\alpha_j-1/2,s+\alpha_j-1/2}(\xi',\lambda)|\widehat{\sigma}_j(\xi')|^2$$

$$\leq \mathrm{const}\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\lambda)|\widehat{g}_j(\xi')|^2.$$

Здесь $\ell = 0,1,...,r$, а $\widehat{\sigma}_j(\xi')$ и $\widehat{g}_j(\xi')$ — преобразование Фурье функций $\sigma_j(x')$ и $g_j(x')$, соответсвенно.

Функции $\hat{u}(\xi', x_n)$, $\widehat{\sigma}_1(\xi'), \ldots, \widehat{\sigma}_\varkappa(\xi')$, являются решением задачи вида (27) и, в силу условия 3, представляются в виде

$$\hat{u}(\xi', x_n) = \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_j(\xi') v_j(\xi', x_n, \lambda), \tag{32}$$

$$\widehat{\sigma}_k(\xi') = \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_j(\xi') \sigma_j^{(k)}(\xi', \lambda),\ k = 1, \ldots, \varkappa,$$

где $v_j(\xi', x_n, \lambda)$, $\sigma_j^{(k)}(\xi', \lambda)$, $k = 1, \ldots, \varkappa$ — j-ые компоненты фундаментального решения задачи (27).

Подставляя (32) в (31) и воспользовавшись (22), мы докажем оценку (28) для $f(x) \equiv 0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Перейдем теперь к доказательству оценки (26) в общем случае. После частичного преобразования Фурье по x' получим

$$\begin{gathered} A(\xi', D_n, \lambda)\hat{u}(\xi', x_n) = \hat{f}(\xi', x_n), \quad x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', 0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\hat{\sigma}_k = \hat{g}_j(\xi'), \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \end{gathered} \tag{33}$$

Представим $\hat{u}(\xi', x_n)$ в виде $\hat{u}(\xi', x_n) = v(\xi', x_n) + w(\xi', x_n)$, где $v(\xi', x_n)$ – специально подобранное решение уравнения

$$A(\xi', D_n, \lambda)v(\xi', x_n) = \hat{f}(\xi', x_n), \quad x_n > 0. \tag{34}$$

Тогда $w(\xi', x_n)$ будет решением задачи

$$\begin{gathered} A(\xi', D_n, \lambda)w(\xi', x_n) = 0, \quad x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n)w(\xi', 0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\hat{\sigma}_k = \hat{g}_j(\xi') - \chi_j(\xi'), \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa, \end{gathered}$$

где

$$\chi_j(\xi') = B_j(\xi', D_n)v(\xi', 0).$$

Для доказательства теоремы нужно воспользоватся леммой и стандартной техникой аналогично схеме изложенной в [2, 15].

7 Выводы

В статье установлены априорные оценки решений для слабо эллиптической с параметром граничной задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Эти оценки оказываются полезными в исследовании смешанных задач для параболических уравнений, не разрешённых относительно старшей производной по времени [9]. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Автор выражает благодарность Л. Р. Волевичу, М. Л. Горбачуку за постановку задачи и А. А. Мурачу за обсуждение результатов.

Література

[1] *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* Boundary Value Problems for a Class of Elliptic Operator Pencils // Integ. Eq. Operator Th. — 2000. — **8**. — P. 410–436.

[2] *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions // Integ. Eq. Operator Th. — 2001. — **9**. — P. 25-40.

[3] *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math. — 15 (1962), P. 119–147.

[4] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. — 1964. — **19**, № 3. — С. 43–161.

[5] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. — x+276 p.

[6] *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. — 414 p.

[7] *Гиндикин С. Г., Волевич Л. Р.* Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — Москва: УРСС, 1999. — 272 с.

[8] *Заворотинский А. В.* Слабо эллиптические с параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальной системы решений// Науковий вісник Ужгородського національного університету (серія "Математика і інформатика") — 2012. — **23**, № 2. — С. 63–75.

[9] *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 436 с.

[10] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1996. — xii+415 p.

[11] *Заворотинський А. В.* Еліптичні з малим параметром граничні задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Формальний асимптотичний розв'язок // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (серія "Математика") — 2011. — **1**, № 1–2. — С. 40–46.

[12] *Заворотинский А. В.* Эллиптические с малым параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — 2012. — **9**, № 2. — С. 147–164.

[13] *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, 5. — С. 3–122.

[14] *Volevich L. R.* General elliptic boundary value problems with small parameter // Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 12. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University,— 2002. — P. 171–181.

[15] *Волевич Л. Р.* Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Труды московского мат. об-ва. — 2006. — **67**. — С. 104–147.