Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 185–201

УДК 517.926.7, 517.956.222

Т.М. Зінченко

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про оцінки періодичних розв'язків еліптичних систем на прямій

djanta@ukr.net

On a class of Hörmander inner product spaces, we prove a priori estimates of periodic solutions to Douglis–Nirenberg elliptic systems of differential equations on the real line. An arbitrary positive function RO-varying at infinity serves as a smoothness index for these spaces.

На класі гільбертових просторів Хермандера встановлені апріорні оцінки періодичних розв'язків еліптичних за Дуглісом–Ніренбергом систем диференціальних рівнянь на прямій. Для цих просторів показником гладкості служить довільна додатна функція, RO-змінна на нескінченності.

1 Вступ

В статті досліджуються властивості періодичних розв'язків еліптичних за Дуглісом–Ніренбергом систем, заданих на дійсній прямій. Ці системи складаються з лінійних диференціальних рівнянь, які мають, взагалі кажучи, різний порядок відносно різних компонент шуканої вектор–функції. Їх також називають еліптичними системами мішаного порядку. Клас цих систем містить як нормальні системи, так і деякі вироджені системи звичайних диференціальних рівнянь.

Загальні еліптичні системи мішаного порядку введені А. Дуглісом і Л. Ніренбергом [1]. Важливі приклади таких систем зустрічаються в гідродинаміці і теорії пружності [2, сс. 56, 57], акустиці [3]. Еліптичні за Дуглісом–Ніренбергом системи виникають при зведенні еліптичних крайових задач на межу многовиду, на якому задача розглядається [4]. Зокрема, якщо многовид двовимірний, то отримується еліптична система звичайних диференціальних рівнянь, які можна інтерпретувати як рівняння з періодичними коефіцієнтами на прямій.

Для еліптичних за Дуглісом–Ніренбергом систем важливу роль відіграють двобічні апріорні оцінки розв'язків у шкалах просторів Гельдера нецілого порядку і просторів Соболєва довільного дійсного порядку [5]. З таких оцінок випливають теорема про підвищення регулярності розв'язків та властивість нетеровості оператора, що відповідає еліптичній системі, заданій на замкненому гладкому многовиді. Ці властивості мають різні застосування, зокрема, в теорії еліптичних крайових задач і спектральній теорії диференціальних операторів [2, 4, 6].

У цьому зв'язку постає питання про встановлення апріорних оцінок розв'язків еліптичних систем у шкалах функціональних просторів, які градуйовані більш тонко, ніж зазначені вище. Для цих шкал індексом (порядком) гладкості служить, не число, а досить довільна додатна вагова функція. Серед них значний інтерес (з точки зору застосувань) викликають шкали гільбертових просторів.

Їх важливі приклади запропоновані в [7-10] — уточнена соболєвська шкала і розширена соболєвська шкала. Для першої індексом гладкості φ служить довільна радіальна функція, правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою, а для другої — довільна радіальна функція, RO-змінна на нескінченності за В. Г. Авакумовичем. Ці шкали складаються з просторів $B_{2,\varphi} = H^{\varphi}$, які є гільбертовим ізотропним випадком просторів, введених Л. Хермандером [11, п. 2.2] та Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [12, § 2]. Вказані шкали мають важливу властивість — вони отримуються шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Уточнена соболєвська шкала вужча за розширену та більш тісно пов'язана з соболєвською шкалою.

На уточнену соболєвську шкалу перенесена у повному обсязі класична ("соболєвська") теорія еліптичних систем і еліптичних крайових задач [8, 9]. Для розширеної соболєвської шкали є лише окремі результати [13–19]. Відмітимо, що остання складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно гільбертової соболєвської шкали. (Ця властивість випливає з інтерполяційної теореми В. І. Овчинникова [20, с. 511].) Тому можна очікувати, що ця шкала виявиться корисною і ефективною в теорії еліптичних операторів.

Зауважимо, що простори Хермандера, Волевича–Панеяха і різні їх аналоги, які іменують просторами узагальненої гладкості, є предметом багатьох досліджень як самі по собі, так і з точки зору застосувань (див. недавні монографії [21–24], статті [25–27] та наведену в них літературу).

Мета цієї статті — встановити для розширеної соболєвської шкали двобічні апріорні оцінки періодичних розв'язків довільної еліптичної за Дуглісом–Ніренбергом системи диференціальних рівнянь на дійсній прямій. На відміну від [19] ці оцінки будуть представлені у термінах властивостей коефіцієнтів Фур'є розв'язків.

Стаття складається з шести пунктів. Пункт 1 є вступ. У п. 2 наведено означення еліптичної за Дуглісом–Ніренбергом системи звичайних диференціальних рівнянь, необхідних функціональних просторів і сформульований основний результат — двобічна апріорна оцінка. У п. 3 наведено приклади одновимірних еліптичних систем. Пункт 4 містить потрібні у подальшому факти теорії інтерполяції абстрактних гільбертових просторів. Основний результат доведено у п. 5. Останній п. 6 містить висновки до роботи.

2 Постановка задачі і результат

Нехай на дійсній прямій $\mathbb{R}$ задано систему $p \geq 2$ лінійних диференціальних рівнянь з 2π–періодичними коефіцієнтами

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k}(x,D)u_k(x) = f_j(x), \quad j = 1,\dots,p. \tag{1}$$

Тут x є дійсний аргумент, а всі

$$A_{j,k}(x,D) := \sum_{q=0}^{q_{j,k}} a_{j,k}^{(q)}(x)\frac{d^q}{dx^q}$$

є скалярні лінійні диференціальні вирази порядку $q_{j,k}$. Їх коефіцієнти $a_{j,k}^{(q)}(x)$ належать до $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$, де $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$ позначає лінійний простір усіх нескінченно диференційовних періодичних функцій $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, які мають період 2π.

Праві частини f_j і розв'язки u_k системи (1) розглядаються в функціональному класі $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$. Тут і далі $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ — топологічний простір усіх періодичних комплекснозначних розподілів (узагальнений функцій) на $\mathbb{R}$, які мають період 2π.

Запишемо систему (1) у вигляді $Au = f$, де $A := (A_{j,k}(x, D))_{j,k=1}^{p}$ є матричний диференціальний оператор, а

$$u := \mathrm{col}(u_1, \dots, u_p) \quad \text{і} \quad f := \mathrm{col}(f_1, \dots, f_p)$$

є функціональні стовпці.

Далі припускаємо, що система (1) еліптична на осі $\mathbb{R}$ за Дуглісом–Ніренбергом, тобто існують цілі числа $l_1, \dots, l_p$ і $m_1, \dots, m_p$ такі, що виконуються наступні дві умови:

(i) порядок $q_{j,k} \leq l_j + m_k$ для всіх $j, k \in \{1, \dots, p\}$;

(ii) визначник $\det\big(a_{j,k}^{(l_j+m_k)}(x)\big)_{j,k=1}^{p} \neq 0$ для кожної точки $x \in \mathbb{R}$; при цьому покладаємо $a_{j,k}^{(l_j+m_k)}(x) \equiv 0$, якщо $q_{j,k} < l_j + m_k$.

Зауваження 1. Величини $l_1, \dots, l_p$ і $m_1, \dots, m_p$ називають числами Дугліса–Ніренберга, що відповідають еліптичній системі (1). Для них умова (ii) є одновимірний випадок умови еліптичності за Дуглісом–Ніренбергом систем диференціальних рівнянь, заданих в $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, монографії [4, п. 9.2] або [28, с. 175]). Системи, які задовольняють цю умову, називають також еліптичними системами мішаного порядку.

Введемо періодичні функціональні простори $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$, в яких будуть досліджені властивості розв'язків системи (1). Показником гладкості для цих просторів служить довільний функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$. Тут і далі RO позначає клас усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $\alpha > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \in [1, \alpha]$$

(сталі α і c можуть залежати від $\varphi \in \mathrm{RO}$). Ці функції називають RO (або OR)-змінними на нескінченності. Клас RO-змінних функцій введений В. Г. Авакумовичем в 1936 р. і достатньо повно вивчений (див. монографії [29, сс. 86–99] і [30, пп. 2.0–2.2]).

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. За означенням, лінійний простір $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$ складається з усіх періодичних розподілів $g \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ таких, що їх коефіцієнти

Фур'є $c_r(g)$ задовольняють умову

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi^2(\langle r\rangle)\,|c_r(g)|^2 < \infty.$$

Тут $c_r(g) := (g, h_r)$ для кожного $r \in \mathbb{Z}$, де $h_r(x) := (2\pi)^{-1}e^{irx}$ при $x \in \mathbb{R}$, а $(\cdot,\cdot)$ є продовженням за неперервністю скалярного добутку в просторі $L_2(0, 2\pi)$. Окрім того, $\langle r\rangle := (1 + r^2)^{1/2}$ є згладжений модуль числа r.

У лінійному просторі $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$ означений скалярний добуток розподілів g_1 і g_2 за формулою

$$(g_1, g_2)_{\varphi} := \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi^2(\langle r\rangle)\, c_r(g_1)\,\overline{c_r(g_2)}.$$

Він породжує норму $\|g\|_{\varphi} := (g, g)^{1/2}_{\varphi}$. Цей простір гільбертів.

У важливому випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, простір $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$ позначається через $H^{(s)}_{2\pi}(\mathbb{R})$ і стає періодичним соболєвським простором порядку s [6, с. 33].

Зауваження 2. Простір $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$ є періодичний одновимірний аналог (у гільбертовому випадку) просторів, систематично досліджених Л. Хермандером [11, п. 2.2] та Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [12, § 2] (див. також [31, п. 10.1]). Відмітимо, що $H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R})$ тісно пов'язаний з просторами періодичних дійсних функцій, розглянутих О. І. Степанцем (див. [32, гл. 1, § 7] і [33, ч. 1, гл. 3, п. 7.1]).

Клас гільбертових функціональних просторів $\{H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R}) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ є періодичним аналогом розширеної соболєвської шкали на дійсній осі [10].

Сформулюємо основний результат статті. Означимо функціональний параметр $\varrho(t) := t$ при $t \geq 1$. Звісно, $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow \varrho^s\varphi \in \mathrm{RO}$, де $s \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай довільно вибрано два параметра: функціональний $\varphi \in \mathrm{RO}$ і числовий $\alpha > 0$. Для них існують числа $c_1 = c_1(\varphi) > 0$ і $c_2 = c_2(\varphi, \alpha) > 0$, $c_3 = c_3(\varphi, \alpha) \geq 0$ такі, що для довільних вектор–функцій $u, f \in (\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}))^p$, які задовольняють систему $Au = f$ на $\mathbb{R}$,* *виконуються оцінки:*

$$\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{\varphi\rho^{-l_j}} \leq c_1 \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k}}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k}} \leq c_2 \sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{\varphi\rho^{-l_j}} + c_3 \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k-\alpha}}. \tag{3}$$

Зауваження 3. В оцінці (3) можна узяти $c_3 := 0$, якщо

$$N := \left\{ w \in (C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}))^p : \ Aw = 0 \ \text{ на } \ \mathbb{R} \right\}$$

є нуль-простір.

3 Приклади

Наведемо приклади еліптичних за Дуглісом–Ніренбергом систем диференціальних рівнянь, заданих на дійсній осі. Оскільки системи, що складаються з диференціальних рівнянь вищих порядків, зводяться до систем рівнянь першого порядку, то обмежимося останніми.

Приклад 1. Нормальна система диференціальних рівнянь

$$u'_j + \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}(x)\, u_k = f_j(x), \quad j = 1, \ldots, p.$$

Вона є еліптичною за Дуглісом–Ніренбергом за умови вибору чисел $l_1 = \ldots = l_p = 0$ і $m_1 = \ldots = m_p = 1$. Тоді матриця $\big(a^{(l_j+m_k)}_{j,k}(x)\big)^{p}_{j,k=1}$ одинична. Будь-яка система, що зводиться до нормальної шляхом еквівалентних лінійних перетворень, є також еліптичною за Дуглісом–Ніренбергом для тих же самих чисел l_j і m_k.

Якщо система диференціальних рівнянь не є нормальною, то при дослідженні її на еліптичність числа $l_1, \ldots, l_p$ та/або $m_1, \ldots, m_p$ слід вибирати неоднаковими.

Приклад 2. Розглянемо систему трьох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&a^{(1)}_{1,1}u'_1 + a^{(0)}_{1,1}u_1 && + a^{(0)}_{1,2}u_2 && + a^{(0)}_{1,3}u_3 = f_1,\\
&a^{(1)}_{2,1}u'_1 + a^{(0)}_{2,1}u_1 && + a^{(0)}_{2,2}u_2 && + a^{(0)}_{2,3}u_3 = f_2,\\
&a^{(1)}_{3,1}u'_1 + a^{(0)}_{3,1}u_1 + a^{(1)}_{3,2}u'_2 && + a^{(0)}_{3,2}u_2 + a^{(1)}_{3,3}u'_3 && + a^{(0)}_{3,3}u_3 = f_3.
\end{aligned}$$

Тут усі коефіцієнти змінні: $a^{(q)}_{j,k} = a^{(q)}_{j,k}(x)$. Ця система не є нормальною. Дослідимо її на еліптичність.

Якщо покласти $l_j = 0$ і $m_k = 1$ для всіх $j,k \in \{1,2,3\}$, то

$$\bigl(a^{(l_j+m_k)}_{j,k}\bigr)^{p}_{j,k=1} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & 0 & 0 \\ a^{(1)}_{2,1} & 0 & 0 \\ a^{(1)}_{3,1} & a^{(1)}_{3,2} & a^{(1)}_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця вироджена і тому система не є еліптичною за Дуглісом–Ніренбергом для зробленого вибору чисел l_j і m_k.

Проте, якщо узяти $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = 1$ і $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 0$, то

$$\bigl(a^{(l_j+m_k)}_{j,k}\bigr)^{p}_{j,k=1} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & a^{(0)}_{1,2} & a^{(0)}_{1,3} \\ a^{(1)}_{2,1} & a^{(0)}_{2,2} & a^{(0)}_{2,3} \\ 0 & a^{(1)}_{3,2} & a^{(1)}_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця невироджена, зокрема, коли

$$\bigl(a^{(l_j+m_k)}_{j,k}\bigr)^{p}_{j,k=1} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(0)}_{1,2} & 0 \\ 1 & 0 & a^{(0)}_{2,3} \\ 0 & a^{(1)}_{3,2} & a^{(1)}_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$a^{(0)}_{2,3}a^{(1)}_{3,2} + a^{(0)}_{1,2}a^{(1)}_{3,3} \neq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

У цьому випадку система еліптична за Дуглісом–Ніренбергом. Відмітимо, що тут можлива ситуація, коли коефіцієнти $a^{(0)}_{1,2}$ та $a^{(0)}_{2,3}$ дорівнюють нулю на множинах, що не перетинаються. (Тоді не можна u_2 і u_3 виразити через u_1 в перших двох рівняннях системи і звести її до одного рівняння другого порядку відносно u_1 на всій осі $\mathbb{R}$.)

4 Допоміжні абстрактні результати

Наведемо тут означення інтерполяції з функціональним параметром пар абстрактних гільбертових просторів і деякі її важливі властивості (див., наприклад, монографію [8, п. 1.1], де ці питання викладені систематично). Вони будуть використані в доведенні основного результату статті. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними просторами.

Нехай задана упорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J є самоспряженим додатно визначеним оператором у просторі X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається парою X однозначно; він називається породжуючим оператором для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$ і обмежені на кожному відрізку $[a, b]$, де $r > 0$ і $0 < a < b < \infty$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. У просторі X_0 означений оператор $\psi(J)$ як функція ψ від самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується наступне. Якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо говорити, що простір X_ψ отримано інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для деякої додатної угнутої функції $\psi_1(t)$. (Як звичайно, $\psi \asymp \psi_1$ означає обмеженість обох відношень ψ/ψ_1 і ψ_1/ψ на вказаній множині.) Цей фундаментальний результат випливає з теореми Ж. Петре [34] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного степеня (див. також монографії [35, п. 5.4] і [8, п. 1.1.9]).

Важливо, що при інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість, але й нетеревість лінійних операторів при деяких додаткових умовах. Сформулюємо цей результат стосовно розглянутого нами методу інтерполяції [8, п. 1.1.7].

Твердження 1. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ є припустимі пари* *гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *означене лінійне відображення* T *таке, що його звуження на кожний з просторів* X_j, *де* $j \in \{0,1\}$, *задає обмежені нетерові оператори* $T : X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *є нетерів з тими ж самими ядром і індексом, а його область значень є* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : X \to Y$, де X, Y є банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ обидва скінченновимірні. Якщо оператор T нетерів, то його область значень $T(X)$ замкнена у просторі Y, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(Y/\,T(X))$$

скінченний.

У доведенні нам доведеться інтерполювати ортогональні суми гільбертових просторів. При цьому буде використана наступна властивість інтерполяції [8, п.1.1.5].

Твердження 2. *Нехай задано скінченне число припустимих пар* $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ *гільбертових просторів, де* $k = 1, \ldots, p$. *Тоді для довільного функціонального параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *справедливо*

$$\Bigl[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)},\, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p} \bigl[X_0^{(k)},\, X_1^{(k)}\bigr]_\psi$$

з рівністю норм.

5 Доведення

Теорема вірна у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s \in \mathbb{R}$. Так, апріорні оцінки (2) і (3) негайно випливають з відомих [6, с. 52] властивостей еліптичних за Дуглісом–Ніренбергом систем, заданих на замкненому многовиді класу C^∞ довільної вимірності $n \geq 1$. При цьому систему (1) з 2π-періодичними коефіцієнтами трактуємо як таку, що задана на одиничному колі, і беремо $n = 1$.

У загальній ситуації виведемо теорему за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар соболєвських просторів. Для цього знадобиться наступний результат.

Лема. *Нехай задані функція* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *і дійсні числа* s_0, s_1 *такі, що* $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ *і* $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. *Покладемо*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi(t^{1/(s_1-s_0)}) & \textit{при} \quad t \geq 1, \\ \varphi(1) & \textit{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ *є інтерполяційним параметром і*

$$\bigl[H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}), H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})\bigr]_\psi = H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R}) \tag{5}$$

з рівністю норм.

Тут $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижній і верхній індекси Матушевської функції $\varphi \in \mathrm{RO}$. Нагадаємо їх означення [30, п. 2.1.2]. Для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_0, c_1 \geq 1$ такі, що

$$c_0\lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1\lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t, \lambda \geq 1. \tag{6}$$

За означенням,

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{вірна ліва нерівність в } (6)\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{вірна права нерівність в } (6)\}.$$

Відмітимо, що з формули (6) при $t = 1$ випливають неперервні вкладення

$$H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad s_1 > \sigma_1(\varphi), \;\; s_0 < \sigma_0(\varphi).$$

Доведення леми. Той факт, що функція ψ належить до $\mathcal{B}$ і є інтерполяційним параметром встановлений в [13, теорема 2]. Доведемо рівність (5).

Пара соболєвських просторів

$$X := \bigl[H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}), H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})\bigr] \tag{7}$$

є припустимою. Для неї породжуючий оператор, задається формулою

$$J : g = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r(g)\, h_r \mapsto \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{s_1-s_0} c_r(g)\, h_r,$$

де $g \in H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Справді, для довільного $g \in H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})$ маємо:

$$\begin{aligned}\|Jg\|^2_{(s_0)} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{2s_0} |c_r(Jg)|^2 = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{2s_0} \langle r\rangle^{2(s_1-s_0)} |c_r(g)|^2 = \|g\|^2_{(s_1)}.\end{aligned}$$

Тут і далі $\|\cdot\|_{(s_j)}$ і $(\cdot,\cdot)_{(s_j)}$ є норма і скалярний добуток у соболєвському просторі $H^{(s_j)}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Отже, оператор J встановлює ізометричний ізоморфізм

$$J : H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \leftrightarrow H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}). \tag{8}$$

Тут обернений оператор до J задається формулою

$$J^{-1} : \, v = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r(v)\, h_r \mapsto \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{s_0-s_1} c_r(v)\, h_r,$$

де $v \in H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Окрім того, для довільного $g \in H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})$ вірно

$$\begin{aligned}(Jg, g)_{(s_0)} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{2s_0}\, c_r(Jg)\, \overline{c_r(g)} = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle r\rangle^{2s_0}\, \langle r\rangle^{s_1-s_0}\, c_r(g)\, \overline{c_r(g)} \geq \|g\|^2_{(s_0)}.\end{aligned}$$

Отож, J є додатно визначений оператор у гільбертовому просторі $H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R})$, заданий на щільному многовиді $H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})$, причому $J \geq \mathbf{1}$, де $\mathbf{1}$ — тотожний оператор. Звідси з урахуванням (8) випливає, що оператор J самоспряжений в $H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Таким чином, J є породжуючий оператор для пари (7).

Застосувавши спектральну теорему до самоспряженого оператора $J \geq \mathbf{1}$ у просторі $H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R})$, опишемо функцію ψ від J. Розглянемо ізометричний ізоморфізм $I : H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \leftrightarrow L_2(\mathbb{Z},\mu)$, який кожному розподілу $g \in H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ставить у відповідність послідовність $(c_r(g))_{r\in\mathbb{Z}}$ його коефіцієнтів Фур'є. Тут дискретна міра μ означена за формулою $\mu(\{r\}) := \langle r\rangle^{2s_0}$ для кожного $r \in \mathbb{Z}$. Цей ізоморфізм зводить J до оператора множення на функцію $\langle r\rangle^{s_1-s_0}$ дискретного аргументу $r \in \mathbb{Z}$.

Тому зазначений ізоморфізм зводить $\psi(J)$ до оператора множення на функцію $\psi(\langle r\rangle^{s_1-s_0})$, яка дорівнює $\langle r\rangle^{-s_0}\varphi(\langle r\rangle)$ в силу (4).

Отже,

$$\begin{aligned} X_\psi :=& \big[H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}), H^{(s_1)}_{2\pi}(\mathbb{R})\big]_\psi = \operatorname{Dom}\psi(J) = \\ =& \Big\{ g \in H^{(s_0)}_{2\pi}(\mathbb{R}) :\ \big(\langle r\rangle^{-s_0}\varphi(\langle r\rangle)\, c_r(g)\big)_{r\in\mathbb{Z}} \in L_2(\mathbb{Z},\mu)\Big\} = H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Окрім того, для довільного розподілу $g \in X_\psi$ маємо

$$\begin{aligned} \|g\|_{X_\psi} =& \|\psi(J)g\|_{(s_0)} = \|I\psi(J)g\|_{L_2(\mathbb{Z},\mu)} \\ =& \|\,(\langle r\rangle^{-s_0}\varphi(\langle r\rangle)\, c_r(g))_{r\in\mathbb{Z}}\,\|_{L_2(\mathbb{Z},\mu)} = \|g\|_\varphi. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Доведення теореми. Спочатку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром покажемо, що відображення

$$u \mapsto Au, \quad \text{де} \quad u \in (\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}))^p, \tag{9}$$

задає обмежений і нетерів оператор

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}_{2\pi}(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Звідси випливатимуть потрібні апріорні оцінки (2) і (3).

Виберемо числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Згідно з відомою теорією еліптичних матричних операторів на замкненому многовиді у просторах Соболєва [6, п. 3.2 b], відображення (9) задає обмежені нетерові оператори

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)}_{2\pi}(\mathbb{R}) \tag{11}$$

для кожного $r \in \{0,1\}$. Вони мають спільне ядро $N \subset (C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}))^p$ і однаковий індекс. (При цьому систему (1) трактуємо як таку, що задана на одиничному колі.)

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (4). Згідно з твердженням 1 обмеженість і нетеровість обох операторів (11) при

$r \in \{0,1\}$ тягне за собою наступне. Відображення (9) задає обмежений і нетерів оператор

$$\begin{aligned} A :\ & \Big[\bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_0+m_k)}(\mathbb{R}), \bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_1+m_k)}(\mathbb{R})\Big]_{\psi} \\ & \to \Big[\bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_0-l_j)}(\mathbb{R}), \bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_1-l_j)}(\mathbb{R})\Big]_{\psi}. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут в силу твердження 2 і леми 1 маємо:

$$\begin{aligned} & \Big[\bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_0+m_k)}(\mathbb{R}), \bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_1+m_k)}(\mathbb{R})\Big]_{\psi} = \\ & = \bigoplus_{k=1}^{p} \big[H_{2\pi}^{(s_0+m_k)}(\mathbb{R}), H_{2\pi}^{(s_1+m_k)}(\mathbb{R})\big]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{13}$$

та

$$\begin{aligned} & \Big[\bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_0-l_j)}(\mathbb{R}), \bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{(s_1-l_j)}(\mathbb{R})\Big]_{\psi} = \\ & = \bigoplus_{j=1}^{p} \big[H_{2\pi}^{(s_0-l_j)}(\mathbb{R}), H_{2\pi}^{(s_1-l_j)}(\mathbb{R})\big]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{\varphi\rho^{-l_j}}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{14}$$

Зауважимо, що друга рівність в (13) є вірною на підставі леми, оскільки $s_0 + m_k < \sigma_0(\varphi\rho^{m_k})$ і $s_1 + m_k > \sigma_1(\varphi\rho^{m_k})$, а функціональний параметр ψ задовольняє формулу (4), якщо в ній замінити s_0 на $s_0 + m_k$, s_1 на $s_1 + m_k$ і φ на $\varphi\rho^{m_k}$. Аналогічно, друга рівність в (14) є правильною в силу леми, оскільки $s_0 - l_j < \sigma_0(\varphi\rho^{-l_j})$ і $s_1 - l_j > \sigma_1(\varphi\rho^{-l_j})$, а ψ задовольняє формулу (4), якщо в ній замінити s_0 на $s_0 - l_j$, s_1 на $s_1 - l_j$ і φ на $\varphi\rho^{-l_j}$.

На підставі рівностей (13) і (14) робимо висновок, що обмежений нетерів оператор (12) діє у парі просторів (10). Скінченновимірний простір N є ядром цього оператора.

Перейдемо до виводу апріорних оцінок (2) і (3). Перша з них еквівалентна обмеженості оператора (10). Встановимо другу оцінку.

Для зручності позначимо

$$\mathcal{X} := \bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{Y} := \bigoplus_{j=1}^{p} H_{2\pi}^{\varphi\rho^{-l_j}}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{Z} := \bigoplus_{k=1}^{p} H_{2\pi}^{\varphi\rho^{m_k-\alpha}}(\mathbb{R}).$$

Обмежений нетерів оператор (10) канонічним чином породжує ізоморфізм

$$A:\,\mathcal{X}/N\leftrightarrow A(\mathcal{X}). \tag{15}$$

Тут $A(\mathcal{X})$ є підпростір простору $\mathcal{Y}$. Отже, для довільного $u\in\mathcal{X}$ маємо

$$\inf\bigl\{\|u+w\|_{\mathcal{X}}:\,w\in N\bigr\}\leq c\,\|Au\|_{\mathcal{Y}}, \tag{16}$$

де c є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (15). Оскільки простір N скінченновимірний, то в ньому усі норми еквівалентні, зокрема, норми в просторах $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Z}$. Тому існує число $c_0>0$ таке, що

$$\|w\|_{\mathcal{X}}\leq c_0\|w\|_{\mathcal{Z}}\quad\text{для всіх}\quad w\in N.$$

Окрім того,

$$\|w\|_{\mathcal{Z}}\leq\|u+w\|_{\mathcal{Z}}+\|u\|_{\mathcal{Z}}\leq\|u+w\|_{\mathcal{X}}+\|u\|_{\mathcal{Z}}.$$

З останніх двох формул випливає, що

$$\|u\|_{\mathcal{X}}\leq\|u+w\|_{\mathcal{X}}+\|w\|_{\mathcal{X}}\leq(c_0+1)\|u+w\|_{\mathcal{X}}+c_0\|u\|_{\mathcal{Z}}.$$

Перейдемо тут до інфімуму по всім $w\in N$ і скористаємося нерівністю (16). Отримаємо нерівність

$$\|u\|_{\mathcal{X}}\leq c(c_0+1)\|Au\|_{\mathcal{Y}}+c_0\|u\|_{\mathcal{Z}}.$$

Звісно, вона еквівалентна потрібній нам оцінці (3).

Теорема доведена.

Обгрунтуємо зауваження 3. Нехай $N=\{0\}$; тоді нетерів оператор (10) встановлює ізоморфізм $A:\mathcal{X}\leftrightarrow A(\mathcal{X})$, де $A(\mathcal{X})$ є підпростір в $\mathcal{Y}$. Отже, існує число $c>0$ таке, що $\|u\|_{\mathcal{X}}\leq c\|Au\|_{\mathcal{Y}}$ для довільного $u\in\mathcal{X}$. Це і значить, що оцінка (3) виконується при $c_3:=0$.

6 Висновки

В статті досліджена довільна еліптична за Дуглісом–Ніренбергом система диференціальних рівнянь (1) на прямій з періодичними нескінченно гладкими коефіцієнтами. Встановлені нові апріорні оцінки (2) і (3) узагальнених періодичних розв'язків цієї системи. Отриманий результат поширює відомі апріорні оцінки [6, с. 52] на клас просторів $\{H^{\varphi}_{2\pi}(\mathbb{R}):\varphi\in\mathrm{RO}\}$, який містить у собі гільбертову шкалу періодичних просторів Соболєва.

Авторка вдячна О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Commun. Pure Appl. Math. — 1955. — **8**, № 4. — P. 503–538.

[2] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. — Berlin: Springer, 1997. — P. 1–144.

[3] *Khashanah K.* A Douglis–Nirenberg elliptic operator in Biot Theory // Appl. Anal. — 1996. — **61**, No. 1–2. — P. 87–97.

[4] *Wloka J. T., Rowley B., Lawruk B.* Boundary value problems for elliptic systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — xiv+641 p.

[5] *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. — 1964. — **17**, No. 1. — P. 35–92.

[6] *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр. Т. 63 — Москва: ВИНИТИ, 1990. — С. 5–129.

[7] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — **14**, No. 1. — P. 81–100.

[8] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[9] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — **6**, No. 2. — P. 211–281.

[10] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 3. — С. 368–380.

[11] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — Москва: Мир, 1965. — 380 с.

[12] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. — 1965. – **20**, № 1. — С. 3–74.

[13] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 205–226.

[14] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. — 2009. — № 3. — С. 13–19.

[15] *Мурач А. А.* Об эллиптических системах в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3. — С. 391–399.

[16] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 11. — С. 1477–1491.

[17] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 180–202.

[18] *Murach A. A., Zinchenko T.* Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — **19**, No. 1. — P. 29–39.

[19] *Зинченко Т. Н.* Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале // Доп. НАН України. — 2013. — № 3. — С. 14–20.

[20] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – № 2. – P. 349 – 515.

[21] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes: In 3 volumes. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[22] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

[23] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.— Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

[24] *Triebel H.* The Structure of Functions. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+ 425 p.

[25] *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. — 2006. — **185**, No. 1. — P. 1–62.

[26] *Gurka P., Opic B.* Sharp embeddings of Besov-type spaces // J. Comp. Appl. Math. — 2007. — **208**, No. 1. — P. 235–269.

[27] *Haroske D.D., Moura S.D.* Continuity envelopes and sharp embeddings in spaces of generalised smoothness // J. Funct. Anal. — 2008. — **254**, No. 8. — P. 1487–1521.

[28] *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. — Москва: Наука, 1972. — 544 с.

[29] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — Москва: Наука, 1985. — 144 с.

[30] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

[31] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.

[32] *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

[33] *Степанец А. И.* Методы теории приближений. В 2-х томах. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — 468 с., 427 с.

[34] *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, № 1 – 2. – P. 91 – 92.

[35] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.