Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 202–218

УДК 517.9

В.А. Літовченко

(Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці)

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь

vladlit4@mail.ru

We defined a new class of degenerate parabolic pseudo-differential equations of Kolmogorov type with convex integer analytical symbols of pseudo-differentiation. For such equations we constructed the fundamental solution of Cauchy problem and investigated its basic properties within Gurevich spaces by the method of characteristics.

Означено новий клас вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь типу Колмогорова з опуклими цілими аналітичними символами псевдодиференціювання. Для таких рівнянь методом характеристик побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості в рамках просторів Б.Л. Гуревича.

1 Вступ

Моделюючи броунівський рух фізичної системи, А.М. Колмогоров прийшов до одного ультрапараболічного рівняння [1], яке згодом одержало назву рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Поява цього рівняння послужила поштовхом до зародження теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, у розвитку якої взяло участь багато математиків, серед яких M. Weber, А.М. Ільїн, І.М. Сонін, Я.С. Шатиро, Л.П. Купцов, С.Д. Ейдельман, С.Д. Івасишен, Y. Kato, S. Polidoro, E. Lanconelli, M. Manfredini, A. Pascucci та ін. (див.огляд у [2]). Розвиток відбувався в основному шляхом розширення відомих та означення нових класів рівнянь такого типу, а також побудови й дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) та його можливих застосувань.

У даній статті пропонується ще один різновид узагальнення рівняння А.М. Колмогорова, який полягає у задіюванні теорії псевдодиференціальних операторів (ПДО). Тут означено новий клас вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь типу Колмогорова з опуклими цілими аналітичними символами псевдодиференціювання, залежними лише від часового параметра, який охоплює відомий клас $\mathbb{E}^0_{23}$ з [2]. Для рівнянь з цього класу побудовано ФРЗК та досліджено його основні властивості в рамках просторів типу W Гуревича.

2 Постановка задачі

Нехай $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1;\dots;m\}$; $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{Z}^m_+$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}^1_+$; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}$, якщо $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1}\dots z_m^{l_m}$, $|z|_* := |z_1| + \dots + |z_m|$, $|z| := (|z_1|;\dots;|z_m|)$, якщо $z := (z_1;\dots;z_m) \in \mathbb{C}^m$ і $l := (l_1;\dots;l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$; запис $x\mho y$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат точок $\{x,y\} \subset \mathbb{C}^m$. Будемо припускати також, що n–вимірна просторова змінна x складається з n_1–вимірної змінної $x_1 := (x_{11};\dots;x_{1n_1})$, n_2–вимірної змінної $x_2 := (x_{21};\dots;x_{2n_2})$ та n_3–вимірної змінної $x_3 := (x_{31};\dots;x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1;x_2;x_3)$, де n_1, n_2 і n_3 – такі натуральні числа, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$. У зв'язку з цим мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}^n_+$ будемо записувати у вигляді $k := (k_1;k_2;k_3)$, де $k_j := (k_{j1};\dots;k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}^{n_j}_+$, $j \in \mathbb{N}_3$. Крім цього, позначимо через $\Pi^m_X := \{(t;\xi)|\ t \in X, \xi \in \mathbb{R}^m\}$, $\Pi^2 := \{(t,\xi;\tau,y)|\, 0 \leq \tau < t \leq T,\ \{\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n\}$, $T > 0$; якщо $x := (x_1;x_2;x_3)$ і $x_j := (x_{j1};\dots;x_{jn_j})$ – точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то $x'_j := (x_{j1};\dots;x_{jn_3})$, $x''_j := (x_{j(n_3+1)};\dots;x_{jn_2})$, $x'''_1 := (x_{1(n_2+1)};\dots;x_{1n_1})$, $\widehat{x}_1 := (x_{11};\dots;x_{1n_2})$, $\widetilde{x} := (x'''_1;x''_2;x_3)$; ці позначення будемо використовувати й для інших аналогічних точок та векторів.

Нехай далі $\omega_{lj}(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, – зростаючі неперервні та необмежені на $[0; +\infty)$ функції такі, що $\omega_{lj}(0) = 0$. Для $\delta \geq 0$, $l \in \mathbb{N}_3$ і $j \in \mathbb{N}_{n_l}$ покладемо $\Omega_{lj}(\delta) := \int\limits_0^\delta \omega_{lj}(\tau)d\tau$.

Функція $\Omega_{lj}(\cdot)$ диференційовна та зростаюча на $[0; +\infty)$ така, що $\Omega_{lj}(0) = 0$, $\lim\limits_{\delta\to+\infty} \Omega_{lj}(\delta) = +\infty$, крім цього, виконуються оцінки [3, 4]:

$$\Omega_{lj}(\delta_1) + \Omega_{lj}(\delta_2) \leq \Omega_{lj}(\delta_1 + \delta_2), \quad (\forall \{\delta_1, \delta_2\} \subset [0; +\infty)); \tag{1}$$

$$\forall \delta > 0: \ \ \Omega_{lj}(\tau\delta) \geq \tau\Omega_{lj}(\delta), \ \tau \geq 1; \ \ \Omega_{lj}(\tau\delta) \leq \tau\Omega_{lj}(\delta), \ \tau \in (0; 1). \tag{2}$$

Довизначимо $\Omega_{lj}(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, на $(-\infty; 0)$ парно і покладемо

$$\Omega(x) := (\Omega_1(x_1); \Omega_2(x_2); \Omega_3(x_3)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $\Omega_l(x_l) := (\Omega_{l\,1}(x_{l\,1}); ...; \Omega_{l\,n_l}(x_{l\,n_l}))$, $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$.

Подібним способом за функціями $\mu_{lj}(\cdot)$ з такими самими властивостями, що і в $\omega_{lj}(\cdot)$ означимо вектор-функцію

$$M(x) := (M_1(x_1); M_2(x_2); M_3(x_3)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

і розглянемо простір типу W Гуревича [3]:

$$W_\Omega^M := \Big\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \mid \exists \{c, \delta_1, \delta_2\} \subset (0; +\infty) \ \forall z \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\varphi(z)| \leq c \exp\left\{ Q_n^-(\delta_1, \delta_2; z) \right\} \Big\},$$

де

$$Q_n^{\pm}(\delta_1, \delta_2; z) := \pm |\Omega(\delta_1 x)|_* + |M(\delta_2 y)|_*, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^n.$$

Відомо [3], що $F\left[W_\Omega^M\right] = W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$, при цьому оператор перетворення Фур'є F відображає W_Ω^M на простір $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ взаємно однозначно та неперервно (тут $\vec{\Omega}(\cdot)$ і $\vec{M}(\cdot)$ – двоїсті за Юнгом функції відповідно з $\Omega(\cdot)$ і $M(\cdot)$).

Нехай $\mathfrak{L}_{\Omega_1}^{M_1}([0; T])$ – клас функцій $a : [0; T] \times \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{C}^{n_1}$ таких, що:

1) $a(t; x_1)$ – неперервна функція за змінною t на $[0; T]$, яка стосовно змінної x_1 допускає аналітичне продовження до цілої функції на $\mathbb{C}^{n_1}$;

2) $\exists\{\delta_1,\delta_2,c\}\subset[0;\infty)\forall z_1\in\mathbb{C}^{n_1}: \sup\limits_{t\in[0;T]}|a(t;z_1)|\leq Q^{+}_{n_1}(\delta_1,\delta_2;z_1)+c.$

Цей клас є замкненим відносно операцій додавання, віднімання та множення на неперервну функцію $b(t)$, $t\in[0;T]$; його кожен елемент стосовно просторової змінної є мультиплікатором у просторі $W^{M_1}_{\Omega_1}$. Більше того, якщо $\Omega^0_1(\cdot)$, $M^0_1(\cdot)$ – опуклі вниз парні вектор-функції такі, що $\Omega^0_{1j}(\delta)\leq\Omega_{1j}(\delta)$, $M^0_{1j}(\delta)\leq M_{1j}(\delta)$, $\delta\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}_{n_1}$, то $\mathfrak{L}^{M^0_1}_{\Omega^0_1}([0;T])\subset\mathfrak{L}^{M_1}_{\Omega_1}([0;T])$.

Розглянемо рівняння

$$\left(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}-\sum_{j=1}^{m}B_{a_j(t;x_1)}\right)u(t;x)=0, \qquad (3)$$

при $(t;x)\in\Pi^n_{(0;T]}$ і $m\in\mathbb{N}$. Тут

$$\left(B_{a_j}\varphi\right)(t;\cdot)=F^{-1}\left[a_j(t;\xi_1)\,F[\varphi](\xi_1)\right](t;\cdot),\quad t\in[0;T],\quad \varphi\in W^{\vec{\Omega}_1}_{\vec{M}_1},$$

– ПДО у просторі $W^{\vec{\Omega}_1}_{\vec{M}_1}$ із символом a_j з класу $\mathfrak{L}^{M_1}_{\Omega_1}([0;T])$.

Припускатимемо, що псевдодиференціальний вираз $\partial_t-\sum\limits_{j=1}^{m}B_{a_j(t;x_1)}$ із рівняння (3) є параболічним у такому сенсі:

$$\exists\{\delta^*_1,\delta^*_2,c^*\}\subset[0;\infty)\ \forall t\in[0;T]\,\forall\xi_1\in\mathbb{C}^{n_1}:$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}a_j(t;\xi_1)\leq Q^{-}_{n_1}(\delta^*_1,\delta^*_2;\xi_1)+c^*. \qquad (4)$$

Рівняння (3) назвемо виродженим параболічним псевдодиференціальним рівнянням типу Колмогорова з класу $\mathbb{E}^M_\Omega$.

Для (3) у точці $t=\tau$, $\tau\in[0;T)$, задамо початкову умову

$$u(t;\cdot)_{|\,t=\tau}=\varphi(\cdot) \qquad (5)$$

з "пробною" початковою функцією $\varphi\in W^{\vec{\Omega}}_{\vec{M}}$ і вважатимемо, що

$$\Omega_3(\cdot):=\Omega'_1(\cdot),\quad \Omega_2(\cdot):=\widehat{\Omega}_1(\cdot),\quad M_3(\cdot):=M'_1(\cdot),\quad M_2(\cdot):=\widehat{M}_1(\cdot),$$

а перші n_2 компоненти вектор-функції $\Omega_1(\cdot)$, окрім раніше описаних властивостей, мають ще й таку:

$$\Omega_{1j}(\tau\delta) \geq g_{1j}(\tau)\Omega_{1j}(\delta) - g_{2j}(\tau), \quad \tau \in (0;\,1],\ \delta \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}_{n_2}, \tag{6}$$

де $g_{1j}(\cdot)$, $g_{2j}(\cdot)$ – деякі невід'ємні обмежені на $(0;\,1]$ функції, причому

$$\int\limits_0^1 g_{1j}(\sigma_1 + \chi\sigma_2 + \chi^2\sigma_3)d\chi \geq \delta_1 > 0, \quad 0 < |\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3| \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

$$\int\limits_0^1 g_{1j}(\sigma_1 + \chi\sigma_2)d\chi \geq \delta_2 > 0,\ 0 < |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq 1,\ j \in \{n_3 + 1, ..., n_2\}. \tag{7}$$

Означення. ФРЗК для рівняння (3) назвемо функцію $G(t, x; \tau, y)$ визначену для всіх $(t;\,x) \in \Pi^n_{(\tau;\,T]}$ і залежну від параметричної точки $(\tau;\,y) \in \Pi^n_{[0;\,T)}$ таку, що:

1) G як функція $(t;\,x)$ задовольняє (3) на множині $\Pi^n_{(\tau;\,T]}$, $\tau \in [0;\,T)$, причому за кожною із змінних x і y є елементом простору $W^{\vec{\Omega}}_{\vec{M}}$;

2) виконується співвідношення $G(t, x; \tau, \cdot) \xrightarrow[t \to \tau + 0]{} \delta(\cdot - x)$ у сенсі збіжності в $W^{\vec{\Omega}\,\prime}_{\vec{M}}$ – топологічно спряженому просторі з $W^{\vec{\Omega}}_{\vec{M}}$ (тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

3 Побудова та дослідження ФРЗК

Зіставимо задачі Коші (3), (5) відповідну двоїсту за Фур'є задачу

$$\left(\partial_t + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}} - \sum_{j=1}^{m} a_j(t;\xi_1)\right)v(t;\xi) = 0, (t;\xi) \in \Pi^n_{(\tau;T]}, \tag{8}$$

$$v(t;\,\cdot)_{\,|\,t=\tau} = F[\varphi](\cdot), \tag{9}$$

де $v(t;\,\xi) := F\,[u(t;\,x)]\,(t;\,\xi)$. Відтак користуючись методом характеристик, випишемо для (8) відповідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \xi_3 dt = d\xi_2', \\ \xi_2 dt = \widehat{d\xi_1}, \\ \partial_t v = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j(t;\,\xi_1)v. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язуючи послідовно перших два векторних рівняння системи (10), дістанемо

$$\xi_2' = t\xi_3 + s_3,\;\; \xi_1' = 2^{-1}t^2\xi_3 + ts_3 + s_2',\;\; \xi_1'' = t\xi_2'' + s_2'', \tag{11}$$

де s_2 і s_3 – довільні сталі вектори розмірності відповідно n_2 і n_3. Підставляючи тепер у третє рівняння цієї системи, а також і в початкову умову (9) замість ξ_1', ξ_1'' і ξ_1''' вирази із рівностей (11), одержимо наступну задачу Коші:

$$\partial_t v(t;\, s;\, \tilde\xi) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t;\, \rho(t; s; \tilde\xi))\, v(t;\, s;\, \tilde\xi), \tag{12}$$

$$v(t;\, s;\, \tilde\xi)_{\,|\,t=\tau} = F[\varphi](\rho_0(\tau;\, s;\, \tilde\xi)). \tag{13}$$

Тут

$$\rho(t;\, s;\, \tilde\xi) := \left(s_2' + ts_3 + 2^{-1}t^2\xi_3,\, s_2'' + t\xi_2'',\; \xi_1'''\right),$$

$$\rho_0(t;\, s;\, \tilde\xi) := \left(s_2' + ts_3 + 2^{-1}t^2\xi_3,\, s_2'' + t\xi_2'',\; \xi_1''' ;\; s_3 + t\xi_3,\, \xi_2'' ;\; \xi_3\right)$$

– відповідно n_1 і n-вимірні вектори, а $s := (s_2',\, s_2'';\, s_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$.

Нехай

$$\theta_\tau^t(s; \tilde\xi) := \exp\left\{\sum_{j=1}^{m} \int_\tau^t a_j(\beta; \rho(\beta; s; \tilde\xi))d\beta\right\},$$

тоді функція

$$v(t;\, s;\, \tilde\xi) = \theta_\tau^t(s; \tilde\xi) F[\varphi](\rho_0(\tau;\, s;\, \tilde\xi)) \tag{14}$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (12), (13). А, отже, ця функція є розв'язком і задачі Коші (8), (9) при $s = s_{t,\xi}$, де

$$s_{t,\xi} := \left(\xi_1' - t\xi_2' + 2^{-1}t^2\xi_3,\, \xi_1'' - t\xi_2'' ;\, \xi_2' - t\xi_3\right).$$

Подіявши формально оберненим перетворенням Фур'є F^{-1} на рівність (14) при $s = s_{t,\xi}$ одержимо

$$u(t;\, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \theta_\tau^t(s_{t,\xi};\, \tilde\xi) F[\varphi](\rho_0(\tau;\, s_{t,\xi};\, \tilde\xi)) d\xi. \tag{15}$$

В інтегралі з (15) зробимо заміну змінних інтегрування за правилом

$$\begin{gathered}\xi_1' - (t-\tau)\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\xi_3 = \eta_1',\;\; \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'' = \eta_1'',\\ \xi_1''' = \eta_1''',\;\; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3 = \eta_2',\; \xi_2'' = \eta_2'',\;\; \xi_3 = \eta_3\,,\end{gathered} \tag{16}$$

в результаті одержимо рівність

$$u(t;\,x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\eta,y)}e^{-i(x,\rho_0(t;s_{\tau,\eta};\tilde{\eta}))}\theta_\tau^t\,(s_{\tau,\eta};\,\tilde{\eta})\,\varphi(y)dyd\eta.$$

Звідси, змінивши формально порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$u(t;\,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\,x;\,\tau,\,y)\varphi(y)dy,\quad 0\le\tau<t\le T,\; x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

у якій

$$G(t,\,x;\,\tau,\,y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,\eta)}\mu_\tau^t\,(\eta;\,x)\,d\eta,\quad (t,\,x;\,\tau,\,y)\in\Pi^2, \tag{18}$$

а

$$\mu_\tau^t\,(\eta;\,x) := e^{-i(x,\rho_0(t;s_{\tau,\eta};\tilde{\eta}))}\theta_\tau^t\,(s_{\tau,\eta};\,\tilde{\eta})\,.$$

Перейдемо до дослідження функції G. Для цього, спочатку дослідимо властивості функції θ_τ^t.

Лема 1. *Функція $\theta_\tau^t(s_{\gamma,\xi};\,\tilde{\xi})$, $\gamma\in\{t,\,\tau\}$, стосовно змінної ξ при кожних фіксованих t і τ, $0\le\tau<t\le T$, допускає аналітичне продовження на весь $\mathbb{C}^n$ до цілої функції, для якої*

$$\exists\{c_T,\delta_1,\delta_2\}\subset(0;\infty)\forall z=x+iy\in\mathbb{C}^n\forall\tau\in[0;T)\forall t\in(\tau;T]:|\theta_\tau^t(s_{\gamma,z};\tilde{z})|\le$$

$$\le c_T\exp\Big\{-(t-\tau)(|\Omega_1(\delta_1x_1)|_*-|M_1(\delta_2y_1)|_*+|\widehat{\Omega}_1(\delta_1(t-\tau)x_2)|_*-$$

$$-|\widehat{M}_1(\delta_2(t-\tau)y_2)|_*+|\Omega_1'(\delta_1 2^{-1}(t-\tau)^2x_3)|_*-|M_1'(\delta_2 2^{-1}(t-\tau)^2y_3)|_*)\Big\}.$$

Доведення. Безпосередньо із структури функції $\theta_\tau^t(s_{\gamma,\xi};\,\tilde{\xi})$ та властивостей елементів класу $\mathfrak{L}_{\Omega_1}^{M_1}([0;T])$, переконуємось, що ця функція стосовно ξ аналітично продовжується на весь комплексний простір $\mathbb{C}^n$.

Здійснивши згідно з правилом $\chi = \dfrac{t-\beta}{t-\tau}$ при $\gamma = t$, та $\chi = \dfrac{\beta-\tau}{t-\tau}$ при $\gamma = \tau$ заміну змінної інтегрування в інтегралі

$$\int\limits_{\tau}^{t} \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\beta;\, \rho(\beta;\, s_{\gamma,z};\, \tilde{z})\right) d\beta$$

і скориставшись тим, що при $\beta = t - \chi(t-\tau)$

$$\rho(\beta; s_{t,z}; \tilde{z}) = (z_1' - \chi(t-\tau)z_2' + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 z_3, z_1'' - \chi(t-\tau)z_2'', z_1'''),$$

$$\rho(\beta; s_{\tau,z}; \tilde{z}) = (z_1' + \chi(t-\tau)z_2' + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 z_3, z_1'' + \chi(t-\tau)z_2'', z_1'''),$$

а також умовою (4), при $0 \le \tau < t \le T,\ z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ дістанемо

$$|\theta_\tau^t(s_{\gamma,z};\tilde{z})| \le \exp\Bigg\{(\tau-t)\Bigg(\int\limits_0^1 (|\Omega_1'(\delta_1^*(x_1' \pm \chi(t-\tau)x_2' + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 x_3))|_* -$$

$$-|M_1'(\delta_2^*(y_1' \pm \chi(t-\tau)y_2' + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 y_3))|_* + |\Omega_1''(\delta_1^*(x_1'' \pm \chi(t-\tau)x_2''))|_* -$$

$$-|M_1''(\delta_2^*(y_1'' \pm \chi(t-\tau)y_2''))|_*)d\chi + |\Omega_1'''(\delta_1^* x_1''')|_* - |M_1'''(\delta_2^* y_1''')|_* - c^*\Bigg)\Bigg\}.$$

Врахувавши тепер оцінки

$$\int\limits_0^1 \Omega_{1j}(\delta_1^*(x_{1j} \pm \chi(t-\tau)x_{2j} + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 x_{3j}))d\chi \ge$$

$$\ge \delta_1 \Omega_{1j}(\delta_1^*(|x_{1j}| + (t-\tau)|x_{2j}| + 2^{-1}(t-\tau)^2|x_{3j}|)) - \delta_0,$$

$$\int\limits_0^1 M_{1j}(\delta_2^*(y_{1j} \pm \chi(t-\tau)y_{2j} + 2^{-1}\chi^2(t-\tau)^2 y_{3j}))d\chi \le$$

$$\le M_{1j}(\delta_2^*(|y_{1j}| + (t-\tau)|y_{2j}| + (t-\tau)^2/2\,|y_{3j}|)), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3};$$

$$\int\limits_0^1 \Omega_{1j}(\delta_1^*(x_{1j} \pm \chi(t-\tau)x_{2j}))d\chi \ge \delta_1 \Omega_{1j}(\delta_1^*(|x_{1j}| + (t-\tau)|x_{2j}|)) - \delta_0,$$

$$\int_0^1 M_{1j}(\delta_2^*(y_{1j} \pm \chi(t-\tau)y_{2j}))d\chi \leq M_{1j}(\delta_2^*(|y_{1j}| + (t-\tau)|y_{2j}|)),$$

$$j \in \{n_3+1, ..., n_2\},$$

які одержуються безпосередньо із припущення (6) та зростання вектор–функції $M_1(\cdot)$ і виконуються для всіх $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$ і $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$, дістанемо

$$|\theta_\tau^t(s_{\gamma,z};\, \tilde{z})| \leq c_T \exp\{-(t-\tau)(\delta_1|\Omega_1'(\delta_1^*(|x_1'|+(t-\tau)|x_2'|+2^{-1}(t-\tau)^2|x_3|))|_* -$$

$$-|M_1'(\delta_2^*(|y_1'|+(t-\tau)|y_2'|+2^{-1}(t-\tau)^2|y_3|))|_* + \delta_1|\Omega_1''(\delta_1^*(|x_1''|+(t-\tau)|x_2''|))|_* -$$

$$-|M_1''(\delta_2^*(|y_1''| + (t-\tau)|y_2''|))|_* + |\Omega_1'''(\delta_1^*|x_1'''|)|_* - |M_1'''(\delta_2^*|y_1'''|)|_*)\}. \quad (19)$$

Звідси, зваживши на властивості (1), (2) компонент вектор-функції $\Omega_1(\cdot)$ та нерівність

$$M_{1j}(a+b) \leq M_{1j}(2\max\{a,b\}) + M_{1j}(\min\{a,b\}),\ \{a,b\} \subset [0;\infty),\ j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

приходимо до твердження леми 1. Лему доведено.

Зазначимо, що одержані в лемі 1 оцінки функції θ_τ^t, а також властивості елементів φ простору $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ забезпечують коректність усіх перетворень, здійснених при одержанні формули (17).

Правильне наступне твердження.

Теорема 1. *При кожних фіксованих $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ функція $G(t, x; \tau, y)$ як функція змінної x або y є елементом простору $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$.*

Доведення. Спочатку розглянемо функцію $G(t, x; \tau, \cdot)$ (при фіксованих t, x і τ). Оскільки (див. (18))

$$G(t, x; \tau, y) = (2\pi)^{-n} F_{\eta \to y}\left[\mu_\tau^t(\eta; x)\right](t, x; \tau, y),$$

а $F\left[W_\Omega^M\right] = W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$, то для доведення $G(t, x; \tau, \cdot) \in W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ досить установити, що $\mu_\tau^t(\cdot; x) \in W_\Omega^M$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$.

Функція $\mu_\tau^t(\cdot; x)$ допускає аналітичне продовження на весь комплексний простір $\mathbb{C}^n$, тому врахувавши твердження леми 1, а також існування сталої $c_0 > 0$ такої, що $\delta \leq M_{lj}(\delta)$, $j \in \mathbb{N}_{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, при $\delta \geq c_0$, одержимо

$$|\mu_\tau^t(\eta + i\zeta;\, x)| \leq e^{(x_1', \zeta_1' + (t-\tau)\zeta_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\zeta_3) + (x_1'', \zeta_1'' + (t-\tau)\zeta_2'') + (x_1''', \zeta_1''')} \times$$

$$\times e^{(x_2',\zeta_2'+(t-\tau)\zeta_3)+(x_2'',\zeta_2'')+(x_3,\zeta_3)}|\theta_\tau^t(s_{\tau,(\eta+i\zeta)};\,\widetilde{(\eta+i\zeta)})| \le$$

$$\le c_T\exp\{-(t-\tau)(|\Omega_1(\delta_1\eta_1)|_*+|\hat{\Omega}_1(\delta_1(t-\tau)\eta_2)|_*+|\Omega_1'(\delta_1 2^{-1}(t-\tau)^2\eta_3)|_*)\}\times$$
$$\times\exp\{((|x_1|,|\zeta_1|)+|M_1(T_0\delta_1\zeta_1)|_*)+(T_0(|\hat{x}_1|+|x_2|,|\zeta_2|)+|\widehat{M}_1(T_0\delta_2\zeta_2)|_*)+$$
$$+(T_0^2(|x_1'|+|x_2'|+|x_3|,|\zeta_3|)+|M_1'(T_0^2\delta_2\zeta_3)|_*)\}\le$$
$$\le c_T\exp\{-(t-\tau)(|\Omega_1(\delta_1\eta_1)|_*-|M_1(\delta_x\zeta_1)|_*+|\widehat{\Omega}_1(\delta_1(t-\tau)\eta_2)|_*-$$
$$-|\widehat{M}_1(\delta_x\zeta_2)|_*+|\Omega_1'(\delta_1 2^{-1}(t-\tau)^2\eta_3)|_*-|M_1'(\delta_x\zeta_3)|_*)\},\tag{20}$$
$$0\le\tau<t\le T,\{\eta,\zeta,x\}\subset\mathbb{R}^n,|\zeta_{lj}|\ge c_0,j\in\mathbb{N}_{n_l},l\in\mathbb{N}_3,$$

де $T_0:=\max\{1,T\}$, δ_x – додатна величина, залежна лише від x, а c_T, δ_1 і δ_2 – оціночні сталі із твердження леми 1.

Якщо ж $|\zeta_{lj}|<c_0$ при деякому $j\in\mathbb{N}_{n_l}$, то і в цьому випадку виконуються оцінки типу (20) для функції $\mu_\tau^t(\eta+i\zeta;x)$, оскільки

$$e^{-(t-\tau)(\Omega_{1j}(\delta_1\eta_{1j})-M_{1j}(\delta_2\zeta_{1j}))}e^{x_{1j}\zeta_{1j}}\le c_x e^{-(t-\tau)(\Omega_{1j}(\delta_1\eta_{1j})-M_{1j}(\delta_2\zeta_{1j}))},$$

$$e^{-(t-\tau)(\Omega_{1j}(\delta_1(t-\tau)\eta_{2j})-M_{1j}(\delta_2(t-\tau)\zeta_{2j}))}e^{((t-\tau)x_{1j}+x_{2j})\zeta_{2j}}\le$$
$$\le c_x e^{-(t-\tau)(\Omega_{1j}(\delta_1(t-\tau)\eta_{2j})-M_{1j}(\delta_2(t-\tau)\zeta_{2j}))},$$

$$e^{-(t-\tau)\left(\Omega_{1j}\left(\frac{\delta_1}{2}(t-\tau)^2\eta_{3j}\right)-M_{1j}\left(\frac{\delta_2}{2}(t-\tau)^2\zeta_{3j}\right)\right)}e^{\left(\frac{1}{2}(t-\tau)^2x_{1j}+(t-\tau)x_{2j}+x_{3j}\right)\zeta_{3j}}\le$$
$$\le c_x e^{-(t-\tau)\left(\Omega_{1j}\left(\frac{\delta_1}{2}(t-\tau)^2\eta_{3j}\right)-M_{1j}\left(\frac{\delta_2}{2}(t-\tau)^2\zeta_{3j}\right)\right)}.$$

Отже, функція $\mu_\tau^t(\cdot;x)\in W_\Omega^M$, $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$. Таким чином, належність функції $G(t,x;\tau,\cdot)$ до простору $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ встановлено.

Подібним способом переконуємось у належності $G(t,\cdot;\tau,y)$ до $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ при кожних фіксованих $y\in\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$. Теорему доведено.

Наступне твердження характеризує властивість δ–подібності функції $G(t,\,x;\,\tau,\,\cdot)$ за змінною t.

Теорема 2. *Функція $G(t,\,x;\,\tau,\,\cdot)$ при $t\to\tau+0$ прямує до $\delta\,(\cdot-x)$ у просторі $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}\,\prime}$.*

Доведення. Досить установити виконання співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,\,\cdot;\,\tau,\,y)\varphi(y)dy\xrightarrow[t\to\tau+0]{}\varphi(\cdot)\qquad\left(\forall\varphi\in W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}\right),$$

або

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} \Big[\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) - F[\varphi](\xi)\Big]\, d\xi \xrightarrow[t\to\tau+0]{} 0. \qquad (21)$$

Рівносильність цих співвідношень стає очевидною безпосередньо із

$$u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,y)\varphi(y)dy, \quad 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

зображення (15) та рівності $\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi](\xi)](x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Згідно з твердженням класичної теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, доведення (21) зводиться до встановлення таких тверджень:

I) $\Big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) - F[\varphi](\xi)\Big| \underset{t\to\tau+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}} 0$

(тут йдеться про рівномірне прямування до нуля стосовно змінної ξ на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}^n$);

II) $\exists\ \{c,\,\delta\} \subset (0;+\infty)\ \forall t \in (\tau;\,\tau+1/2]\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\Big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))\Big| \le ce^{-|\Omega(\delta\xi)|_*}.$$

Твердження II) гарантує абсолютну та рівномірну стосовно t, $0 < t - \tau << 1$, збіжність інтеграла із (21).

Переконаємось спочатку у виконанні твердження I). Для цього скористаємось очевидною оцінкою

$$\big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) - F[\varphi](\xi) big| \le \big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\big|\big|F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) -$$

$$-F[\varphi](\xi)\big| + \big|F[\varphi](\xi)\big|\ \big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi}) - 1\big|, \quad 0 \le \tau < t \le T,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

завдяки якій доведення I) зводиться до доведення наступних співвідношень при довільному $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Big|F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) - F[\varphi](\xi)\Big| \underset{t\to\tau+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0; \quad \Big|\theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi}) - 1\Big| \underset{t\to\tau+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0. \qquad (22)$$

Оскільки для $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$

$$\Big|F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) - F[\varphi](\xi)\Big| \le \Big|F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})) -$$

$$-F[\varphi](\xi_1' - (t-\tau)\xi_2', \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'', \xi_1'''; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3)\Big| +$$

$$+\Big|F[\varphi](\xi_1' - (t-\tau)\xi_2', \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'', \xi_1'''; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3) -$$

$$-F[\varphi](\xi_1', \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'', \xi_1'''; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3)\Big| +$$

$$+\Big|F[\varphi](\xi_1', \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'', \xi_1'''; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3) -$$

$$-F[\varphi](\xi_1; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3)\Big| + \Big|F[\varphi](\xi_1; \xi_2' - (t-\tau)\xi_3, \xi_2''; \xi_3) - F[\varphi](\xi)\Big|,$$

то взявши до уваги належність $F[\varphi](\cdot)$ до W_Ω^M, на підставі теореми про скінченні прирости одержуємо перше співвідношення із (22).

Скориставшись далі твердженням теореми про середнє значення неперервної функції і врахувавши властивості символів a_j та рівність

$$e^{\gamma} - 1 = \gamma e^{\theta\gamma}, \quad 0 < \theta < 1, \ \gamma \in \mathbb{R},$$

дістанемо, що для $\xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$

$$|\theta_\tau^t(s_{t,\xi}; \tilde{\xi}) - 1| \le (t-\tau) \times$$

$$\times \sup_{t\in[0;T], \xi\in\mathbb{K}} \left\{ \sum_{j=1}^m |a_j(\beta_0; \rho(\beta_0; s_{t,\xi}; \tilde{\xi}))| e^{T \sum\limits_{j=1}^m |a_j(\beta_0; \rho(\beta_0; s_{t,\xi}; \tilde{\xi}))|} \right\}, \ \beta_0 \in (\tau; t),$$

а, відтак і виконання другого співвідношення із (22).

Отже, твердження I) доведено.

Доведемо твердження II). Оскільки $F[\varphi](\cdot) \in W_\Omega^M$, то зваживши на обмеженість функції θ_τ^t в множині $\Pi_{(\tau;T]}^n$, приходимо до

$$|\theta_\tau^t(s_{t,\xi}; \tilde{\xi}) F[\varphi](\rho_0(\tau; s_{t,\xi}; \tilde{\xi}))| \le c e^{-|\Omega(\delta\rho_0(\tau; s_{t,\xi}; \tilde{\xi}))|_*}, \ 0 \le \tau < t \le T, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Скористаємось далі зображенням

$$e^{-|\Omega(\delta\rho_0(\tau; s_{t,\xi}; \tilde{\xi}))|_*} = e^{-|\Omega_1'(\delta(\xi_1' - \chi\xi_2' + \frac{1}{2}\chi^2\xi_3))|_* - \frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3))|_*} \times$$

$$\times e^{-\left|\Omega_1''\left(\delta(\xi_1'' - \chi\xi_2'')\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1''\left(\delta\xi_2''\right)\right|_*} e^{-\frac{1}{2}\left|\Omega_1'\left(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3)\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1'(\delta\xi_3)\right|_*} \times$$

$$\times e^{-\left|\Omega_1'''\left(\delta\xi_1'''\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1''\left(\delta\xi_2''\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1'(\delta\xi_3)\right|_*}, \quad \chi := t - \tau.$$

Оцінимо перший співмножник із правої частини попередньої рівності. При

$$|\xi_1'| \geq |\xi_2' - 2^{-1}\chi\xi_3|,$$

маємо

$$e^{-|\Omega_1'(\delta(\xi_1' - \chi\xi_2' + \frac{1}{2}\chi^2\xi_3))|_* - \frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3))|_*} \leq$$

$$\leq e^{-|\Omega_1'(\delta(\xi_1' - \chi\xi_2' + \frac{1}{2}\chi^2\xi_3))|_*} \leq e^{-|\Omega_1'(\frac{\delta}{2}\xi_1')|_*}, \ \chi \in [0; 1/2],$$

оскільки

$$|\xi_1' - \chi\xi_2' + 2^{-1}\chi^2\xi_3| \geq |\xi_1'| - \chi|\xi_2' - 2^{-1}\chi\xi_3| \geq 2^{-1}|\xi_1'|, \ \chi \in [0; 1/2].$$

У випадку, коли

$$|\xi_1'| < |\xi_2' - 2^{-1}\chi\xi_3|,$$

одержимо

$$e^{-|\Omega_1'(\delta(\xi_1' - \chi\xi_2' + \frac{1}{2}\chi^2\xi_3))|_* - \frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3))|_*} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3))|_*} \leq e^{-\frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta\xi_1')|_*}.$$

Звідси, зваживши на властивість (2) вектор-функції Ω, приходимо до такої оцінки при $\chi \in [0; 1/2]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$e^{-|\Omega_1'(\delta(\xi_1' - \chi\xi_2' + \frac{1}{2}\chi^2\xi_3))|_* - \frac{1}{2}|\Omega_1'(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3))|_*} \leq e^{-|\Omega_1'(\frac{\delta}{2}\xi_1')|_*}.$$

Оцінки

$$e^{-\left|\Omega_1''\left(\delta(\xi_1'' - \chi\xi_2'')\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1''\left(\delta\xi_2''\right)\right|_*} \leq e^{-|\Omega_1''(\frac{\delta}{2}\xi_1'')|_*},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left|\Omega_1'\left(\delta(\xi_2' - \chi\xi_3)\right)\right|_* - \frac{1}{2}\left|\Omega_1'(\delta\xi_3)\right|_*} \leq e^{-|\Omega_1'(\frac{\delta}{4}\xi_2')|_*},$$

при $\chi \in [0; 1/2]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ встановлюються аналогічним способом.

Таким чином, твердження II) також справджується. Теорему доведено.

Далі, переконаємось у тому, що функція $G(t,\, x;\, \tau,\, y)$ стосовно змінних t і x є звичайним розв'язком рівняння (3) на множині $\Pi^n_{(\tau;T]}$. Для цього знайдемо значення кожного із операторів цього рівняння на G.

Обчислимо спочатку $B_{a_j(t;x_1)}G$. Оскільки $G(t,\, \cdot;\, \tau,\, y) \in W^{\vec{\Omega}}_{\vec{M}}$, то очевидно, що для $(t, x; \tau, y) \in \Pi^2$

$$B_{a_j(t;x_1)}G(t, x; \tau, y) = F^{-1}_{\xi\to x}\left[a_j(t;\, \xi_1)F_{\eta\to\xi}\left[G(t,\, \eta;\, \tau,\, y)\right]\right](t,\, x;\, \tau,\, y).$$

Безпосередньо з (18) одержуємо рівність

$$G(t,\, \eta;\, \tau,\, y) = F^{-1}_{\zeta\to z}\left[\theta^t_\tau(s_{\tau,\zeta};\, \tilde{\zeta})\right](t,\, \tau;\, z)_{\,|\, z=\nu_\eta - y}, \quad (t,x;\tau,y)\in\Pi^2,$$

у якій вектор

$$\nu_\eta := (\eta_1; \eta_2 + (t-\tau)\hat{\eta}_1; \eta_3 + (t-\tau)\eta_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\eta_1').$$

Тоді

$$F_{\eta\to\xi}\left[G(t,\eta;\tau,y)\right](t,\xi;\tau,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\eta,\xi)} F^{-1}_{\zeta\to z}\left[\theta^t_\tau(s_{\tau,\zeta};\tilde{\zeta})\right](t,\tau;z)_{|z=\nu_\eta - y} d\eta.$$

Здійснивши в останньому інтегралі заміну змінної інтегрування за формулою $z = \nu_\eta - y$ і скориставшись співвідношенням

$$i(\eta,\xi) = i\big\{(z_1'+y_1', \xi_1' - (t-\tau)\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\xi_3) + (z_1''+y_1'', \xi_1'' - (t-\tau)\xi_2'') +$$

$$+(z_1'''+y_1''', \xi_1''') + (z_2'+y_2', \xi_2' - (t-\tau)\xi_3) + (z_2''+y_2'', \xi_2'') + (z_3+y_3, \xi_3)\big\},$$

та властивістю оборотності перетворення Фур'є, прийдемо до рівності

$$F_{\eta\to\xi}[G(t,\eta;\tau,y)](t,\xi;\tau,y) =$$

$$= e^{i\{(\xi_1,y_1)+(\xi_2,y_2-(t-\tau)\hat{y}_1)+(\xi_3,y_3-(t-\tau)y_2'+2^{-1}(t-\tau)^2y_1')\}}\theta^t_\tau(s_{t,\xi};\tilde{\xi}),$$

згідно з якою

$$B_{a_j(t;x_1)}G(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_j(t;\xi_1)\theta^t_\tau(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\times$$

$$\times e^{i\{(\xi_1,y_1)+(\xi_2,y_2-(t-\tau)\hat{y}_1)+(\xi_3,y_3-(t-\tau)y_2'+2^{-1}(t-\tau)^2y_1')\}}e^{-i(x,\xi)}d\xi.$$

Зробивши тут ще раз заміну змінної інтегрування згідно з (16), для $(t,x;\tau,y)\in\Pi^2$ остаточно одержимо

$$B_{a_j(t;x_1)}G\,(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_j(t;\,\rho(t;s_{\tau,\eta};\tilde{\eta}))e^{i(y,\eta)}\mu^t_\tau(\eta;x)d\eta.$$

Отже, для всіх $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$ і $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^m B_{a_j(t;x_1)}G(t,x;\tau,y) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_j(t;\, \rho(t; s_{\tau,\eta}; \tilde{\eta})) \right) e^{i(y,\eta)} \mu_\tau^t(\eta; x) d\eta. \qquad (23)$$

Врахувавши структуру (18) функції G, твердження леми 1, а також те, що елементи класу $\mathfrak{L}_{\Omega_1}^{M_1}([0;T])$ стосовно просторової змінної є мультиплікаторами у просторі $W_{\Omega_1}^{M_1}$, згідно з класичною теоремою про диференціювання залежного від параметра інтеграла, переконуємось у правильності таких рівностей для $(t,x;\tau,y) \in \Pi^2$:

$$\partial_t G(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} a_j(t;\, \rho(t; s_{\tau,\eta}; \tilde{\eta})) -$$

$$-(x_1', \eta_2' + (t-\tau)\eta_3) + (x_1'', \eta_2'') - (x_2', \eta_3) \Bigg\} e^{i(y,\eta)} \mu_\tau^t(\eta; x) d\eta;$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,y) =$$

$$= -(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \{(x_1', \eta_2' + (t-\tau)\eta_3) + (x_1'', \eta_2'')\} e^{i(y,\eta)} \mu_\tau^t(\eta; x) d\eta;$$

$$\sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} G(t,x;\tau,y) = -(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_2', \eta_3) e^{i(y,\eta)} \mu_\tau^t(\eta; x) d\eta.$$

Звідси та з (23) одержуємо, що для $(t,x;\tau,y) \in \Pi^2$

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} \right) G(t,x;\tau,y) = \sum_{j=1}^{m} B_{a_j(t;x_1)} G(t,x;\tau,y),$$

тобто функція $G(t,x;\tau,y)$ є звичайним розв'язком рівняння (3) на множині $\Pi_{(\tau;T]}^n$ стосовно $(t;x)$ при кожних фіксованих $(\tau;y)$ з $\Pi_{[0;T)}^n$.

Отже, правильне таке твердження.

Теорема 3. *Функція G, яка визначена рівністю* (18), *є ФРЗК для рівняння* (3).

4 Приклад

Зафіксуємо довільно вектор $\vec{b} = (b_1, ..., b_{n_1})$ з натуральними координатами і розглянемо ПДО B_a із символом

$$a(t;\xi_1) = \sum_{r_{\vec{b}}(q_1)\leq 1} \lambda_{q_1}(t)(-i\xi_1)^{q_1}, \quad (t;\xi_1) \in \Pi^{n_1}_{(0;T]},$$

де $\lambda_{q_1}(\cdot)$ – неперервні на $[0;T]$ функції, а $r_{\vec{b}}(q_1) := \sum_{j=1}^{n_1} \frac{q_{1j}}{2b_j}$, $q_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$. Очевидно, що $a \in \mathfrak{L}^{M_1}_{\Omega_1}([0;T])$ при $\Omega_1(\xi_1) = M_1(\xi_1) = (\xi_{11}^{2b_1}, ..., \xi_{1n_1}^{2b_{n_1}})$.

З такими вектор-функціями Ω_1 й M_1 простір $W^{M_1}_{\Omega_1}$ збігається з простором $S^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$, $\vec{\alpha} = (1/(2b_1), ...,1/(2b_{n_1}))$, $\vec{\beta} = (1-1/(2b_1), ...,1-1/(2b_{n_1}))$ [5]. Крім цього, для Ω_1 виконується умова (6) з функціями $g_{1j}(\tau) = \tau^{2b_j}$ і $g_{2j}(\tau) \equiv 0$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, причому, як зазначено в [2, с.157], справджуються також і відповідні оцінки (7).

У цьому випадку рівняння (3) при $m = 1$ набуде вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right)u(t;x) = \sum_{r_{\vec{b}}(q_1)\leq 1} \lambda_{q_1}(t)(\partial^{q_1}_{x_1}u)(t;x), \quad (24)$$

з $\overrightarrow{2b}$-параболічним за змінними $(t;x_1)$ на множині $\Pi^{n_1}_{(0;T]}$ диференціальним виразом

$$\partial_t - \sum_{r_{\vec{b}}(q_1)\leq 1} \lambda_{q_1}(t)\partial^{q_1}_{x_1}.$$

Таким чином, при зазначених вектор–функціях Ω_1 і M_1 виконується включення $\mathbb{E}^0_{23} \subset \mathbb{E}^{M_1}_{\Omega_1}$, де $\mathbb{E}^0_{23}$ – клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$–параболічною частиною, означений у [2].

На завершення зазначимо, що одержані тут результати стосовно ФРЗК на випадок рівняння (24) повністю узгоджуються з відповідними результатами, одержаними С.Д. Ейдельманом разом з С.Д. Івасишеним у [2].

Література

[1] *Kolmogoroff A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. - 1934. - **35**, P. 116-117.

[2] *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. - 2004. - **152**, 390 p.

[3] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1958. - 274 с.

[4] *Літовченко В.А.* Задача Коші для сингулярних псевдодиференціальних систем параболічного типу // Укр.мат.вісник. - 2007. - **4**, №1. - С. 21-56.

[5] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958. - 307 с.