Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 219–234

УДК 517.956.4

В.М. Лось

(Чернігівський державний технологічний університет, Чернігів),

О.О. Мурач

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач

v_los@yahoo.com, murach@imath.kiev.ua

For a refined Sobolev scale, we prove a theorem about local increase in smoothness of generalized solutions to a mixed parabolic problem with homogeneous Cauchy data. We find sufficient conditions for the solutions to have continuous derivatives.

Для уточненої соболєвської шкали доведено теорему про локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків мішаної параболічної задачі з однорідними даними Коші. Знайдено достатні умови існування неперервних похідних цих розв'язків.

1 Вступ

В теорії рівнянь з частинними похідними важливим є питання про регулярність розв'язків, що досліджуються. Як правило, відповідь на нього дають у вигляді достатніх умов належності розв'язків вибраним функціональним просторам. Останні залежать від скінченного набору числових параметрів і утворюють шкалу просторів.

В основному використовують дві такі шкали, утворені просторами Соболєва та просторами Гельдера–Зігмунда, відповідно. Для них побудована теорія розв'язності загальних еліптичних крайових задач

[1–11] і параболічних початково–крайових задач [12–17] (див. також огляди [18, 19]). Втім, виявилось, що для деяких застосувань до диференціальних операторів ці шкали не є досить тонко градуйованими за допомогою числових параметрів [6, 7, 20–23].

У цьому зв'язку є цікавими функціональні простори, для яких показником гладкості є не числовий, а функціональний параметр. Вони називаються просторами узагальненої гладкості. Важливі класи таких просторів були введені й досліджені Л. Хермандером [6] та Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [24]. В останні роки простори узагальненої гладкості є предметом різних досліджень як самі по собі, так і з точки зору застосувань [20–23, 25].

Недавно В. А. Михайлець і другий автор [23, 26–33] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах, утворених просторами Хермандера

$$H^{s,\varphi} := B_{2,\mu} \quad \text{для} \quad \mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\bigl((1+|\xi|^2)^{1/2}\bigr). \tag{1}$$

Тут числовий параметр s дійсний, а функціональний параметр φ повільно змінюється на нескінченності за Й. Караматою. Клас просторів (1) містить соболєвську шкалу $\{H^s\} = \{H^{s,1}\}$, прив'язаний до неї числовим параметром s, проте градуйований тонше, ніж соболєвська шкала. Числовий параметр s визначає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр φ уточнює її, задаючи додаткову гладкість. Остання може дати як більш широкий, так и більш вузький простір $H^{s,\varphi}$ у порівнянні з H^s. Клас просторів (1) названо уточненою соболєвською шкалою.

На відміну від еліптичних операторів, в теорії параболічних диференціальних операторів виникає нерівноправність незалежних змінних — часової і просторових. Це призводить до потреби використовувати анізотропні функціональні простори. В роботі [34] нами введений анізотропний аналог уточненої соболєвської шкали і доведена теорема про ізоморфізм на цій шкалі, який здійснює оператор початково–крайової задачі для лінійного параболічного рівняння довільного парного порядку. Для більшої наочності міркувань розглянуто двомірний випадок і однорідні початкові умови (дані Коші).

Ця стаття є продовженням роботи [34]. Мета статті — довести теорему про локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків параболічної задачі в уточненій соболєвській шкалі. Як одне з її важливих застосувань, отримаємо достатні умови існування неперервних похідних розв'язків.

Стаття складається з 6 пунктів. Пункт 1 є вступ. Пункт 2 містить постановку задачі, що досліджується. У п. 3 розглянута анізотропна уточнена соболєвська шкала, в якій досліджується параболічна задача. У п. 4 сформульовані основні результати статті. Вони доведені в п. 5. Пункт 6 містить висновки до статті.

2 Постановка задачі

Нехай $\Omega := (0,l)\times(0,\tau)$, де l і τ є довільні додатні числа. Розглянемо в прямокутнику Ω лінійну параболічну задачу з однорідними початковими умовами:

$$\begin{aligned}
&A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\\
&\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)=f(x,t)\quad \text{в}\quad \Omega, && (2)\\
&B_{j,0}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=0}\\
&\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} b_{j,0}^{\alpha,\beta}(t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_{x=0}=g_{j,0}(t)\quad \text{і} && (3)\\
&B_{j,1}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=l}\\
&\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_{x=l}=g_{j,1}(t) && (4)\\
&\quad \text{для}\quad 0<t<\tau\quad \text{і}\quad j=1,\ldots,m,\\
&\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}=0\quad \text{для}\quad 0<x<l\quad \text{і}\quad k=0,\ldots,\varkappa-1. && (5)
\end{aligned}$$

Тут b, m і всі m_j є довільні фіксовані цілі числа, такі, що $m\ge b\ge 1$, $\varkappa := m/b\in\mathbb{Z}$ і $m_j\ge 0$. Всі коефіцієнти виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ та $B_{j,k} := B_{j,k}(t,D_x,\partial_t)$, де $j\in\{1,\ldots,m\}$ та $k\in\{0,1\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. А саме, $a^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ та $b_{j,k}^{\alpha,\beta}\in C^\infty[0,\tau]$, де $\overline{\Omega} := [0,l]\times[0,\tau]$. Використовуємо позначення $D_x := i\,\partial/\partial x$ та $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних. Підсумовування здійснюємо по цілим індексам $\alpha,\beta\ge 0$, що задовольняють нерівності, вказані під знаком суми.

Нагадаємо [12, § 9, п. 1], що початково–крайову задачу (2)–(5) називають параболічною в Ω, якщо виконуються наступні три умови:

(i) Для довільних $x \in [0,l]$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$ та $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ вірно

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta} \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi|+|p| \neq 0.$$

(ii) Нехай величини $x \in \{0,l\}$, $t \in [0,\tau]$, та $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ довільні. Тоді многочлен $A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ відносно $\xi \in \mathbb{C}$ має m коренів $\xi_j^{+}(x,t,p)$, $j=1,\ldots,m$, з додатною уявною частиною та m коренів з від'ємною уявною частиною, з урахуванням їх кратності.

(iii) Нехай величини x, t, та p такі самі, як і в умові (ii). Покладемо $k := 0$ якщо $x=0$, або $k := 1$ якщо $x=l$. Тоді многочлени

$$B_{j,k}^{(0)}(t,\xi,p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=m_j} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta}, \quad j=1,\ldots,m,$$

аргументу ξ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}\bigl(\xi-\xi_j^{+}(x,t,p)\bigr).$$

Пов'яжемо з параболічною задачею (2)–(5) лінійне відображення

$$\begin{gathered} C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto (Au,Bu) := \\ := \bigl(Au, B_{1,0}u, B_{1,1}u, \ldots, B_{m,0}u, B_{m,1}u\bigr) \in C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_{+}^{\infty}[0,\tau]\bigr)^{2m}, \end{gathered} \tag{6}$$

Тут позначено

$$\begin{gathered} C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{w \restriction \overline{\Omega} :\ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}\times[0,\infty)\bigr\} = \\ = \bigl\{u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) :\ \partial_t^{\beta}u(x,t)|_{t=0} = 0 \ \text{для всіх}\ \beta \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ x \in [0,l]\bigr\} \end{gathered}$$

та

$$\begin{gathered} C_{+}^{\infty}[0,\tau] := \bigl\{h \restriction [0,\tau] :\ h \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\} = \\ = \bigl\{v \in C^{\infty}[0,\tau] :\ v^{(\beta)}(0) = 0 \ \text{для всіх}\ \beta \in \mathbb{N}\cup\{0\}\bigr\}. \end{gathered}$$

В роботі функції (та розподіли) вважаються комплекснозначними.

Відображення (6) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ та $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^{\infty}_{+}[0,\tau]\bigr)^{2m}$. Це випливає з результату М. С. Аграновіча та М. І. Вішика [12, теорема 11.1] (див. [34, зауваження 3.3]).

3 Уточнена анізотропна соболєвська шкала

Розглянемо функціональні простори, в яких будемо досліджувати параболічну задачу (2)–(5). Вони утворюють уточнену анізотропну соболєвську шкалу, введену в [34, п. 3]. Показниками гладкості для цих просторів служать два числових параметра і ще один функціональний параметр, який пробігає клас $\mathcal{M}$, що означається наступним чином.

Клас $\mathcal{M}$ складається з усіх функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таких, що:

а) φ вимірна за Борелем на $[1,\infty)$;

б) обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1 < b < \infty$;

в) функція φ повільно змінна функція на нескінченності за Караматою, тобто

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Теорія повільно змінних функцій викладена, наприклад, у монографіях [35, 36]. Важливим прикладом функції, повільно змінної на нескінченності, служить функція

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1}\,(\log\log r)^{\theta_2}\ldots(\underbrace{\log\ldots\log}_{k\ \text{раз}} r\,)^{\theta_k} \quad \text{аргументу} \quad r \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільні параметри.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $\gamma := 1/(2b)$. За означенням, лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ (за обома змінними) є локально сумовним за Лебегом на $\mathbb{R}^2$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^{2}(r_{\gamma}(\xi,\eta))\,|\widetilde{w}(\xi,\eta)|^{2}\,d\xi d\eta < \infty.$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$r_\gamma(\xi,\eta) := \bigl(1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma}\bigr)^{1/2} \quad \text{для довільних} \quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ наділений скалярним добутком

$$(w_1,w_2)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)} := \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))\,\widetilde{w_1}(\xi,\eta)\,\overline{\widetilde{w_2}(\xi,\eta)}\,d\xi d\eta,$$

де $w_1,w_2\in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$. Він породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)} := (w,w)^{1/2}_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)}.$$

Якщо $\varphi(r)\equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ стає анізотропним простором Соболєва порядку $(s,s\gamma)$. Цей простір позначаємо через $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Взагалі, у соболєвському випадку $\varphi(r)\equiv 1$ будемо опускати індекс φ у позначеннях відповідних функціональних просторів.

Кожний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$, де $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, прив'язаний до соболєвських просторів завдяки першим двом числовим параметрам:

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2) \quad \text{для всіх} \quad s_0<s<s_1.$$

З огляду на це клас гільбертових функціональних просторів

$$\bigl\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2):\, s\in\mathbb{R},\,\varphi\in\mathcal{M}\,\bigr\}. \tag{7}$$

названий уточненою анізотропною соболєвською шкалою. Так, якщо $\varphi(r)\to\infty$ (або $\varphi(r)\to 0$) при $r\to\infty$, то φ задає позитивну (або негативну) додаткову гладкість, тобто можна сказати, що φ уточнює основну гладкість $(s,s\gamma)$.

Розглянемо аналоги шкали (7), пов'язані з параболічною задачею, що досліджується. Як і раніше, $s\in\mathbb{R}$ та $\varphi\in\mathcal{M}$.

Покладемо

$$\begin{gathered} H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\mathbb{R}^2) := \bigl\{w\in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2):\, \operatorname{supp} w\subseteq\mathbb{R}\times[0,\infty)\bigr\},\\ H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega) := \bigl\{w\restriction\Omega:\, w\in H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\mathbb{R}^2)\bigr\},\\ \|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)} :=\\ := \inf\bigl\{\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)}:\, w\in H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\mathbb{R}^2),\;\; w=u \text{ в } \Omega\bigr\}, \end{gathered} \tag{8}$$

де $u \in H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)$. Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)$ гільбертів відносно норми (8), а множина $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ щільна у ньому.

Розглянемо ще функціональні простори, до яких будуть належати праві частини граничних умов (3) і (4). За означенням, лінійний простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{h}$ є локально сумовним за Лебегом на $\mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\,\varphi^{2}(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{h}(\xi)|^{2}\,d\xi < \infty.$$

Тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^{2})^{1/2}$. Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$ наділений скалярним добутком

$$(h_1, h_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\,\varphi^{2}(\langle\xi\rangle)\,\widehat{h_1}(\xi)\,\overline{\widehat{h_2}(\xi)}\,d\xi,$$

де $h_1, h_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$, і відповідною нормою $\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} := (h,h)^{1/2}_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})}$. Покладемо

$$\begin{gathered} H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R}) := \bigl\{h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\}, \\ H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau) := \bigl\{h\restriction(0,\tau) : h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})\bigr\}, \\ \|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)} := \inf\bigl\{\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} : h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R}),\;\; h = v \text{ в } (0,\tau)\bigr\}, \end{gathered} \tag{9}$$

де $v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$. Простір $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$ гільбертів відносно норми (9), а множина $C^{\infty}_{+}[0,\tau]$ щільна у ньому.

4 Основні результати

Основні результати статті пов'язані з теоремою про ізоморфізми, які встановлює оператор, відповідний задачі (2)–(5), в уточненій анізотропній соболєвській шкалі. Сформулюємо цю теорему [34, п. 2].

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \;\text{ для всіх }\; j \in \{1,\dots,m\}, \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Зокрема, якщо $m_j \leq 2m-1$ для кожного $j \in \{1,\dots,m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Твердження 1. *Нехай довільно задані дійсне число* $\sigma > \sigma_0$ *і функціональний параметр* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді відображення* (6) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\begin{gathered}(A,B):\ H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)\ \leftrightarrow \qquad (10)\\ \leftrightarrow H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}\bigl(H_{+}^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)\bigr)^2 := \\ := \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}.\end{gathered}$$

Якщо $\varphi \equiv 1$, то оператор (10) діє у соболєвських просторах. Для них твердження 1 було доведено М. С. Аграновічем і М. І. Вішіком [12, теорема 11.1] у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. Їх результат охоплює граничний випадок $\sigma = \sigma_0$ та стосується загальних параболічних задач із, взагалі кажучи, неоднорідними даними Коші.

В силу теореми Аграновіча–Вішика, кожний вектор

$$F := (f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \qquad (11)$$

має єдиний прообраз $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при відображенні (10). Цю функцію u називаємо (узагальненим) розв'язком параболічної задачі (2)–(5) із правою частиною (11).

Негайним наслідком твердження 1 є наступна властивість глобального підвищення гладкості цього розв'язку.

Наслідок 1. *Припустимо, що функція* $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є розв'язком параболічної задачі* (2)–(5), *праві частини якої задовольняють умову*

$$F := (f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$.

Сформулюємо тепер основні результати роботи — теорему про локальне підвищення гладкості розв'язку задачі (2)–(5) та достатню умову неперервності його частинних похідних.

Нехай U є довільна відкрита множина на $\mathbb{R}^2$, яка має непорожній перетин з Ω. Покладемо $\omega := \Omega \cap U$, $\Gamma := \partial\Omega \cap U$ (можливий випадок, коли $\Gamma = \varnothing$) і $\Gamma_k := \{t \in [0,\tau] : (k,t) \in U\}$ для кожного $k \in \{0,\,1\}$.

Для довільних параметрів $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ введемо локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,\varphi}(0,\tau)$ (нагадаємо, що $\gamma := 1/(2b)$). Покладемо

$$H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\omega,\Gamma) := \{u \in D'(\Omega) :$$
$$\chi u \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \text{ для всіх } \chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi \subseteq \omega \cup \Gamma\}$$

та

$$H_{+,\,\mathrm{loc}}^{s,\varphi}(\Gamma_k) := \{h \in D'(0,\tau) :$$
$$\chi h \in H_{+}^{s,\varphi}(0,\tau) \text{ для всіх } \chi \in C^{\infty}[0,\tau] \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi \subseteq \Gamma_k\}.$$

Тут $D'(\Omega)$ і $D'(0,\tau)$ є лінійні топологічні простори усіх розподілів, заданих в плоскій області Ω і в інтервалі $(0,\tau)$ відповідно. Топологія в лінійних просторах $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\omega,\Gamma)$ і $H_{+,\,\mathrm{loc}}^{s,\varphi}(\Gamma_k)$ задається відповідно напівнормами $u \mapsto \|\chi u\|_{H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)}$ і $h \mapsto \|\chi h\|_{H_{+}^{s,\varphi}(0,\tau)}$, де функції χ є ті ж самі, що і в означенні цих просторів.

Теорема 1. *Припустимо, що функція $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є розв'язком параболічної задачі* (2)–(5)*, праві частини якої задовольняють для деяких параметрів $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ умови*

$$f \in H_{+,\,\mathrm{loc}}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\omega,\Gamma), \tag{12}$$

$$g_{j,k} \in H_{+,\,\mathrm{loc}}^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(\Gamma_k) \quad \text{при всіх} \quad k \in \{0,1\}, \quad j \in \{1,\dots,m\}. \tag{13}$$

Тоді $u \in H_{+,\,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\omega,\Gamma)$.

Якщо $\omega = \Omega$ і $\Gamma = \partial\Omega$, то за цією теоремою маємо глобальне підвищення гладкості, тобто наслідок 1. У випадку, коли $\Gamma = \varnothing$, теорема 1 стверджує, що гладкість розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Теорема 2. *Нехай задано ціле число $q \geq 0$. Припустимо, що функція $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є розв'язком параболічної задачі* (2)–(5)*, праві частини якої задовольняють умови* (12) *і* (13)*, де $\sigma = 2bq + b + 1/2$, а функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ є такий, що*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty. \tag{14}$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ і його узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)$, для яких $\alpha+2b\beta\leq 2bq$, всі є неперервними на множині $\omega\cup\Gamma$.

Якщо сформулювати аналог теореми 2 для соболєвської шкали (випадок $\varphi\equiv 1$), то доведеться замінити умову цієї теореми на більш сильну: для правих частин задачі виконуються включення (12) і (13) при деякому $\sigma>2bq+b+1/2$. Це робить результат значно більш грубим.

5 Доведення

Доведення теореми 1. Покажемо спочатку, що для кожного номера $\lambda\in\mathbb{N}$ такого, що $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$, виконується імплікація

$$u\in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b),\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\Gamma)\;\Rightarrow\;u\in H^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b),\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\Gamma). \tag{15}$$

Виберемо довільну функцію $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subseteq\omega\cup\Gamma$. Для неї існує функція $\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta\subseteq\omega\cup\Gamma$ і $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи кожний з диференціальних операторів A і $B_{j,k}$ з оператором множення на функцію χ, можемо записати

$$\begin{aligned}(A,B)(\chi u)&=(A,B)(\chi\eta u)=\chi(A,B)(\eta u)+(A',B')(\eta u)=\\&=\chi(A,B)u+(A',B')(\eta u)=\chi F+(A',B')(\eta u)\quad\text{на}\quad\Omega.\end{aligned} \tag{16}$$

Тут
$$F:=(A,B)u=(f,g_{1,0},g_{1,1},...,g_{m,0},g_{m,1}),$$
а (A',B') є компонентами диференціальний оператор, що діє неперервно у парі просторів

$$(A',B'):\;H^{s,s/(2b),\varphi}_{+}(\Omega)\to\mathcal{H}^{s+1-2m,(s+1-2m)/(2b),\varphi}_{+} \tag{17}$$

для кожного $s\in\mathbb{R}$.

За умовою,
$$\chi F\in\mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}_{+}.$$

Окрім того, на підставі (17) маємо імплікацію

$$\begin{gathered}u\in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b),\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\Gamma)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;(A',B')(\eta u)\in\mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b),\varphi}_{+}.\end{gathered}$$

Звідси в силу (16) і наслідку 1 можемо записати

$$u \in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b),\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\Gamma) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A,B)(\chi u) \in \mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b),\varphi}_{+} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \chi u \in H^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b),\varphi}_{+}(\omega,\Gamma).$$

(Наслідок 1 застосовний, оскільки $\chi u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ за умовою теореми і $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$.) Тим самим, імплікація (15) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ.

Застосуємо цю імплікацію для доведення теореми. Розглянемо окремо випадки нецілого і цілого σ.

Випадок $\sigma\notin\mathbb{Z}$. Тоді існує номер $\lambda_0\in\mathbb{N}$ такий, що $\sigma-\lambda_0<\sigma_0<\sigma-\lambda_0+1$. Застосувавши імплікацію (15) послідовно для значень $\lambda:=\lambda_0$, $\lambda:=\lambda_0-1$,..., $\lambda:=1$, отримаємо

$$u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega) \subset H^{\sigma-\lambda_0,(\sigma-\lambda_0)/(2b),\varphi}_{+}(\Omega) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \in H^{\sigma-\lambda_0+1,(\sigma-\lambda_0+1)/(2b),\varphi}_{+}(\Omega) \Rightarrow \ldots \Rightarrow u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}_{+}(\Omega),$$

що і слід було довести.

Випадок $\sigma\in\mathbb{Z}$. Тут попередні міркування не проходять, бо не існує номер $\lambda_0\in\mathbb{N}$ такий, що $\sigma-\lambda_0<\sigma_0<\sigma-\lambda_0+1$. Але, оскільки $\sigma-1/2\notin\mathbb{Z}$ і $\sigma-1/2>\sigma_0$, то, за доведеним вище, виконується включення $u\in H^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b),\varphi}_{+}(\Omega)$. Тепер, застосувавши імплікацію (15) для $\lambda:=1$, отримаємо

$$u \in H^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b),\varphi}_{+}(\Omega) \subset H^{\sigma-1,(\sigma-1)/(2b),\varphi}_{+}(\Omega) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}_{+}(\Omega),$$

що і треба було довести.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Довільно виберемо точку $x_0\in\omega\cup\Gamma$. Нехай функція $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\chi\subseteq\omega\cup\Gamma$ і $\chi=1$ в деякому околі $V(x_0)\subseteq\overline{\Omega}$ точки x_0. В силу теореми 1 маємо включення $\chi u\in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}_{+}(\Omega)$, де $\sigma=2bq+b+1/2$. Отже, існує функція $w\in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\mathbb{R}^2)$ така, що $w=\chi u=u$ на множині $V(x_0)$.

Виберемо довільні цілі числа $\alpha,\beta\geq 0$ такі, що $\alpha+2b\beta\leq 2bq$. Нам достатньо показати, що узагальнена похідна $D^\alpha_x\partial^\beta_t w(x,t)$ неперервна

на $\mathbb{R}^2$. Оскільки
$$w \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\mathbb{R}^2), \tag{18}$$
то нерівність
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}d\xi d\eta}{r_\gamma^{2\sigma}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))}<\infty \tag{19}$$
тягне за собою неперервність функції $D_x^\alpha\partial_t^\beta w(x,t)$ на $\mathbb{R}^2$. Справді, з формул (18) і (19) випливає в силу нерівності Шварца, що функція $\xi^\alpha\eta^\beta\widetilde{w}(\xi,\eta)$ сумовна на $\mathbb{R}^2$. Тому функція $D_x^\alpha\partial_t^\beta w(x,t)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, як обернене перетворення Фур'є (з точністю до сталої) сумовної функції $\xi^\alpha\eta^\beta\widetilde{w}(\xi,\eta)$.

Безпосередньо перевіряється, що (14) $\Leftrightarrow$ (19) при $\alpha+2b\beta=2bq$ (якщо $\alpha+2b\beta<2bq$, то (14) $\Rightarrow$ (19)). Наведемо потрібні викладки. Нехай $\alpha+2b\beta=2bq$. Виконавши послідовно заміну $\eta=\eta_1^{2b}$, перехід до полярних координат $\xi=\rho\cos\theta$, $\eta_1=\rho\sin\theta$ і ще одну заміну $t=\sqrt{1+\rho^2}$, запишемо наступне:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}d\xi d\eta}{r_\gamma^{2\sigma}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))}=4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\xi^{2\alpha}\eta^{2\beta}d\xi d\eta}{r_\gamma^{2\sigma}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))}=$$
$$=4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\xi^{2\alpha}\eta_1^{4b\beta}}{(1+\xi^2+\eta_1^2)^\sigma\varphi^2\big(\sqrt{1+\xi^2+\eta_1^2}\big)}\,2b\,\eta_1^{2b-1}\,d\xi d\eta_1=$$
$$=8b\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2\alpha}\theta\,\sin^{4b\beta+2b-1}\theta\,d\theta\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\rho^{2(\alpha+2b\beta)+2b}}{(1+\rho^2)^\sigma\varphi^2(\sqrt{1+\rho^2})}\,d\rho=$$
$$=c\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\rho^{4bq+2b}}{(1+\rho^2)^\sigma\varphi^2(\sqrt{1+\rho^2})}\,d\rho=c\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(t^2-1)^{2bq+b-1/2}}{t^{2\sigma-1}\varphi^2(t)}\,dt=$$
$$=c\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(t^2-1)^{\sigma-1}}{t^{2\sigma-1}\varphi^2(t)}\,dt.$$
Тут c — деяке додатне число. Оскільки $\sigma>\sigma_0\geq 2$, то
$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi^2(t)}<\infty\;\Leftrightarrow\;\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(t^2-1)^{\sigma-1}}{t^{2\sigma-1}\varphi^2(t)}\,dt<\infty.$$

Таким чином, (14) $\Leftrightarrow$ (19).

Теорема 2 доведена.

6 Висновки

В статті досліджені властивості розв'язків початково–крайової параболічної задачі (2)–(5) в уточненій соболєвській шкалі. Доведена теорема про локальне підвищення гладкості цих розв'язків (теорема 1). Знайдені нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних розв'язків (теорема 2).

Література

[1] *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. — Москва: Изд. иностр. лит., 1962. — 206 с.

[2] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

[3] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — Москва: Наука, 1964. — 538 с.

[4] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — Москва: Мир, 1971. — 372 с.

[5] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

[6] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — Москва: Мир, 1965. — 380 с.

[7] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

[8] *Agmon S.* Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. — Princeton, N.J.: Van Nostrand Reinhold, 1965. — 292 p.

[9] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

[10] *Schechter M.* Modern methods in partial differential equations. — New York: McGraw-Hill Inc, 1977. — xv+245 p.

[11] *Wloka J. T., Rowley B., Lawruk B.* Boundary value problems for elliptic systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.– 641 p.

[12] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. — 1964. — **19**, № 3. — С. 53–161.

[13] *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. — Кишинев, Штиинца, 1992. — 328 с.

[14] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Москва: Наука, 1967. — 736 с.

[15] *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — Москва: Наука, 1964. — 444 с.

[16] *Friedman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1964. — xiv+347 p.

[17] *Lions J.-L. Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications. — Vol. II. — Berlin: Springer, 1972. — xi+242 p.

[18] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. — Berlin: Springer, 1997. — P. 1–144.

[19] *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. — Berlin: Springer, 1994. — P. 205–316.

[20] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

[21] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.— Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

[22] *Triebel H.* The Structure of Functions. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+425 p.

[23] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[24] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. — 1965. — **20**, № 1. — С. 3–74.

[25] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes: In 3 volumes. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[26] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 3. — С. 352—370.

[27] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 5. — С. 679–701.

[28] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 11. — С. 1536—1555.

[29] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. — 2006. — **3**, № 4. — С. 547—580.

[30] *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Укр. матем. журн. — 2007. — **59**, № 6. — С. 798–814.

[31] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 4. — С. 497—520.

[32] *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold. — Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — **14**, No. 2. — P. 142–158.

[33] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — **6**, No. 2. — P. 211–281.

[34] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. — Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — **19**, No. 2. (arXiv:1304.2552)

[35] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — Москва: Наука, 1985. — 144 с.

[36] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.