Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 235–247

УДК 517.95

О.В. Мартинюк

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці)

Двоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання

alfaolga@rambler.ru

The solvability of the Cauchy problem and the nonlocal two-point on time problems for the evolution equations with operators of generalized differentiation in spaces of infinitely differentiable functions of S type was established.

Встановлено розв'язність задачі Коші та нелокальної двоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання в просторах нескінченно диференційовних функцій типу S.

Вступ

У теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді операторів узагальненого диференціювання та інтегрування скінченного та нескінченного порядків. Різні аспекти цієї проблеми досліджували Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю.Ф. Коробейник, М.І. Нагнибіда, В.В. Напалков, В.П. Подпорін, С.С. Лінчук, В.А. Ткаченко та інші математики. Важливий клас операторів узагальненого диференціювання та інтегрування утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва, введені в середині XX сторіччя при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати математики в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій з топологією компактної збіжності (A_∞ не є нормованим простором, але в той же час A_∞ – простір Фреше). Прикладами інших просторів, елементами яких є цілі функції і які використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними є простори типу S – простори S_α^β, $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$, введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [1], а також простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем [2] (див. також [3]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих використовуються опуклі функції. Топологія вказаних просторів відмінна від топології простору A_∞, функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

В [4] досліджені простори $S_{l_k}^{m_n}$, які будуються за певними послідовностями $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ і котрі є узагальненнями просторів S_α^β, що будуються за послідовностями $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\{n,k\} \subset \mathbb{Z}_+$. У цій роботі встановлюється розв'язність задачі Коші та нелокальної за часом двоточкової задачі для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання в просторах $S_{l_k}^{m_n}$ (у [4] встановлено, що в таких просторах вказані оператори визначені, є лінійними і неперервними). Знайдено зображення розв'язків вказаних задач.

1

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє наступними властивостями [5]:

1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \le m_{n+1}$; $m_0 = 1$;
2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \ge c_\alpha \cdot \alpha^n$;
3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \le M h^n m_n$;
4) $\forall n \in \mathbb{N}$: $m_n^2 \le m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;
5) $\exists A > 0\ \exists L > 0\ \forall \{n,k\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_k \le A L^{n+k} m_{n+k}$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре $m_n = (n!)^\beta$, $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\beta > 0$ – фіксований параметр [5].

Поруч розглянемо послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка також володіє властивостями 1) – 5). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність функцій

$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, котрі задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0\ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}: \ \ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n l_k m_n.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ співпадає з об'єднанням зліченно нормованих просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$; система норм в $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\Big\}.$$

У введених просторах визначені й обмежені (а отже, і неперервні) лінійні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу це оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

Розглянемо послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ спеціального вигляду, а саме, $m_n = n!\rho_n$, $l_k = k!d_k$, де $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – послідовність додатних чисел, яка задовольняє умови: а) послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Послідовність $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ володіє, за припущенням, властивостями, аналогічними властивостям а), б). Зазначимо, що послідовності $\{n!\rho_n\}$, $\{k!d_k\}$ мають властивості 1) – 5) [4].

Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} (k!d_k/|x|^k), & |x| \ge 1; \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} (|y|^n/(n!\rho_n)), & |y| \ge 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$,

$$\exists c_0 > 0\ \exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1): \ \ \rho(x) \ge c_0 e^{c|x|}.$$

Функція γ – невід'ємна, неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, крім того

$$\exists c_0' > 0\ \exists c' > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1): \ \ \gamma(x) \le c_0' e^{-c'|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_k = k^{k(1-\alpha)} = k^k d_k$, $d_k = k^{-k\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то γ задовольняє нерівності [1]:

$$\exp\Big\{ -\frac{(1-\alpha)}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big\} \le \gamma(x) \le C\exp\Big\{ -\frac{(1-\alpha)}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big\},$$

$$C = e^{(1-\alpha)e/2}.$$

Правильним є наступне твердження [4]: *функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists a, b, b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ \ |\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by). \qquad (A)$$

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій φ з простору $S_{l_k}^{m_n}$ до цілих функцій, що задовольняють умову (A), позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Із наведеного твердження випливає, що простір $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ за всіма індексами $a \in \{1/n, n \ge 1\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c\gamma(\overline{a}x)\rho(\overline{b}y), \quad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\Big(a\Big(1-\frac{1}{p}\Big)x\Big)\rho((b+\omega)y)}, \quad p \in \{2,3,\dots\}, \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми еквівалентні нормам $\|\cdot\|_{\delta\rho}$. Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \ge 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \ge 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by), \quad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν.

2

Нагадаємо, що оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва (який позначатимемо символом $D^m(F,\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксоване) у просторі A_R, $0 < R \le +\infty$, – просторі однозначних і аналітичних у крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності, визначається за допомогою фіксованої аналітичної функції $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $F \in A_R$, наступним чином [6]: якщо $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R, то, за означенням,

$$D^m(F,\varphi)(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m}. \tag{1}$$

Відзначимо відомі властивості оператора $D^m(F,\cdot)$ [6]: 1) $D^m(F,\varphi_1 + \varphi_2) = D^m(F,\varphi_1) + D^m(F,\varphi_2)$; 2) $D^m(F,c\varphi) = cD^m(F,\varphi)$, $c = \text{const}$; 3) $D^m(e^z,\varphi) = d^m\varphi/dz^m$; 4) $D^m(F,D^n(F,\varphi)) = D^{m+n}(F,\varphi)$.

Ці властивості вказують на те, що $D^m(F,\varphi)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну порядку m функції φ, породжену функцією $F(z)$ (замість функції e^z).

Нехай $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ – ціла функція, коефіцієнти $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ якої задовольняють умову

$$\exists\alpha > 0\ \exists L > 1\ \forall k \ge m : \ |a_k/a_{k+m}| \le \alpha L^{k+m} \quad (m \in \mathbb{N} \ \text{– фіксоване}). \tag{2}$$

Визначимо оператор узагальненого диференціювання в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ за формулою (1), де $z = x \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ – довільна функція з простору $S_{m_k}^{m_n}$. Так визначений оператор $D^m(F,\cdot)$ для довільно фіксованого $m \in \mathbb{N}$ неперервно відображає простір $S_{m_k}^{m_n}$ в себе [4].

Прикладом оператора $D^m(F,\cdot)$, який діє в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, може служити оператор, побудований за цілою функцією

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{Q(1)Q(2)\ldots Q(k)},$$

де Q – поліном: $Q(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x$, причому $Q(k) \neq 0$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$

(якщо $Q(k)=k$, то $F(z)=e^z$). У цьому випадку [6]

$$D^m(F,\varphi)=\sum_{k=m}^{mp}\Delta_k^{(m)}z^{k-m}\varphi^{(k)},$$

де коефіцієнти $\Delta_k^{(m)}$ мають спеціальний вигляд. Можна також довести, що коефіцієнти a_k, $k\in\mathbb{N}$, задовольняють умову (2) зі сталою $L=\gamma L_0>1$, $\gamma=\max\{1,a_0p\cdot 2^p\}$, $a_0=\max\limits_{1\le i\le p}|a_i|$, $L_0=e^{c_0}>1$, c_0 – деяка додатна стала.

Нехай $g(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mz^m$, $z\in\mathbb{C}$, – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ задано оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку $g(D(F,\cdot))\equiv\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mD^m(F,\cdot)$, якщо для довільної основної функції $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$g(D(F,\varphi))(x):=\sum_{m=0}^{\infty}c_mD^m(F,\varphi)(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

зображає деяку функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Якщо ціла функція g задовольняє умову

$$\exists a,b,c>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ \ |g(z)|\le c\rho(ax)\rho(by),\tag{3}$$

то в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений оператор $A_g:=g(D(F,\cdot)))$, який неперервно відображає $S_{m_k}^{m_n}$ в $S_{m_k}^{m_n}$ [4].

Наприклад, функція $g(z)=e^{tz}$, $z\in\mathbb{C}$, де $t>0$ – фіксований параметр, задовольняє умову (3). Справді, скориставшись властивостями опуклих функцій (функція $\ln\rho$ є опуклою на $(0,\infty)$) знайдемо, що

$$|e^{tz}|\le e^{t|x|}\le ce^{\ln\rho(ax)+\ln\rho(ay)}=c\rho(ax)\rho(ay),z=x+iy\in\mathbb{C},$$

де $a=t\varepsilon$, якщо $t\ge1$, $\varepsilon>0$ – довільне фіксоване число і $a=\varepsilon$, якщо $t\in(0,1)$. Отже, в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{tD(F,\cdot)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^n(F,\cdot),$$

який відображає простір $S_{m_k}^{m_n}$ в себе. У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним також оператор $e^{tP(A)}$, тобто для функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$e^{tP(A)}\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi(x), \tag{4}$$

де $P(A) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k A^k$, $A := D(F, \cdot)$, зображає функцію $\psi = e^{tP(A)}\varphi$, яка при кожному $t > 0$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ [4]. Звідси випливає, що елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ є також функція $P(A)e^{tP(A)}\varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Нехай $S_{k,t,\varphi}$ позначає частинну суму ряду (4). Тоді $S_{k,t,\varphi} \to e^{tP(A)}\varphi$ при $k \to \infty$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$. Отже,

$$P(A)e^{tP(A)}\varphi = P(A) \lim_{k\to\infty} S_{k,t,\varphi} = \lim_{k\to\infty} P(A)S_{k,t,\varphi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi. \tag{5}$$

3

У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{6}$$

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}, \tag{7}$$

де $P(A)$ – оператор, визначений вище.

Під розв'язком задачі (6), (7) розумітимемо функцію $u(t,x)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in [0,T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (6) і початкову умову (7) в тому сенсі, що $u(t,\cdot) \to \varphi_0$ при $t \to +0$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ_0.

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Задача Коші* (6), (7) *розв'язна в просторі* $S_{m_k}^{m_n}$ *(у вказаному розумінні); розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = e^{tP(A)}\varphi_0(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi_0(x).$$

Доведення. Введемо позначення $Q(t,A)\varphi_0 := e^{tP(A)}\varphi_0$,

$$\Phi_{t,\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t, A)\varphi_0(x) - Q(t,A)\varphi_0(x)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t}\Big[\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{n!}\Big] P^n(A)\varphi_0(x).$$

Доведемо, що функція $[0,T] \ni t \to Q(t,A)\varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ (означення абстрактної функції див. в [1]), диференційовна по t у кожній точці $t \in [0,T]$. Зафіксуємо довільно $t_0 \in [0,T]$ і знайдемо елемент $\psi \in S_{m_k}^{m_n}$ такий, що $\Phi_{t_0,\Delta t} \to \psi$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, або, що $\Psi_{t_0,\Delta t} := \Phi_{t_0,\Delta t} - \psi \to 0$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Це означає наступне: сім'я функцій $\{\Psi_{t_0,\Delta t}(z)\}$ рівномірно (по z) збігається до нуля при $\Delta t \to 0$ в будь-якій обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і при цьому справджується оцінка

$$|\Psi_{t_0,\Delta t}(z)| \leq \tilde{c}\gamma(\tilde{a}x)\rho(\tilde{b}y), \gamma = 1/\rho, z = x+iy \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

зі сталими $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} > 0$, не залежними від Δt.

Доведемо, що

$$\psi = P(A)e^{t_0 P(A)}\varphi_0 \equiv Q(t_0, A)\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0.$$

Користуючись теоремою Лагранжа про скінченні прирости знайдемо, що

$$\Psi_{t_0,\Delta t}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_0+\theta\Delta t)^{n-1}}{(n-1)!} P^n(A)\varphi_0(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_0+\theta\Delta t)^{n}}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_0+\theta\Delta t)^{n} - t_0^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0(z), \quad 0 < \theta < 1.$$

Звідси та з (5) випливає, що $\Psi_{t_0,\Delta t} \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ при кожному Δt, тобто нерівність (8) виконується з певними сталими $\tilde{c}$, $\tilde{a}$, $\tilde{b} > 0$, якщо вважати, що $t_0 + \Delta t \leq T$.

Якщо $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область в $\mathbb{C}$, то правильними є нерівності

$$|P^n(A)\varphi_0(z)| \le c\tilde{c}_0^n \omega_0^{p_0 n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c = c(\mathbb{K}) > 0$, $\tilde{c}_0 > 0$, $\omega_0 > 1$ (див. [4]). Крім того, для досить малих значень $|\Delta t|$

$$(t_0 + \theta\Delta t)^n - t_0^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (\theta\Delta t)^k t_0^{n-k} \le \sum_{k=1}^{n} C_n^k |\Delta t|^k T^{n-k} \le$$

$$\le \tilde{T}^n 2^n |\Delta t|, \tilde{T} = \max\{1, T\}.$$

Отже, $|\Psi_{t_0,\Delta t}(z)| \le C|\Delta t|$, $z \in \mathbb{K}$, де $C = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = ce^M$, $M = 2\tilde{c}_0\omega_0^{p_0}\tilde{T}$. Звідси випливає, що $\Psi_{t_0,\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно по $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Цим доведено, що

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tP(A)}\varphi_0(x) = P(A)e^{tP(A)}\varphi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0(x), x \in \mathbb{R},$$

тобто функція $u(t, x) = e^{tP(A)}\varphi_0(x)$ є розв'язком рівняння (6).

Функція $e^{tP(A)}\varphi_0$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, диференційовна по t, а, отже, і неперервна по t у кожній точці $t_0 \in [0, T]$, тобто

$$e^{tP(A)}\varphi_0 \to e^{t_0 P(A)}\varphi_0, \quad t \to t_0,$$

за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$. Зокрема, $e^{tP(A)}\varphi_0 \to \varphi_0$ при $t \to +0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, що й потрібно було встановити.

Якщо $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset S_{m_k}^{m_n}$ і $\varphi_n \to \varphi_0$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, то з властивості неперервності оператора $e^{tP(A)}$ у цьому просторі (при фіксованому $t > 0$) випливає співвідношення

$$u_n = e^{tP(A)}\varphi_n \to e^{tP(A)}\varphi_0 = u, \quad n \to \infty,$$

що й означає неперервну залежність u від φ_0.

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Аналогічний результат має місце у випадку, коли в рівнянні* (6) $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$, *де* $t_0 \ge 0$, *а початкова умова має* *вигляд* $u(t,\cdot)|_{t=t_0} = \varphi_0 \in S^{m_n}_{m_k}$. *Розв'язок такої задачі Коші дається формулою*

$$u(t,x) = e^{(t-t_0)P(A)}\varphi_0(x), \quad (t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}.$$

4

Символом B позначимо оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^p(F,\cdot)$, $p \geq 1$ – фіксоване. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{9}$$

розглянемо нелокальну двоточкову за часом задачу

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \varphi \in S^{m_n}_{m_k}, \tag{10}$$

де $T \in (0,+\infty)$, $\{\mu_1,\mu_2\} \subset (0,\infty)$ – фіксовані числа, $\mu_1 > \mu_2$.

Під розв'язком задачі (9), (10) розуміємо функцію $u(t,x)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in [0,T]$ є елементом простору $S^{m_n}_{m_k}$ і задовольняє рівняння (9); умову (10) $u(t,\cdot)$ задовольняє в тому сенсі, що

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються в просторі $S^{m_n}_{m_k}$; при цьому u неперервно залежить від φ.

Доведемо, що функція, яка зображається рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTB}\varphi :=$ ψ, є елементом простору $S^{m_n}_{m_k}$. Із результатів, наведених у п.п. 2, 3 випливає, що $e^{nTB}\varphi \in S^{m_n}_{m_k}$ при кожному фіксованому $n \in \mathbb{Z}_+$; при цьому справджуються нерівності

$$|e^{nTB}\varphi(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |(B^k\varphi)(z)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |D^{k+p}(F,\varphi)(z)| \leq$$

$$\leq c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \Big(\frac{\beta_1}{\nu_{k+p}}\Big)^{k+p} \gamma(a_1x)\rho(b_1y) \leq$$

$$\leq \tilde{c}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \Big(\frac{\beta_1}{\nu_k}\Big)^k \gamma(a_1x)\rho(b_1y), \quad z = x+iy \in \mathbb{C}, \gamma = 1/\rho,$$

де сталі a_1, b_1, $\beta_1 > 0$ не залежать від k, p, $\tilde{c}_0 = c_0\Big(\dfrac{\beta_1}{\nu_p}\Big)^p$, послідовність $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно зростає (ν_k – розв'язок рівняння $y\mu(y) = k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu(y) = \rho'(y)/\rho(y)$ [4]). Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!}\Big(\frac{\beta_1}{\nu_k}\Big)^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!} = e^{n\alpha} = (e^{\alpha})^n, \quad \alpha = \frac{\beta_1 T}{\nu_1}.$$

Отже,

$$|e^{nTB}\varphi(z)| \le \tilde{c}_0 (e^{\alpha})^n \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y)$$

і

$$|\psi(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{nTB}\varphi(z)|}{\mu^n} \le \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{\alpha}}{\mu}\Big)^n \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y).$$

За умови $\mu > e^{\alpha}$ правильною є нерівність

$$|\psi(z)| \le c_1 \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y), \quad c_1 = \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{\alpha}}{\mu}\Big)^n < \infty.$$

Звідси вже дістаємо, що $\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Отже, $\psi(x)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Із результатів, наведених у п.п. 3 випливає, що функція

$$u(t,x) = \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)B}\varphi(x) = \mu_1^{-1} e^{tB}\psi(x)$$

задовольняє рівняння (9). Доведемо, що ця функція задовольняє також граничну умову (10) у вказаному розумінні.

При доведенні теореми 1 встановлено, що функція $[0,T] \ni t \to e^{tB}\psi$, $\psi \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ диференційовна, а отже, і неперервна в кожній точці $t \in [0,T]$. Отже, граничні співвідношення $\lim\limits_{t\to+0} e^{tB}\psi = \psi$, $\lim\limits_{t\to T-0} e^{tB}\psi = e^{TB}\psi$ справджуються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Тоді для $\mu_1 > \mu_2 e^{\alpha}$ мають місце співвідношення

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} \mu_1^{-1} e^{tB}\psi - \mu_2 \lim_{t\to T-0} \mu_1^{-1} e^{tB}\psi = \psi - \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{TB}\psi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTB}\varphi - \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(T+nT)B}\varphi =$$

$= (\varphi + \mu^{-1}e^{TB}\varphi + \mu^{-2}e^{2TB}\varphi + \dots) - (\mu^{-1}e^{TB}\varphi + \mu^{-2}e^{2TB}\varphi + \dots) = \varphi.$

Цим доведено, що функція $u(t,x) = \mu_1^{-1}e^{tB}\psi(x)$ задовольняє умову (10) у вказаному розумінні.

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо $\mu = \mu_1/\mu_2 > e^{\alpha}$, де $\alpha = \dfrac{\beta_1}{\nu_1}T$, то двоточкова задача (9), (10) розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$; розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = \mu_2^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{-(n+1)}e^{(t+nT)B}\varphi(x) = \mu_2^{-1}e^{tB}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{-(n+1)}e^{nTB}\varphi(x)\Big).$$

Зауваження 2. *Твердження, аналогічне теоремі 2 є правильним і у випадку двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(B)u, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{11}$$

де $P(\lambda)$ – поліном, розглянутий в п.п. 3. Двоточкова задача з граничною умовою вигляду (10) для рівняння (11) розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Розв'язок такої задачі дається формулою

$$u(t,x) = \mu_1^{-1}e^{tP(B)}\psi(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^{-n}e^{nTP(B)}\varphi(x), \quad \{\varphi,\psi\} \subset S_{m_k}^{m_n}.$$

Наведені тут результати анонсовані в праці [4].

Література

[1] *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[2] *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем / Б.Л. Гуревич // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893-896.

[3] *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

[4] *Городецький В.В.* Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання / В.В. Городецький, О.В. Мартинюк // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 7–13.

[5] *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

[6] *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981. – 320 с.