Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 248–259

УДК 517.984, 517.923

В.Н. Молибога

(Інститут математики НАН Украины, Киев)

Характеризация лакун в спектре оператора Хилла с потенциалом–распределением

molyboga@imath.kiev.ua

In the paper we prove theorem about a sweeping out of the gaps in the spectrum of the Hill operator with periodic distributional potential from the negative Sobolev space $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ by the eigenvalues of the Dirichlet boundary-value problems. For this we preliminary prove theorem about oscillation of eigenfunctions of the periodic and antiperiodic boundary-value problems.

В работе доказывается теорема о заметании лакун в спектре оператора Хилла с периодическим потенциалом–распределением из негативного пространства Соболева $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ собственными значениями краевых задач Дирихле. Для этого предварительно доказывается теорема об осцилляции собственных функций периодической и антипериодической краевых задач.

1. Введение и основные результаты

Начиная с классической работы Кронига и Пенни [9] в математической физике появились операторы Хилла–Шредингера с потенциалами, являющимися периодическими обобщенными функциями (распределениями). Дальнейшее развитие квантовой механики стимулировало бурный рост этого научного направления, см., например, библиографию монографий [1, 2], которая насчитывает сотни работ.

Как известно, спектр оператора Хилла–Шредингера, рассматриваемого на всей оси $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру: отрезки спектра перемежаются со спектральными лакунами. Имеется тесная связь между поведением длин спектральных лакун и гладкостью вещественного периодического потенциала, см. работы [3, 4, 5, 6, 8, 21, 14, 15, 17, 20], а также ссылки там.

Отметим тот важный факт, подмеченный еще в работах Ляпунова, Флоке и Блоха, что концы спектральных лакун с четными номерами, являются собственными значениями периодической краевой задачи, а концы спектральных лакун с нечетными номерами являются собственными значениями антипериодической краевой задачи рассмотренных на периоде. Это важное наблюдение, верное и для случая сильно сингулярных потенциалов, позволяет существенно упростить исследование спектра оператора Хилла–Шредингера.

Теорема о заметании лакун в спектре оператора Хилла собственными значениями краевых задач Дирихле позволяет еще более упростить исследование, поскольку дает возможность находить асимптотические оценки концов спектральных лакун, используя соответствующие оценки собственных значений более простых задач Дирихле.

Цель настоящей заметки — доказательство известной для случая L^2-потенциалов теоремы о заметании лакун в спектре оператора Хилла с потенциалом–распределением собственными значениями краевых задач Дирихле.

Перейдем математической постановке задачи. В комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ изучается оператор Хилла, порожденный формальным дифференциальным выражением:

$$\mathrm{l}[y] := -y'' + qy, \tag{1}$$

где потенциал q является вещественнозначной 1-периодической обобщенной функцией из негативного пространства Соболева $H^{-1}(\mathbb{T})$. Тогда, как известно [6, 5], обобщенная функция q может быть представлена в виде:

$$q = Q' + C,$$

где производная понимается в смысле распределений, C является вещественной постоянной, а функция Q принадлежит пространству $L^2(0,1)$. Далее, без потери общности, мы будем предполагать, что

$$C \equiv 0.$$

Следуя А. Савчуку и А. Шкаликову [23, 24] формальное дифференциальное выражение (1) мы определяем как квазидифференциальное:

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[1]} := y' - Qy, \quad y^{[2]} := \left(y^{[1]}\right)' + Qy^{[1]} + Q^2 y,$$

и

$$\mathrm{l}[y] := -y^{[2]}, \quad \mathrm{Dom}(\mathrm{l}) := \left\{ y \,\middle|\, y, y^{[1]} \in AC[0,1] \right\}.$$

Рассмотрим операторы, порожденные выражением (1) с *периодическими* Per^{+} и *антипериодическими* Per^{-} краевыми условиями:

$$Per^{\pm}: \quad y(0) = \pm y(1),\ y^{[1]}(0) = \pm y^{[1]}(1),$$

а также краевыми условиями Дирихле:

$$Dir: \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Введем обозначения:

$$D_M := \left\{ y \in L^2(0,1) \,\middle|\, y, y^{[1]} \in AC[0,1], \mathrm{l}[y] \in L^2(0,1) \right\},$$

и определим соответствующие операторы:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{Per^{\pm}} y \equiv \mathrm{H}_{Per^{\pm}}(q) y &:= \mathrm{l}[y], \\ \mathrm{Dom}(\mathrm{H}_{Per^{\pm}}) &:= \left\{ y \in D_M \,\middle|\, y \in Per^{\pm} \right\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{Dir} y \equiv \mathrm{H}_{Dir}(q) y &:= \mathrm{l}[y], \\ \mathrm{Dom}(\mathrm{H}_{Dir}) &:= \left\{ y \in D_M \,\middle|\, y \in Dir \right\}. \end{aligned}$$

Операторы $\mathrm{H}_{Per^{\pm}}$, H_{Dir} могут быть также определены эквивалентным образом [24, 12, 13, 18, 19]: либо как форм–суммы, либо как пределы последовательностей операторов с гладкими 1-периодическими потенциалами в смысле равномерной резольвентной сходимости.

Отметим, что в случае потенциалов q, принадлежащих $L^2(0,1)$, операторы $\mathrm{H}_{Per^{\pm}}$, H_{Dir} совпадают с хорошо изученными ранее операторами [11, 10, 26].

Известно [24, 12, 13, 4, 5, 18, 19], что операторы $\mathrm{H}_{Per^{\pm}}$, H_{Dir} являются ограниченными снизу самосопряженными операторами с чисто дискретным спектром с единственной предельной точкой на бесконечности. Для их спектров введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^+}(q)) &= \{\lambda_0^+(q), \lambda_k^-(q), \lambda_k^+(q)\}_{k\in 2\mathbb{N}} \equiv \{\lambda_0^+, \lambda_k^-, \lambda_k^+\}_{k\in 2\mathbb{N}},\\
\operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^-}(q)) &= \{\lambda_k^-(q), \lambda_k^+(q)\}_{k\in 2\mathbb{N}-1} \equiv \{\lambda_k^-, \lambda_k^+\}_{k\in 2\mathbb{N}-1},\\
\operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Dir}(q)) &= \{\mu_k(q)\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \equiv \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+},
\end{aligned}
$$

где $2\mathbb{N} = 2, 4, 6, \ldots$, $2\mathbb{N} - 1 = 1, 3, 5, \ldots$ и $\mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \ldots$.

В случае гладких потенциалов хорошо известно (см., например, [10] и ссылки там), что собственные значения операторов $\mathrm{H}_{Per^\pm}$, H_{Dir} удовлетворяют следующим неравенствам:

$$
-\infty < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \le \mu_0 \le \lambda_1^+ < \lambda_2^- \le \mu_1 \le \lambda_2^+ < \lambda_3^- \le \mu_2 \le \lambda_3^+ < \cdots . \tag{2}
$$

Интервалы $[\lambda_{k+1}^-, \lambda_{k+1}^+]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, мы называем *спектральными лакунами* или просто *лакунами*.

Спектры операторов $\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot+t))$, $t \in [0,1)$, остаются неизменными при изменении параметра t:

$$
\operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot))) = \operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot+t))), \quad t \in [0,1), \tag{3}
$$

а собственные значения краевых задач Дирихле $\mu_k(t) := \mu_k(q(\cdot+t))$, оставаясь в соответствующей лакуне:

$$
\mu_k(t) \in [\lambda_{k+1}^-, \lambda_{k+1}^+], \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}
$$

заметают её [10, Теорема I.4.4]: для произвольного $\lambda \in [\lambda_{k+1}^-, \lambda_{k+1}^+]$ найдется значение параметра $t_0 \in [0,1)$ такое, что $\mu_k(t_0) = \lambda$.

Теорема о заметании лакун в спектре оператора Хилла позволяет находить асимптотические оценки концов спектральных лакун, а также их длин, если известны асимптотики собственных значений краевых задач Дирихле. Задача нахождения асимптотических оценок собственных значений Дирихле проще задачи нахождения асимптотических оценок концов спектральных лакун, поскольку краевая задача Дирихле является сильно регулярной по Биркгофу, в то время как периодическая и антипериодическая краевые задачи являясь регулярными, не являются сильно регулярными.

Для случая сильно сингулярных потенциалов $q \in H^{-1}(\mathbb{T})$ неравенства (2) для периодических и антипериодических собственных значений установлены в [14, Теорема C], см. также ссылки там. Равенства

(3) устанавливаются прямыми вычислениями, соотношения (4) устанавливаются предельным переходом (более детально см. ниже Предложение 2).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *При каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ при изменении параметра $t \in [0, 1)$ k-е собственные значения краевых задач Дирихле $\mu_k(t)$ заметают $(k+1)$-ю лакуну $[\lambda^-_{k+1}, \lambda^+_{k+1}]$.*

Работа построена следующим образом. В пункте 2 мы приводим необходимые определения, для случая сильно сингулярных потенциалов $q \in H^{-1}(\mathbb{T})$ мы доказываем соотношения (3) и (4), а также теорему осцилляции для периодической и антипериодической краевых задач. В пункте 3 мы доказываем основную теорему 1 о заметании лакун.

2. Предварительные результаты

В этом пункте для случая сильно сингулярных потенциалов мы доказываем известные для L^2-потенциалов соотношения (2)–(4), а также теорему осцилляции для периодической и антипериодической краевых задач.

Дадим сперва необходимые определения.

Пространства Соболева $H^s(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}$, 1-периодических функций и обобщенных функций (распределений) определяются через свои коэффициенты Фурье:

$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{ f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k2\pi x} \,\middle|\, \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$
$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{T})} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + 2|k|)^{2s} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Мы говорим, что в гильбертовом пространстве H последовательность замкнутых операторов A_n сходится к замкнутому оператору A в смысле равномерной резольвентной сходимости и пишем:

$$\mathrm{A}_n \stackrel{R}{\Longrightarrow} \mathrm{A}, \quad n \to \infty,$$

если резольвентные множества $\mathrm{resolv}(\mathrm{A})$ и $\mathrm{resolv}(\mathrm{A}_n)$, $n \ge n_0$, имеют непустое пересечение и выполнено соотношение:

$$\|(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^{-1} - (\mathrm{A}_n - \lambda \mathrm{I})^{-1}\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при $\lambda \in \operatorname{resolv}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{resolv}(\mathrm{A}_n)$, $n \geq n_0$, [7, 22]. В частности, если операторы A, A_n самосопряжены, то

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\operatorname{Im} \lambda \neq 0\,\} \subset \operatorname{resolv}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{resolv}(\mathrm{A}_n).$$

Предложение 2. *Пусть* $q \in H^{-1}(\mathbb{T})$. *Для операторов* $\mathrm{H}_z(q(\cdot))$ *и* $\mathrm{H}_z(q(\cdot + t))$, $t \in [0, 1)$, *имеют место соотношения* (2)–(4), *где* $z \in \{Per^+,\, Per^-,\, Dir\}$.

Доказательство. Как мы уже отмечали неравенства (2) для периодических и антипериодических собственных значений установлены в [14, Теорема C], см. также ссылки там.

Докажем равенства (3). Пусть $f(\cdot, \lambda)$ — периодическая/антипериодическая собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot)))$. Тогда $f(\cdot + t, \lambda)$ является периодической/антипериодической собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot + t)))$.

Верно и обратное. Если $f(\cdot + t, \lambda)$ — периодическая/антипериодическая собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot + t)))$, то $f(\cdot, \lambda)$ является периодической/антипериодической собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda \in \operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Per^\pm}(q(\cdot)))$. Соотношения (3) доказано.

Далее, покажем, что имеют место соотношения (4).

Пусть
$$q(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{q}(k) e^{i\,2k\pi x} \in H^{-1}(\mathbb{T}),\ \operatorname{Im} q = 0.$$

Положим
$$q_N(x + t) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{q}(k) e^{i\,2k\pi(x+t)}.$$

Тогда $q_N(\cdot + t) \in C^\infty(\mathbb{T})$,

$$q_N(\cdot + t) \overset{H^{-1}(\mathbb{T})}{\longrightarrow} q(\cdot + t), \quad N \to \infty,$$

и [24, 12, 13, 19]

$$\mathrm{H}_z(q_N(\cdot + t)) \overset{R}{\Longrightarrow} \mathrm{H}_z(q(\cdot + t)), \quad N \to \infty. \tag{5}$$

Так как операторы $\mathrm{H}_z(q(\cdot + t))$ и $\mathrm{H}_z(q_N(\cdot + t))$ являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$, в силу

[22, Теорема VIII.23 и Теорема VIII.24] (см. также [7, Теорема IV.2.25 и Теорема VIII.1.14]), из (5) следует, что спектры предельных операторов $\mathrm{H}_z(q(\cdot+t))$ являются непрерывными как сверху так и снизу:

$$\operatorname{spec}(\mathrm{H}_z(q_N(\cdot+t))) \to \operatorname{spec}(\mathrm{H}_z(q(\cdot+t))), \quad N \to \infty. \tag{6}$$

Далее, для операторов $\mathrm{H}_z(q_N(\cdot+t))$, поскольку $q_N(\cdot+t) \in C^\infty(\mathbb{T})$, имеем

$$\mu_j(q_N(\cdot+t)) \in [\lambda^-_{j+1}(q_N(\cdot)), \lambda^+_{j+1}(q_N(\cdot))], \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Теперь, учитывая (6), переходя в (7) к пределу при $N \to \infty$, получаем необходимые соотношения:

$$\mu_j(q(\cdot+t)) \in [\lambda^-_{j+1}(q(\cdot)), \lambda^+_{j+1}(q(\cdot))], \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Предложение доказано. □

Докажем теперь теорему осцилляции для периодической и антипериодической краевых задач для случая потенциалов–распределений, обобщая классический результат [10, Теорема I.4.3].

Введем обозначения. Пусть $\{\eta^+_0(x), \eta^-_k(x), \eta^+_k(x)\}_{k\in 2\mathbb{N}}$ — собственные функции периодической краевой задачи:

$$\mathrm{H}_{Per^+}(q)y = \lambda y,$$

соответствующие собственным значениям $\{\lambda^+_0, \lambda^-_k, \lambda^+_k\}_{k\in 2\mathbb{N}}$, а $\{\xi^-_k(x), \xi^+_k(x)\}_{k\in 2\mathbb{N}-1}$ — собственные функции антипериодической краевой задачи:

$$\mathrm{H}_{Per^-}(q)y = \lambda y,$$

соответствующие собственным значениям $\{\lambda^-_k, \lambda^+_k\}_{k\in 2\mathbb{N}-1}$.

Теорема 3 (о нулях собственных функций). *Для собственных функций периодической и антипериодической краевых задач справедливы утверждения.*

(i) $\eta^+_0(x)$ *не имеет нулей на интервале* $[0,1]$*;*

(ii) $\eta^-_{2k}(x)$ *и* $\eta^+_{2k}(x)$ *имеют в точности* $2k$ *нуля на интервале* $[0,1)$, $k \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\xi^-_{2k-1}(x)$ *и* $\xi^+_{2k-1}(x)$ *имеют в точности* $2k-1$ *нуля на интервале* $[0,1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Замечание 4. *В пунктах* (ii) *и* (iii) *речь идет об интервале* $[0,1)$, *а не об* $[0,1]$, *ибо если* $x=0$ *есть нуль периодического (антипериодического) решения, то* $x=1$ *также нуль и следует учитывать только один нуль.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ линейно независимые решения уравнения

$$l[y]=\lambda y, \tag{8}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(0,\lambda)&=1, & \psi(0,\lambda)&=0,\\ \varphi^{[1]}(0,\lambda)&=0, & \psi^{[1]}(0,\lambda)&=1. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (8) будет иметь вид

$$y(x,\lambda)=C_1\varphi(x,\lambda)+C_2\psi(x,\lambda),$$

причем в случае $\lambda\in\operatorname{spec}(\mathrm{H}_{Dir}(q))$ собственные функции операторов $\mathrm{H}_{Dir}(q)$ с точностью до множителя совпадают с функциями $\{\psi(x,\mu_k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

При доказательстве теоремы 3 мы будем использовать теорему осцилляции для задачи Дирихле $\mathrm{H}_{Dir}(q)y=\lambda y$ [25, Теорема 1], [16, Теорема 4]: собственная функция $\psi(x,\mu_k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, имеет в точности k нулей на интервале $(0,1)$. Также нам будет нужна теорема о перемежаемости [25, Лемма 5], [16, Теорема 1]. Рассмотрим уравнения

$$l[y]=\lambda_1 y,\qquad l[z]=\lambda_2 z,\quad \lambda_1<\lambda_2,$$

и пусть $y(x,\lambda_1)$, $z(x,\lambda_2)$ — соответствующие нетривиальные решения, тогда между двумя последовательными нулями на интервале $[0,1]$ решения $y(x,\lambda_1)$ находится хотя бы один нуль решения $z(x,\lambda_2)$.

Так как $\psi(x,\mu_0)$ не имеет нулей на интервале $(0,1)$ и $\lambda_0^+<\mu_0$ (см. (2)), то $\eta_0^+(x)$ может иметь на $[0,1]$ не более одного нуля, причем $\eta_0^+(0)=\eta_0^+(1)\neq 0$. Но в силу периодичности $\eta_0^+(x)$ должна иметь четное число нулей на $[0,1]$. Поэтому у $\eta_0^+(x)$ нет нулей на интервале $[0,1]$.

Рассмотрим теперь функцию $\eta_{2k+2}^-(x)$. Имеем $\mu_{2k}<\lambda_{2k+2}^-\leq\mu_{2k+1}$. Если $\lambda_{2k+2}^-=\mu_{2k+1}$, тогда $\eta_{2k+2}^-(x)$ с точностью до множителя совпадает с $\psi(x,\mu_{2k+1})$ и, как следствие, имеет, $2k+2$ нулей на интервале $[0,1)$. Пусть теперь $\mu_{2k}<\lambda_{2k+2}^-<\mu_{2k+1}$, тогда $\eta_{2k+2}^-(0)=\eta_{2k+2}^-(1)\neq 0$.

Функция $\psi(x,\mu_{2k})$ имеет $2k+2$ нулей на интервале $[0,1]$. Следовательно, в силу теоремы о перемежаемости, $\eta^{-}_{2k+2}(x)$ имеет на интервале $(0,1)$ не менее $2k+1$ нулей. Далее, функция $\psi(x,\mu_{2k+1})$ имеет на интервале $(0,1)$ $2k+1$ нулей и поэтому, в силу теоремы о перемежаемости, $\eta^{-}_{2k+2}(x)$ может иметь на интервале $(0,1)$ не более $2k+2$ нулей. Учитывая периодичность $\eta^{-}_{2k+2}(x)$ должна иметь четное число нулей на $[0,1)$, т. е., $2k+2$. Для $\eta^{+}_{2k+2}(x)$ и $\xi^{\pm}_{2k-1}(x)$ доказательства аналогичны.

Теорема доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Собственные значения Дирихле $\mu_k(t)$ являются непрерывными функциями от t.*

Доказательство. Несложно показать, что

$$q(x+t_n) \overset{H^{-1}(\mathbb{T})}{\longrightarrow} q(x+t_0) \quad \text{при} \quad t_n \to t_0.$$

Тогда последовательность операторов $\mathrm{H}_{Dir}(q(x+t_n))$ сходится к оператору $\mathrm{H}_{Dir}(q(x+t_0))$ в смысле равномерной резольвентной сходимости [24]. Поэтому, учитывая самосопряженность рассматриваемых операторов, мы в силу [22, Теорема VIII.23, Теорема VIII.24] (см. также [7, Теорема IV.2.25 и Теорема VIII.1.14]) получаем нужный нам результат:

$$\mu_k(t_n) \to \mu_k(t_0) \quad \text{при} \quad t_n \to t_0,$$

т. е., $\mu_k(t)$ является непрерывной функцией от t.

Лемма доказана. □

Напомним (4), что $\mu_k(t)$ не могут выходить за пределы лакун. Так как $\mu_k(t)$ является непрерывной функцией от t, то для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что пределы лакун достигаются.

Рассмотрим, к примеру, нечетную $2k+1$ лакуну:

$$\lambda^{-}_{2k+1} \le \mu_{2k}(t) \le \lambda^{+}_{2k+1}.$$

Пусть x_0 — какой-либо нуль функции $\xi^{-}_{2k+1}(x)$, положим $t := x_0$. Тогда

$$0 = \xi^{-}_{2k+1}(x+x_0)|_{x=0} = -\xi^{-}_{2k+1}(x+x_0)|_{x=1} = 0,$$

т. е., функция $\xi^-_{2k+1}(x+x_0)$ является собственной функцией оператора $\mathrm{H}_{Per^-}(q(\cdot+x_0))$, отвечающая собственному значению λ^-_{2k+1}, а также является собственной функцией оператора $\mathrm{H}_{Dir}(q(\cdot+x_0))$, отвечающая в силу теоремы осцилляции собственному значению $\mu_{2k}(x_0)$, поскольку $\xi^-_{2k+1}(x+x_0)$ имеет $2k$ нуля в интервале $(0,1)$, см. теорему 3. Следовательно $\lambda^-_{2k+1}=\mu_{2k}(x_0)$. Случай правого конца лакуны доказывается аналогичны, только нужно взять функцию $\xi^+_{2k+1}(x)$.

Случай четных лакун доказывается аналогично с привлечением функций $\eta^-_{2k}(x)$, $\eta^+_{2k}(x)$.

Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] S. Albeverio, F.Gesztesy, R.Høegh-Krohn, and H.Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Second edition. With an appendix by Pavel Exner. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.

[2] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger Type Operators*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 271. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[3] P. Djakov, B. Mityagin, *Instability zones of one-dimentional periodic Schrödinger and Dirac operatots* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **61** (2006), no. 4, 77–182; translation in Russian Math. Surveys **61** (2006), no. 4, 663–766.

[4] P. Djakov, B. Mityagin, *Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials*, Dynamics of PDE **6** (2009), no. 2, 95–165.

[5] P. Djakov, B. Mityagin, *Fourier method for one dimentional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, Topics in operator theory, Volume 2, Systems and mathematical physics, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 203, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, 195–236.

[6] R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, *1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials*, Methods Funct. Anal. Topology **7** (2001), no. 4, 31–42.

[7] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, etc., 1995.

[8] E. Korotyaev, *Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions*, Int. Math. Res. Not. **37** (2003), 2019–2031.

[9] R. de L. Kronig, W. Penney, Quantum mechanics of electrons in crystal lattices, Proc. Royal Society (London) A **130** (1931), 499–513.

[10] B. Levitan, E. Sargsyan, *The Sturm–Liouville and Dirack Operators* (Russian), Nauka, Moscow, 1988.

[11] V. Marchenko, *Sturm–Liouville Operators and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. (Russian edition: Naukova Dumka, Kiev, 1977)

[12] V. Mikhailets, V. Molyboga, *The perturbation of periodic and semiperiodic operators by Schwartz distributions* (Russian), Reports of NAS of Ukraine **7** (2006), 26–31.

[13] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators*, Ukrainian Math. J. **59** (2007), no. 6, 785–797.

[14] V. Mikhailets, V. Molyboga, *One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, Methods Funct. Anal. Topology **14** (2008), no. 2, 184–200.

[15] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, Methods Funct. Anal. Topology **15** (2009), no. 1, 31–40.

[16] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Oscillation properties of solutions of the Sturm-Liouvile problem with a singular coefficient* (Russian), Reports of NAS of Ukraine **8** (2010), 20–24.

[17] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps*, Methods Funct. Anal. Topology **17** (2011), no. 3, 235–243.

[18] V. Mikhailets, V. Molyboga, *On a spectrum of singular perturbations of the semiperiodic operators* (Russian), Reports of NAS of Ukraine **11** (2011), 36–43.

[19] V. Mikhailets, V. Molyboga, *On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle* (Russian), Matem. Zametki **91** (2012), no. 4, 629–632; translated in Mathematical Notes **91** (2012), no. 4, 588–591.

[20] V. Mikhailets, V. Molyboga, *Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps*, Spectral theory, mathematical system theory, evolution equations, differential and difference equations, 469–479, Oper. Theory Adv. Appl., **221**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

[21] J. Pöschel, *Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps*, Math. Ann. **349** (2011), no. 2, 433–458.

[22] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*. I. *Functional Analysis*. Second Edition. Academic Press, Inc., New York, etc., 1980.

[23] A. Savchuk, A. Shkalikov, *Sturm–Liouville operators with singular potentials* (Russian), Matem. Zametki **66** (1999), no. 6 897–912; Engl. transl. in Math. Notes **66** (1999), no. 5-6, 741–753 (2000).

[24] A. Savchuk, A. Shkalikov, *Sturm–Liouville operators with distribution potentials* (Russian), Tr. Mosk. Mat. Obs. **64** (2003), 159–212; translation in Trans. Moscow Math. Soc. (2003), 143–192.

[25] A. Shkalikov, Zh. Ben Amara, *Oscillation theorems for Sturm–Liouville problems with distribution potentials* (Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (2009), no. 3, 43–49; translation in Moscow Univ. Math. Bull. **64** (2009) no. 3, 132–137.

[26] A. Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, Mah. Surveys Monogr., vol. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.