Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 260–279

УДК 517.927

Ганна Чеханова

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач

anna0024@i.ua

Найдены достаточные условия непрерывности по параметру решений многоточечных линейных краевых задач для дифференциальных уравнений порядка $m \geqslant 2$ по нормам пространств непрерывно дифференцируемых функций $C^{(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова и фразы: многоточечная краевая задача, непрерывность по параметру.

1 Введение и основной результат

Исследование зависимости решений краевых задач от параметра относится к традиционным направлениям теории ОДУ. Для многоточечных краевых задач наиболее полно изучена зависимость решений от параметра в равномерной норме $\|\cdot\|_{(0)}$. В недавних работах [2 - 4] найдены достаточные условия непрерывной зависимости решений такого рода задач по параметру по более сильным нормам соболевских пространств W_p^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$. В данной работе эти результаты переносятся на нормы $\|\cdot\|_{(n)}$ пространств $C^{(n)}$.

Пусть $k-1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим на конечном интервале (a, b) разбиение

$$a =: a_1 < a_2 < \ldots < a_k := b$$

и связанную с ним неоднородную k-точечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения порядка $m \geqslant 2$:

$$y^{(m)}(t) + p_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + p_0(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \beta_{j_{r,i}} y^{(r-1)}(a_j) = c_{r-1}, \tag{2}$$

где коэффициенты $p_{r-1}(\cdot)$ и правая часть уравнения $f(\cdot)$ принадлежат функциональному пространству $C^{(n-1)}([a,b];\mathbb{C}) =: C^{(n-1)}$, числа c_{r-1} и $\beta_{j_{r,i}} \in \mathbb{C}$, а $r, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\} =: J$.

В сделанных нами предположениях решение задачи (1) – (2) принадлежит функциональному классу $C^{(n+m-1)}$.

Пусть теперь все коэффициенты и правые части (1) – (2) зависят от числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим семью неоднородных многоточечных краевых задач вида

$$y^{(m)}(t;\varepsilon) + p_{m-1}(t;\varepsilon)y^{(m-1)}(t;\varepsilon) + \ldots.. + p_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \beta_{j_{r,i}}(\varepsilon) y^{(r-1)}(a_j;\varepsilon) = c_{r-1,\varepsilon}, \quad j \in J \tag{4}$$

где параметры задачи удовлетворяют тем же предположениям, что и в задаче (1) – (2). В этом случае решения задач (3) – (4) также будут зависеть от параметра ε.

Будем считать далее, что выполняется

Предположение $\mathcal{I}$. *Однородная предельная краевая задача*

$$y^{(m)}(t;0) + p_{m-1}(t;0)y^{(m-1)}(t;0) + \ldots + p_0(t;0)y(t;0) = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \beta_{j_{r,i}}(0) y^{(r-1)}(a_j;0) = 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{6}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1.1 *Пусть выполняется предположение $\mathcal{I}$ и при $\varepsilon \to 0+$ условия:*

1) $\|p_{j-1}(\cdot;\varepsilon) - p_{j-1}(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad j \in J;$

2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$;
3) $c_{r-1,\varepsilon} \to c_{r-1,0}, \quad r = \overline{1,m}$;
4) $\beta_{j_{r,i}}(\varepsilon) \to \beta_{j_{r,i}}(0), \quad r,i = \overline{1,m}, \quad j \in J$;

тогда для достаточно малых ε, решения $y(\cdot;\varepsilon)$ задач, которые задаются (3) – (4), однозначно определены и удовлетворяют предельное соотношение

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{(n+m-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

2 Матричная задача Коши

Для доказательства основной теоремы нам потребуются некоторые результаты для систем ОДУ первого порядка.

Пусть $Y(t)$ — единственное решение (матрицант) линейного матричного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \in (a,b), \tag{7}$$

с начальным условием в некоторой фиксированой точке

$$Y(t_0) = I_m, \quad t_0 \in [a,b], \tag{8}$$

где комплекснозначный коэффициент $A(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}) =: (C^{(n-1)})^{m\times m}$, а I_m — единичная $(m \times m)$-матрица.

Введем метрическое пространство невырожденых матриц-функций

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{t_0} := \{Y(t) \in (C^{(n)})^{m\times m} : Y(t_0) = I_m, \det Y(t) \neq 0\}$$

с метрикой $d_{(n)}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{(n)}$, которая не зависит от выбора точки t_0.

Для доказательства основной теоремы нам потребуется

Теорема 2.1 *Нелинейное отображение*

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$$

в задаче (7) – (8), является гомеоморфизмом банахового пространства $(C^{(n-1)})^{m\times m}$ на метрическое пространство $\mathcal{Y}^{(n)}_{t_0}$ при всех рассматриваемых значениях параметров n, m и t_0.

Доказательство теоремы 2.1 разделим на три части.

1. Докажем сначала, что нелинейное отображение

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$$

пространства $(C^{(n-1)})^{m\times m}$ на метрическое пространство $\mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}$ является биекцией при всех значениях параметров n, m и t_0.

Доказательство этого утверждения в свою очередь разделим на две части.

1.1. Покажем, что в условиях теоремы матрицант $Y(\cdot) \in (C^{(n)})^{m\times m}$.

Этот факт докажем методом математической индукции.

a) Пусть $n = 1$. Тогда матрица-функция $A(t) \in (C)^{m\times m}$.

Поскольку существует $Y'(t)$, то функция $Y(t)$ является дифференцируемой, а значит и непрерывной. Тогда произведение $A(t)\cdot Y(t)$ будет принадлежать пространству $(C)^{m\times m}$. Из равенства (7) получаем, что и $Y'(t) \in (C)^{m\times m}$, а значит, $Y(t) \in (C^{(1)})^{m\times m}$.

b) Допустим, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k$, тогда, если $A(t) \in (C^{(k-1)})^{m\times m}$, то $Y(t) \in (C^{(k)})^{m\times m}$.

c) Докажем теперь его для $n = k + 1$. Пусть $A(t) \in (C^{(k)})^{m\times m}$. По предположению, сделанному выше, матрицант $Y(t) \in (C^{(k)})^{m\times m}$. Тогда произведение $A(t) \cdot Y(t)$ будет принадлежить пространству $(C^{(k)})^{m\times m}$. Из равенства (7) следует, что $Y'(t) \in (C^{(k)})^{m\times m}$, а $Y(t) \in (C^{(k+1)})^{m\times m}$. То есть, данное утверждение верно для произвольного значения n.

Теперь установлено, что существует решение линейного дифференциального уравнения (7), которое удовлетворяет условию (8) и принадлежит пространству $(C^{(n)})^{m\times m}$. Из равенства (7) и того факта, что решение задачи Коши существует и является единственным, получаем, что матричная функция $Y(t) \in \mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}$ и однозначно определяется через коэффициент $A(t) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$.

1.2. Теперь покажем, что коэффициент $A(t)$ линейного дифференциального уравнения (7) однозначно определяется через решение $Y(t) \in \mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}$, которое удовлетворяет при этом условию (8).

Соответственно с формулой Лиувилля–Якоби

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot \exp \int\limits_{t_0}^{t} spA(s)ds = \det I_m \cdot \exp \int\limits_{t_0}^{t} spA(s)ds \neq 0.$$

Учитывая, что $Y^{-1}(\cdot)$ существует и принадлежит пространству $(C^{(n)})^{m\times m}$, уравнение (7) можно переписать в таком виде:

$$A(t) = Y'(t)\cdot Y^{-1}(t). \tag{9}$$

Так как $Y(t) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, то производная $Y'(t) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$ и, опираясь на равенство (9), матрица-функция $A(t)$ будет принадлежать $(C^{(n-1)})^{m\times m}$.

Этим первая часть теоремы 2.1 доказана.

2. Теперь покажем, что решение $Y(t) \in \mathcal{Y}^{(n)}_{t_0}$ уравнения (7) с начальным условием (8) непрерывно зависит от коэффициента $A(t) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$ при всех значениях параметров n, m и t_0.

Докажем этот факт методом математической индукции.

а) Пусть $n = 1$. Необходимо показать непрерывную зависимость решения $Y(t) \in \mathcal{Y}^{(1)}_{t_0}$ уравнения (7) от коэффициента $A(t) \in (C)^{m\times m}$.

Рассмотрим для этого параметризованное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство матричных задач вида

$$Y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{10}$$

$$Y(t_0;\varepsilon) = I_m, \quad t_0 \in (a,b), \tag{11}$$

где $A(\cdot;\varepsilon) \in (C)^{m\times m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть при $\varepsilon \to 0+$ выполняется условие

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(0)} \to 0. \tag{12}$$

Покажем, что при условии (12) решения задач (10) – (11) однозначно определяются и удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{13}$$

Так как норму в пространствах $(C^{(n)})^{m\times m}$ можно представить

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(n)} := \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(n-1)} + \\ + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{(n-1)}, \tag{14}$$

то в пространстве $(C^{(1)})^{m\times m}$ получим

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(1)} = \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(0)} + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{(0)}.$$

Тогда для доказательства соотношения (13) достаточно показать, что

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{(0)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+ \tag{15}$$

и

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{(0)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{16}$$

Докажем сначала (15). Проинтегрируем уравнение (10) и, учитывая условие (11), получаем

$$Y(t;\varepsilon)=I_m+V_{A,\varepsilon}Y(t;\varepsilon),$$

или

$$(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})Y(t;\varepsilon)=I_m, \tag{17}$$

где интегральный оператор $V_{A,\varepsilon}$ определен равенством

$$V_{A,\varepsilon}Y(t;\varepsilon)=\int\limits_{t_0}^{t}A(s;\varepsilon)Y(s;\varepsilon)ds.$$

Решение уравнения (17) существует и единственно, т. к. оператор V_A является квазинильпотентным (см. [4]). Поэтому оператор $(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})$, который взаимно однозначно отображает пространство $(C)^{m\times m}$ на все пространство $(C)^{m\times m}$, имеет обратный оператор $(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})^{-1}$.

Из равенства (17) находим

$$Y(t;\varepsilon)=(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})^{-1}I_m.$$

Учитывая последнее равенство и соотношение (см. [4])

$$\|(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})^{-1}-(\mathbf{1}-V_{A,0})^{-1}\|\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

получаем, что при $\varepsilon\to 0+$

$$\|Y(t;\varepsilon)-Y(t;0)\|_{(0)}\leqslant\|(\mathbf{1}-V_{A,\varepsilon})^{-1}-(\mathbf{1}-V_{A,0})^{-1}\|\cdot\|I_m\|_{(0)}\to 0.$$

Этим соотношение (15) доказано.

Рассмотрим теперь (16). Оценим норму

$$\|Y'(t;\varepsilon)-Y'(t;0)\|_{(0)}=\|A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon)-A(t;0)Y(t;0)\|_{(0)}\le$$

$$\le\|A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon)-A(t;\varepsilon)Y(t;0)\|_{(0)}+\|A(t;\varepsilon)Y(t;0)-A(t;0)Y(t;0)\|_{(0)}\leqslant$$

$$\leqslant \|A(t;\varepsilon)\|_{(0)} \cdot \|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\|_{(0)} + \|A(t;\varepsilon) - A(t;0)\|_{(0)} \cdot \|Y(t;0)\|_{(0)}.$$

Из этого, учитывая (12) и соотношение (15), получаем, что выполняется (16).

Соотношение (13) доказано.

b) Допустим, что доказываемый факт выполняется для случая $n = k$, и решение $Y(t) \in \mathcal{Y}_{t_0}^{(k)}$ уравнения (7) непрерывно зависит от коэффициента $A(t) \in (C^{(k-1)})^{m\times m}$. Тогда при

$$\|A(t;\varepsilon) - A(t;0)\|_{(k-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$$

выполняется

$$\|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\|_{(k)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

c) Докажем теперь справедливость этого утверждения для $n = k+1$. Пусть при $\varepsilon \to 0+$ выполняется следующее условие

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(k)} \to 0. \tag{18}$$

Покажем, что если справедливо соотношение (18), то решения задач, заданных уравнениями (10)–(11), будут удовлетворять соотношению

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{(k+1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{19}$$

Так как выполняется (18), то, тем более, имеет место

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(k-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

а, значит, по предположению, сделанному на предыдущем этапе, выполняется предельное соотношение

$$\|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\|_{(k)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Из (10) следует следующая оценка

$$\|Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)\|_{(k)} = \|A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) - A(t;0)Y(t;0)\|_{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \|A(t;\varepsilon) - A(t;0)\|_{(k)}\|Y(t;\varepsilon)\|_{(k)} +$$

$$+\|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\|_{(k)}\|A(t;0)\|_{(k)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Из предыдущего и только что доказанного соотношения получаем

$$\|Y(t;\varepsilon)-Y(t;0)\|_{(k+1)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+.$$

В результате имеем, что, как только

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+,$$

то

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+. \tag{20}$$

Часть 2 теоремы 2.1 доказана.

3. Осталось показать, что коэффициент $A(t)\in(C^{(n-1)})^{m\times m}$ уравнения (7) с начальным условием (8) непрерывно зависит от решения $Y(t)\in\mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}$ при всех значениях параметров n, m и t_0.

Рассмотрим семейство краевых задач, заданных уравнениями (10) – (11). Пусть для однозначно определённых решений этих задач выполняется предельное соотношение (20).

Покажем, что

$$\|A(t;\varepsilon)-A(t;0)\|_{(n-1)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+. \tag{21}$$

Умножая левую и правую части уравнения (10) на $X^{-1}(t;\varepsilon)$, получаем

$$A(t;\varepsilon)=Y'(t;\varepsilon)Y^{-1}(t;\varepsilon).$$

тогда

$$\begin{gathered}\|A(t;\varepsilon)-A(t;0)\|_{(n-1)}\leqslant\|Y'(t;\varepsilon)Y^{-1}(t;\varepsilon)-Y'(t;0)Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)}\leq\\ \leq\|Y'(t;\varepsilon)Y^{-1}(t;\varepsilon)-Y'(t;\varepsilon)Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)}+\\ +\|Y'(t;\varepsilon)Y^{-1}(t;0)-Y'(t;0)Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)}\leq\\ \leq\|Y'(t;\varepsilon)\|_{(n-1)}\cdot\|Y^{-1}(t;\varepsilon)-Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)}+\\ +\|Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)}\cdot\|Y'(t;\varepsilon)-Y'(t;0)\|_{(n-1)}, \quad \varepsilon\to 0+.\end{gathered}$$

Учитывая (20) и соотношение (14) получаем, что

$$\|Y'(t;\varepsilon)-Y'(t;0)\|_{(n-1)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+. \tag{22}$$

Также выполняется

$$\|Y(t;\varepsilon)-Y(t;0)\|_{(n-1)}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+,$$

и, опираясь на тот факт, что *отображение* $S \to S^{-1}$ *является непрерывным по норме банаховой алгебры на множестве обратимых элементов* (см., например [1]), получаем

$$\|Y^{-1}(t;\varepsilon) - Y^{-1}(t;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{23}$$

Учитывая (22), (23), получаем, что выполняется соотношение (21).

Таким образом, часть 3 доказана и вместе с ней и теорема 2.1. □

3 Многоточечная краевая задача для систем

Рассмотрим неоднородную векторную краевую задачу

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in (a,b), \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j y(a_j) = c, \tag{25}$$

где матрица-функция $A(\cdot) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$, матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, вектор-функция $f(\cdot) \in (C^{(n-1)})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а числа $\{a_j\}_{j=1}^k$ образуют разбиение интервала (a,b).

Введем параметр $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$, и рассмотрим параметризованную числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ семью неоднородных многоточечных краевых задач для системы m дифференциальных уравнений

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon) y(a_j;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{27}$$

В данном случае и решение $y(\cdot)$ задач, заданных уравнениями (26) – (27), будет зависеть от параметра.

Будем далее везде предполагать, что имеет место

Предположение $\mathcal{E}$. *Однородная предельная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(0)y(a_j;0) = 0 \qquad (29)$$

имеет лишь тривиальное решение.

Данное условие равносильно тому, что предельная неоднородная краевая задача

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0) + f(t;0), \quad t \in [a,b], \qquad (30)$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(0)y(a_j;0) = c_0, \qquad (31)$$

имеет одно решение при любых значениях вектор-функции $f(t;0) \in (C^{(n-1)})^m$ и векторе $c_0 \in \mathbb{C}^m$.

Ключевую роль в доказательстве основной теоремы играет

Теорема 3.1 *Пусть выполняется предположение* $\mathcal{E}$, *а также при* $\varepsilon \to 0+$ *такие условия:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$,
2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$,
3) $c_\varepsilon \to c_0$,
4) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0, \quad j = \{1, 2, \ldots, k\}$;

тогда для достаточно малых ε *семейство краевых задач, заданных уравнениями (26) – (27), имеют единственное решение и*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \qquad (32)$$

Далее рассмотрим леммы, на которых основывается доказательство теоремы 3.1.

Для задач, заданных уравнениями (26) – (27), будет справедлива такая лемма.

Лемма 3.1 *Если выполняется предположение* $\mathcal{E}$ *и условия 1) и 4) теоремы 3.1, то для достаточно малых* ε

$$\det[B_1(\varepsilon) + \sum_{j=2}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)] \neq 0.$$

Доказательство леммы 3.1.

Из условия 1) теоремы 3.1 и теоремы 2.1 следует, что

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{(0)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{33}$$

В силу условия 4) теоремы 3.1 имеем

$$\begin{aligned}&\|\sum_{j=1}^{k}B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)-\sum_{j=1}^{k}B_j(0)Y(a_j;0)\|\le\\ &\quad\le\sum_{j=1}^{k}\|B_j(\varepsilon)-B_j(0)\|\|Y(a_j;\varepsilon)\|_{(0)}+\\ &\quad\quad+\sum_{j=1}^{k}\|B_j(0)\|\|Y(a_j;\varepsilon)-Y(a_j;0)\|_{(0)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

Так как, учитывая предположение $\mathcal{E}$,

$$\det[B_1(0)+\sum_{j=2}^{k}B_j(0)Y(a_j;0)]\ne 0,$$

то из последней оценки следует, что в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ непрерывная функция

$$\det[B_1(\varepsilon)+\sum_{j=2}^{k}B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]\ne 0. \tag{34}$$

Лемма 3.1 доказана. □

Рассмотрим вместе с исходной неоднородной краевой задачей (26) - (27) относительно вектор-функции $y(t;\varepsilon)$ ещё три векторные краевые задачи:

$$v'(t;\varepsilon)=A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon),\quad \sum_{j=1}^{k}B_j(\varepsilon)v(a_j;\varepsilon)=c_\varepsilon, \tag{35}$$

$$x'(t;\varepsilon)=A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon)+f(t;\varepsilon),\quad x(a;\varepsilon)\equiv 0, \tag{36}$$

$$w'(t;\varepsilon)=A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon)+f(t;\varepsilon),\quad \sum_{j=1}^{k}B_j(\varepsilon)w(a_j;\varepsilon)\equiv 0. \tag{37}$$

Как известно, краевая задача (36) (задача Коши) всегда имеет решение, которое является единственным.

Лемма 3.2 *Если выполняется предположение $\mathcal{E}$, то каждая из задач: (26) – (27), (35), (37) при достаточно малых значениях параметра ε имеет ровно одно решение в пространстве $(C^{(n)})^m$.*

Доказательство леммы 3.2 заключается в проверке единственности решений соответствующих задач. Для этого достаточно показать, что при достаточно малых ε однородная краевая задача

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon), \quad \sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(a_j;\varepsilon) = 0,$$

имеет лишь тривиальное решение.

Каждое из решений однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon, \quad \widetilde{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

где $Y(t;\varepsilon)$ – матрицант этого уравнения. Из этого, учитывая однородность краевого условия получаем:

$$[\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0.$$

Учитывая теорему 2.1 и непрерывность при $\varepsilon = 0$ матриц B_j, следует, что квадратные матрицы $[B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]$ непрерывно зависят от параметра ε, а это значит, что и их конечная сумма также будет непрерывно зависеть от параметра.

Кроме этого, основываясь на предположение $\mathcal{E}$,

$$\det[B_1(0) + \sum_{j=2}^{k} B_j(0)Y(a_j;0)] \neq 0.$$

Поэтому в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ предельная функция

$$\det[B_1(\varepsilon) + \sum_{j=2}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)] \neq 0.$$

Из этого следует, что в этой окрестности $\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0$ и, таким образом, лемма 3.2 доказана. □

Из леммы 3.2 следует, что при малых ε справедливо такое представление

$$y(t;\varepsilon) = v(t;\varepsilon) + w(t;\varepsilon). \tag{38}$$

Исследуем такие соотношения:

$$\|v(t;\varepsilon) - v(t;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{39}$$

$$\|w(t;\varepsilon) - w(t;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{40}$$

Лемма 3.3 *Пусть выполняется предположение $\mathcal{E}$ и при $\varepsilon \to 0+$ условия*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$,
2) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0, \quad j = \{1, 2, \ldots, k\}$
3) $c_\varepsilon \to c_0$;

тогда справедливо предельное соотношение (39).

Доказательство леммы 3.3.

Первое из равенств задачи (35) дает нам, что

$$v(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая второе из равенств (35), получаем

$$[\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]\widetilde{c}_\varepsilon = c_\varepsilon.$$

Учитывая теорему 2.1, лемму 3.2 и условие 2) этой леммы, имеем

$$\|(\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)) - (\sum_{j=1}^{k} B_j(0)Y(a_j;0))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|B_1(\varepsilon)Y(a_1;\varepsilon) - B_1(0)Y(a_1;0)\| +$$

$$+ \|B_2(\varepsilon)Y(a_2;\varepsilon) - B_2(0)Y(a_2;0)\| + \ldots +$$

$$+ \|B_k(\varepsilon)Y(a_k;\varepsilon) - B_k(0)Y(a_k;0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Кроме того, по условию $c_\varepsilon \to c_0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0+$ получаем, что $\widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$. Из этого следует необходимое нам соотношение (39). Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4 *Пусть при $\varepsilon \to 0+$ имеют место следующие условия:*
1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$;
2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0$;
3) $c_\varepsilon \to c_0$,

тогда для задач (36) выполняется

$$\|x(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{41}$$

Доказательство леммы 3.4.

Определим вектор-функции

$$x(t;\varepsilon) := (x_1(t;\varepsilon), x_2(t;\varepsilon), \dots, x_m(t;\varepsilon)) \in (C^{(n)})^m$$

и

$$f(t;\varepsilon) := (f_1(t;\varepsilon), f_2(t;\varepsilon), \dots, f_m(t;\varepsilon)) \in (C^{(n-1)})^m,$$

матрицы-функции

$$X(t;\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ x_2(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in (C^{(n)})^{m\times m}$$

и

$$F(t;\varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in (C^{(n)})^{m\times m}.$$

Тогда задачи (36) будут эквивалентны матричным задачам Коши вида

$$X'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)X(t;\varepsilon) + F(t;\varepsilon), \tag{42}$$

$$X(a;\varepsilon) = 0. \tag{43}$$

Избавимся от неоднородности в дифференциальном уравнении (42) за счет увеличения размерности фазового пространства. А именно, вместо задач (42) – (43), рассмотрим задачи для матриц-функций порядка $2m$

$$W'(t;\varepsilon) = A_F(t;\varepsilon)W(t;\varepsilon), \tag{44}$$

$$W(a;\varepsilon) = I_{2m}, \tag{45}$$

где матрица $A_F(t;\varepsilon)$ имеет вид

$$A_F(t;\varepsilon) := \begin{pmatrix} A(t;\varepsilon) & F(t;\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in (C^{(n-1)})^{2m\times 2m}. \tag{46}$$

Из условий 1), 2) леммы 3.4 получаем, что

$$\|A_F(\cdot;\varepsilon) - A_F(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Таким образом, учитывая теорему 2.1 о гомеоморфизмах, следует, что

$$\|W(t;\varepsilon) - W(t;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{47}$$

Рассмотрим тепер матричную задачу

$$Z'(t;\varepsilon) = A_F(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \tag{48}$$

$$Z(a;\varepsilon) = C_\varepsilon, \tag{49}$$

где $Z(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n)})^{2m\times 2m}, \quad C_\varepsilon \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$.

С помощью матрицанта $W(\cdot;\varepsilon)$ решение $Z(t;\varepsilon)$ задачи, которая задается уравнениями (48) – (49), может быть представлено в таком виде

$$Z(t;\varepsilon) = W(t;\varepsilon)C_\varepsilon.$$

Тогда для любой семьи матриц $C_\varepsilon \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ таких, что $C_\varepsilon \to C_0$ при $\varepsilon \to 0+$, и учитывая соотношение (47), получаем

$$\begin{aligned} &\|Z(t;\varepsilon) - Z(t;0)\|_{(n)} \leqslant \\ &\quad \leqslant \|W(t;\varepsilon) - W(t;0)\|_{(n)} \cdot \|C_\varepsilon\| + \\ &\qquad + \|W(t;0)\|_{(n)} \cdot \|C_\varepsilon - C_0\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \end{aligned} \tag{50}$$

Из равенства (48), учитывая условие (49), находим

$$Z(\cdot;\varepsilon) = \begin{pmatrix} X(\cdot;\varepsilon) & 0 \\ I_m & 0 \end{pmatrix} C_\varepsilon.$$

Таким образом, согласно предельному соотношению (50) получаем, что

$$\|X(t;\varepsilon) - X(t;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{51}$$

а это равносильно выполнению предельному соотношению (41). Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5 *При условиях теоремы 3.1 справедливо предельное соотношение (40).*

Доказательство леммы 3.5. Примем

$$u(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - w(t;\varepsilon).$$

Тогда вектор-функция $u(t;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} u'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon), \\ \sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)u(a_j;\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)x(a_j;\varepsilon) =: \widetilde{c}_\varepsilon. \end{gathered} \tag{52}$$

Первое из равенств задачи (52) приводит к тому, что

$$u(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\overline{c}_\varepsilon, \quad \overline{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

Отсюда, учитывая второе равенство задачи (52), получаем, что

$$[\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]\overline{c}_\varepsilon = \widetilde{c}_\varepsilon$$

Принимая во внимание теорему 2.1, лемму 3.2 и четвертое условие теоремы 3.1, следует

$$\|(\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)) - (\sum_{j=1}^{k} B_j(0)Y(a_j;0))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|B_1(\varepsilon)Y(a_1;\varepsilon) - B_1(0)Y(a_1;0)\| +$$

$$+\|B_2(\varepsilon)Y(a_2;\varepsilon) - B_2(0)Y(a_2;0)\| + \ldots +$$

$$+\|B_k(\varepsilon)Y(a_k;\varepsilon) - B_k(0)Y(a_k;0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

поэтому $\widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$ при $\varepsilon \to 0+$. А тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\overline{c}_\varepsilon \to \overline{c}_0.$$

Из этого следует, что

$$\|u(t;\varepsilon) - u(t;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{53}$$

Из соотношения $w(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - u(t;\varepsilon)$ и уже доказанных (41) и (53) получаем (40). Этим лемма 3.4 доказана. □

Справедливость теоремы 3.1 следует из лемм 3.3, 3.5. Так как является справедливым соотношение (38), а это, в свою очередь, значит, что выполняется (32).

Таким образом, теорема 3.1 доказана. □

4 Доказательство основной теоремы

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется

Лемма 4.1 *Неоднородная многоточечная краевая задача для линейного дифференциального уравнения порядка m которая задается уравнениями (1) – (2), эквивалентна неоднородной многоточечной краевой задаче для системы m дифференциальных уравнений первого порядка вида*

$$\hat{Y}'(t) = \hat{P}(t)\hat{Y}(t) + \hat{F}(t), \quad t \in (a,b), \tag{54}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j \hat{Y}(a_j) = \hat{c}. \tag{55}$$

где квадратные матрицы

$$\hat{P}(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0(\cdot) & -p_1(\cdot) & -p_2(\cdot) & \dots & -p_{m-2}(\cdot) & -p_{m-1}(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

принадлежат $(C^{(n-1)})^{m\times m}$

$$B_j = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \dots & \beta_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \tag{57}$$

векторы

$$\hat{F}(\cdot) = (0, 0, \dots, 0, f(\cdot)) \in (C^{(n-1)})^m \tag{58}$$

$$\hat{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) \in \mathbb{C}^m. \tag{59}$$

Доказательство леммы 4.1.

Поставим в соответствие уравнению (1) систему уравнений первого порядка следующим образом

$$y(t) = y_1(t), \quad y'(t) = y_1'(t) = y_2(t), \quad y''(t) = y_2'(t) = y_3(t),$$
$$\dots, \quad y^{(m-1)}(t) = y_{m-1}'(t) = y_m(t), \quad y_i \in (C^{(n)})^{m\times m}. \tag{60}$$

После замены получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = y_3(t), \\ y_3'(t) = y_4(t), \\ \dots \\ y_{m-1}'(t) = y_m(t), \\ y_m'(t) = -p_0(t)y_1(t) - p_1(t)y_2(t) - \dots - p_{m-2}(t)y_{m-1}(t) - \\ \qquad -p_{m-1}(t)y_m(t) + f(t), \end{cases} \tag{61}$$

которая эквивалентна уравнению (1).

Действительно, допустим, что функция $y = \phi(x)$ является решением уравнения (1). Тогда

$$y_1 = \phi(x), \quad y_2 = \phi'(x), \quad \dots, \quad y_m = \phi^{(m-1)}(x),$$

соответственно с (60), является решением уравнения (61).

Пусть теперь, наоборот,

$$y_i = \phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

есть решение системы (61). Тогда

$$y = \phi_1(x)$$

будет решением уравнения (1). Действительно, согласно уравнениям (60), имеем

$$y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)} = y_m,$$

$$y_m'(t) = -p_0(t)y_1(t) - p_1(t)y_2(t) - \ldots - p_{m-2}(t)y_{m-1}(t) - \\ -p_{m-1}(t)y_m(t) + f(t),$$

что и доказывает их эквивалентность.

Полагая

$$\hat{Y}(\cdot) := \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & y_1(\cdot) \\ 0 & \ldots & 0 & y_2(\cdot) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y_m(\cdot) \end{pmatrix} \in (C^{(n)})^{m\times m}, \tag{62}$$

и учитывая равенства (56) – (59), систему (61) можно записать в виде дифференциального уравнения первого порядка (54). Между решениями уравнений (1) и (54) существует взаимно однозначное соответствие. А именно, каждому решению $y(t;\varepsilon)$ уравнения (1) соответствует решение $\hat{Y}(t;\varepsilon)$ уравнения (54), и наоборот, каждому решению $\hat{Y}(t;\varepsilon)$ уравнения (54) соответствует решение $y(t;\varepsilon)$ уравнения (1). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.1. Из леммы 4.1 следует, что соответствующая однородная предельная краевая задача (5) – (6) эквивалентна однородной краевой задаче

$$\hat{Y}'(t;0) = \hat{P}(t;0)\hat{Y}(t;0) \tag{63}$$

$$\hat{Y}(t_0, 0) = 0. \tag{64}$$

Поэтому условие существования лишь тривиального решения однородной задачи (5) – (6) равносильно тому, что однородная краевая задача (63) – (64) также имеет лишь тривиальное решение.

Из условий 1) – 3) теоремы 1.1 и согласно равенствам (56) – (59), получаем, что при достаточно малых ε выполняются следующие условия

$$\|\hat{P}(\cdot;\varepsilon) - \hat{P}(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

$$\|\hat{F}(\cdot;\varepsilon)-\hat{F}(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

$$\hat{c}_\varepsilon\to\hat{c}_0,$$

$$B_j(\varepsilon)\to B_j(0).$$

Таким образом, согласно теореме 3.1, при достаточно малых ε решения задач (54) – (55) однозначно определены и

$$\|\hat{Y}(\cdot;\varepsilon)-\hat{Y}(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to +0.$$

А это равносильно тому, что при достаточно малых ε задачи (3), (4) также будут однозначно определены и

$$\|y(\cdot;\varepsilon)-y(\cdot;0)\|_{(n+m-1)}\to 0,\quad \varepsilon\to +0.$$

Этим теорема 1.1 доказана. □

Список литературы

[1] *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца // Москва: Изд-во физ.-мат. литературы. – 1960. – 316 с.

[2] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений одномерных линейных краевых задач // Доповiдi НАН України. – 2010. – № 11. – С. 7 – 14.

[3] *Кодлюк Т. И.,Михайлец В. А.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доповiдi НАН України. – 2012. – № 11. – С. 15 – 19.

[4] *Рева Н. В.* Неперервнiсть за параметром розв'язкiв лiнiйних крайових задач: дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук. – Київ: Iнститут математики НАН України. – 2009. – 148 с.