Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 37–59

УДК 517.956.223

А.В. Аноп

(Інститут математики НАН України, Київ)

Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі

ahlv@ukr.net

We investigate a formally mixed elliptic boundary–value problem given in a bounded multiply connected Euclidean C^{∞}-domain. We prove that the operator of the problem is bounded and Fredholm in corresponding couples of Hörmander inner product spaces. They are parametrized with the help of an arbitrary radial function RO-varying at $+\infty$ and form the extended Sobolev scale. We establish a priori estimates for solutions to the problem and investigate their local regularity on this scale.

Досліджено формально змішану еліптичну крайову задачу, задану в обмеженій многозв'язній евклідовій області класу C^{∞}. Доведено, що оператор цієї задачі, є обмеженим і нетеровим у відповідних парах гільбертових просторів Хермандера. Вони параметризовані за допомогою довільної радіальної функції, RO-змінної на $+\infty$, та утворюють розширену соболєвську шкалу. Встановлено апріорні оцінки розв'язків задачі та досліджено їх локальну регулярність в цій шкалі.

1 Вступ

В теорії еліптичних диференціальних рівнянь важливу роль відіграють простори Соболєва. Так, еліптичні крайові задачі мають фундаментальні властивості у соболєвських шкалах: нетеровість, тобто скінченність індексу, апріорні оцінки розв'язків, локальне підвищення регулярності розв'язків та інше (див., наприклад, монографії [1–5], довідник [6] і огляд [7]). З точки зору застосувань цих властивостей, зокрема в спектральній теорії диференціальних операторів, найбільш корисна гільбертова шкала просторів Соболєва. Втім, вона не є досить тонко градуйованою для низки задач [2, 8, 9, 10].

Недавно В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [9] була побудована теорія еліптичних операторів і еліптичних крайових задач для уточненої соболєвської шкали. Вона утворена гільбертовими просторами Хермандера $H^{s,\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu}$ [2, 8], для яких показником гладкості служить функція $\mu(\xi) := \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $s \in \mathbb{R}$, а φ є довільна додатна функція, повільно змінна на $+\infty$ за Й. Караматою [11, 12]. Простір $H^{s,\varphi}$ на $\mathbb{R}^n$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\mu\widehat{w} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, й означається на евклідових областях і гладких компактних многовидах у стандартний спосіб ($\widehat{w}$ — перетворення Фур'є розподілу w).

Ця шкала $\{H^{s,\varphi}\}$ містить простори Соболєва: $H^{s,1} = H^s$, прив'язана до соболєвської шкали за допомогою числового параметра s і тонша, ніж остання. Для застосувань важливо, що кожний простір $H^{s,\varphi}$ можна отримати в результаті інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари соболєвських просторів H^{s_0} і H^{s_1}, де $s_0 < s < s_1$. Оскільки при інтерполяції просторів успадковується обмеженість лінійних операторів та їх нетеровість, то уточнена соболєвська шкала виявилася зручним інструментом в дослідженні властивостей операторів, породжених еліптичними крайовими задачами (див. статті [13–17], огляд [18] і монографію [9]).

У цьому зв'язку природно постає питання, про опис і можливі застосування класу всіх гільбертових просторів, що є інтерполяційними відносно пар гільбертових просторів Соболєва. З теореми В. І. Овчинникова [19, с. 511] випливає (див. [20, 21, 22]), що цей клас складається (з точністю до еквівалентності норм) з просторів Хермандера $H^{\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, де $\mu(\xi) := \varphi(\langle\xi\rangle)$, а φ є додатна функція, RO-змінна на $+\infty$ за В. Авакумовичем [11, 12]. Зазначений клас просторів названий розширеною соболєвською шкалою (за допомогою інтерполяції). Він містить уточнену соболєвську шкалу і дозволяє значно тонше охарактеризувати регулярність функцій/розподілів, ніж остання. Так, для RO-змінних функцій припустима відсутність числового порядку s змінення на $+\infty$.

В роботах [20, 23–28] знайдені застосування розширеної соболєвської шкали до еліптичних диференціальних операторів, заданих в $\mathbb{R}^n$ та на замкнених гладких многовидах. Відмітимо, що в останній час простори Хермандера та їх різні аналоги, які називають просторами узагальненої гладкості, викликають чималий інтерес [10, 29, 30, 31].

Ця стаття присвячена застосуванням розширеної соболєвської шкали до загальних еліптичних крайових задач, заданих в обмеженій многозв'язній евклідовій області класу C^∞. На відміну від відомих робіт [1–5], припускається, що порядки крайових операторів можуть бути різними на різних зв'язних компонентах межі. Найпростішим і важливим прикладом такої задачі є рівняння Лапласа в кільці з крайовими умовами Діріхле і Неймана на його внутрішній і зовнішній межах. Такі задачі належать до класу змішаних крайових задач [32–36], дослідження яких значно ускладнюється порівняно з незмішаними задачами. В роботі розглядаються змішані задачі у ситуації, коли ділянки межі, на яких порядок крайового оператору різний, не прилягають один до одного. Такі задачі називаємо формально змішаними. Їх можна звести локально до модельної еліптичної крайової задачі у півпросторі [37]. Застосування уточненої соболєвської до цих задач розглянуто в [38].

Мета статті — дослідити розв'язність формально змішаної еліптичної крайової задачі та локальну регулярність її розв'язків в розширеній соболєвській шкалі. При цьому не припускається, що крайові умови є регулярними на зв'язних компонентах межі області.

Робота складається з семи пунктів. Пункт 1 є вступ. У п. 2 дано означення формально змішаної еліптичної крайової задачі. Наступний п. 3 присвячений потрібним у роботі просторам Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу на $\mathbb{R}^n$, евклідовій області і замкненому нескінченно гладкому многовиді. Основні результати статті сформульовано у п. 4. Це — теореми про нетеровість операторів, відповідних задачі в розширеній соболєвській шкалі, про породжені ними ізоморфізми, апріорну оцінку розв'язків, їх локальну регулярність та достатня умова неперервності частинних похідних розв'язків. Пункт 5 містить потрібні для доведень властивості розширеної соболєвської шкали, зокрема, інтерполяційні. Основні результати статті доведені в п. 6. Висновки зроблені в останньому п. 7.

2 Постановка задачі

Нехай Ω є обмежена многозв'язна область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$. Її межа Γ складається з $r \geq 2$ зв'язних компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$. Припускаємо, що вони є нескінченно гладкими замкненими многовидами вимірності $n-1$.

Розглянемо в області Ω формально змішану крайову задачу

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} a_{\mu}(x)\, D^{\mu}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_{k,j}u(x) \equiv \sum_{|\mu|\leq m_{k,j}} b_{\mu}^{k,j}(x)\, D^{\mu}u(x) = g_{k,j}(x), \quad x \in \Gamma_k, \\ \text{при} \quad k=1,\ldots,r \quad \text{і} \quad j=1,\ldots,q. \tag{2}$$

Тут A є лінійний диференціальний вираз довільного парного порядку $2q\geq 2$, заданий в $\overline{\Omega} := \Omega\cup\Gamma$, а всі $B_{k,j}$ є граничні лінійні диференціальні вирази довільного порядку $m_{k,j}\leq 2q-1$, задані на Γ_k. (У формулах (1), (2) використовуються стандартні позначення: $\mu := (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ — мультиіндекс, $|\mu| := \mu_1+\ldots+\mu_n$, $D^{\mu} := D_1^{\mu_1}\ldots D_n^{\mu_n}$, $D_l := i\partial/\partial x_l$.) Усі коефіцієнти $a_{\mu}(x)$ і $b_{\mu}^{k,j}(x)$ диференціальних виразів припускаються нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ_k відповідно. Покладемо

$$B := (B_{1,1},\ldots,B_{1,q},\ldots,B_{r,1},\ldots,B_{r,q}).$$

В роботі припускаємо, що формально змішана крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω, тобто виконуються наступні умови:

(i) диференціальний вираз A є правильно еліптичний на $\overline{\Omega}$ [6, с. 165];

(ii) для кожного $k\in\{1,\ldots,r\}$ система граничних диференціальних виразів $\{B_{k,j} : j=1,\ldots,q\}$ накриває вираз A на Γ_k [6, с. 167].

Будемо досліджувати лінійне відображення $u\mapsto(Au,Bu)$ в розширеній соболєвській шкалі.

3 Розширена соболєвська шкала

Ця шкала складається з просторів Хермандера H^{φ}, для яких показником гладкості служить довільний функціональний параметр $\varphi\in\mathrm{RO}$. Наведемо означення класу RO і простору H^{φ}.

Множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty)\to(0,\infty)$, для яких існують числа $a>1$ и $c\geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для довільних} \quad t\geq 1,\ \lambda\in[1,a] \tag{3}$$

(сталі a і c можуть залежати від φ). Такі функції називають RO (або OR)-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем в 1936 р. і достатньо вивчений (див. [11, додаток 1] та [12, пп. 2.0 – 2.2]).

Відмітимо [11, с. 87], що

$$\varphi \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \text{ для } t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1, \infty)$.

Нам знадобиться наступна властивість [11, с. 88] класу RO. Для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_1 \geq 1$ такі, що

$$c_1^{-1} \lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \geq 1. \tag{4}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність в (4)}\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність в (4)}\};$$

тут $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ [12, п. 2.1.2].

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, де $n \in \mathbb{N}$, складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом в $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ є лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, та (нагадаємо) $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Нам зручно трактувати розподіли як *анти*лінійні функціонали на просторі $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ основних функцій. При цьому всі розподіли і функції припускаються комплекснозначними.

У просторі $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\varphi(\mathbb{R}^n)$. Він задає на $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і норму
$$\|w\|_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)} := (w,w)^{1/2}_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)}.$$
Цей простір сепарабельний; множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ щільна в ньому.

Простір $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [2, п. 2.2] (див також його монографію [8, п. 10.1]). А саме, $H^\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [39, § 2].

Якщо функція φ степенева: $\varphi(t) \equiv t^s$, то $H^\varphi(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертів) простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$.

Узагалі,
$$s_0 < \sigma_0(\varphi) \le \sigma_1(\varphi) < s_1 \;\Rightarrow\; H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\varphi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), \quad (5)$$
причому обидва вкладення неперервні й щільні.

Згідно з [22], клас функціональних просторів
$$\bigl\{H^\varphi(\mathbb{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\bigr\} \quad (6)$$
називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$.

Нам потрібні її аналоги для евклідової області Ω і замкнених многовидів Γ_k, де $k = 1, \ldots, r$. Ці аналоги будуються стандартним чином на основі класу (6) (див. [21, с. 4] і [23, с. 30]). Наведемо відповідні означення. Тепер $n \ge 2$.

Лінійний простір $H^\varphi(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^\varphi(\mathbb{R}^n)$. Норма в $H^\varphi(\Omega)$ означається за формулою
$$\|u\|_{H^\varphi(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^\varphi(\mathbb{R}^n),\; w = u \text{ в } \Omega \,\bigr\},$$
де $u \in H^\varphi(\Omega)$. Відносно цієї норми простір $H^\varphi(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний, оскільки він є факторпростір простору $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ за підпростором
$$\bigl\{w \in H^\varphi(\mathbb{R}^n) :\, \mathrm{supp}\, w \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\bigr\}.$$
Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $H^\varphi(\Omega)$.

Лінійний простір $H^\varphi(\Gamma_k)$ складається з усіх розподілів на Γ_k, які в локальних координатах належать до $H^\varphi(\mathbb{R}^{n-1})$. А саме, нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді

Γ_k, утворений локальними картами $\alpha_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Нехай також функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma_k)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, утворюють розбиття одиниці на Γ_k, яке задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_j$. Тоді

$$H^\varphi(\Gamma_k) := \bigl\{ h \in \mathcal{D}'(\Gamma_k) : \, (\chi_j h) \circ \alpha_j \in H^\varphi(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ для усіх } j = 1, \ldots, \varkappa \bigr\}.$$

Тут $\mathcal{D}'(\Gamma_k)$ є лінійний топологічний простір усіх розподілів на многовиді Γ_k, а $(\chi_j h) \circ \alpha_j$ є представлення розподілу h в локальній карті α_j. У просторі $H^\varphi(\Gamma_k)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^\varphi(\Gamma_k)} := \sum_{j=1}^{\varkappa} ((\chi_j h_1) \circ \alpha_j, (\chi_j \, h_2) \circ \alpha_j)_{H^\varphi(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^\varphi(\Gamma_k)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [23, с. 32]. Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в $H^\varphi(\Gamma_k)$.

Означені вище функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали

$$\{H^\varphi(\Omega) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \quad \text{і} \quad \{H^\varphi(\Gamma_k) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \tag{7}$$

на Ω і Γ_k відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\varphi(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^\varphi(\Gamma_k) =: H^{(s)}(\Gamma_k)$ є простори Соболєва порядку s.

Потрібні властивості шкал (7) будуть розглянуті у п. 5 .

4 Основні результати

Сформулюємо основні результати статті про властивості еліптичної крайової задачі (1), (2). Нехай

$$\mathrm{RO}_+ := \{\varphi \in \mathrm{RO} : \sigma_0(\varphi) > 0\}.$$

Покладемо $\varrho(t) := t$ для довільного $t \geq 1$. Якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $s \in \mathbb{R}$, то функція $\varrho^s \varphi \in \mathrm{RO}$, причому її індекси Матушевської $\sigma_j(\varrho^s \varphi) = s + \sigma_j(\varphi)$, де $j = 0, 1$.

Позначимо через $(\cdot, \cdot)_\Omega$ і $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_k}$ скалярні добутки в гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma_k)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ_k відповідно.

Теорема 1 *Для довільного функціонального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}_+$ *відображення* $u \mapsto (Au, Bu)$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується единим чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A,B) : H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \to \mathcal{H}_\varphi := H^\varphi(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{2q-m_{k,j}-1/2}}(\Gamma_k). \tag{8}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро N *лежить в* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *і не залежить від* φ. *Область значень оператора* (8) *складається з усіх векторфункцій*

$$F := (f, g_{1,1}, \ldots, g_{1,q}, \ldots, g_{r,1}, \ldots, g_{r,q}) \in \mathcal{H}_\varphi \tag{9}$$

таких, що

$$(F, W)_{\Omega,\Gamma} := (f, w_0)_\Omega + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{q} (g_{k,j},\, w_{k,j})_{\Gamma_k} = 0 \tag{10}$$

для кожної вектор-функції

$$W := (w_0, w_{1,1}, \ldots, w_{1,q}, \ldots, w_{r,1}, \ldots, w_{r,q}) \in G.$$

Тут G *є деякий скінченновимірний і не залежний від* φ *підпростір в*

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \times \prod_{k=1}^{r} (C^\infty(\Gamma_k))^q.$$

Індекс оператора (8) *дорівнює* $\dim N - \dim G$ *й не залежить від* φ.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : X \to Y$, де X, Y є банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Нетерів оператор має замкнену область значень $T(X)$ і скінченний індекс $\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(Y/T(X))$.

Зобразимо простори, в яких діє оператор (8) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) = N \dotplus \bigl\{u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) : (u, v)_\Omega = 0 \text{ для всіх } v \in N\bigr\}, \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_\varphi = G \dotplus (A,B)(\mathcal{H}_\varphi). \tag{12}$$

Такі зображення існують, оскільки вони є звуженнями на $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ і $\mathcal{H}_{\varphi}$ розкладів в ортогональні суми просторів

$$L_2(\Omega) \quad \text{i} \quad L_2(\Omega) \times \bigoplus_{k=1}^{r} (L_2(\Gamma_k))^q.$$

Позначимо через P і Q відповідно проектори просторів $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ і $\mathcal{H}_{\varphi}$ на другий доданок в сумах (11) і (12) паралельно першому доданку. Відображення P і Q не залежать від φ.

Теорема 2 *Для довільного* $\varphi \in \mathrm{RO}_+$ *звуження відображення* (8) *на підпростір* $P(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega))$ *є ізоморфізмом*

$$(A, B) : \, P\big(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)\big) \leftrightarrow Q(\mathcal{H}_{\varphi}). \tag{13}$$

Для розв'язку крайової задачі (1), (2) виконується наступна апріорна оцінка.

Теорема 3 *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}_+$*; тоді існує число* $c = c(\varphi) > 0$ *таке, що*

$$\|u\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \leq c\,\big(\|(A,B)u\|_{\mathcal{H}_{\varphi}} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\big) \tag{14}$$

для довільної функції $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$*. Тут* c *не залежить від* u*.*

Для розширеної соболєвської шкали вірна теорема по підвищення локальної регулярності розв'язку крайової задачі (1), (2).

Нехай V є довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$. Покладемо $\Gamma_{k,0} := \Gamma_k \cap V$ для кожного $k \in \{1, \ldots, r\}$ та $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Покладемо

$$H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) := \big\{u \in L_2(\Omega) : \, \chi u \in H^{\alpha}(\Omega)$$
$$\text{для всіх } \chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0\big\}.$$

Тут $\alpha \in \mathrm{RO}_+$. Аналогічно

$$H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_{k,0}) := \big\{u \in L_2(\Gamma_k) : \, \chi u \in H^{\alpha}(\Gamma_k)$$
$$\text{для всіх } \chi \in C^{\infty}(\Gamma_k) \text{ таких, що } \operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_{k,0}\big\}.$$

Теорема 4 *Нехай функція* $u \in H^{(2q)}(\Omega)$ *є розв'язком крайової задачі* (1), (2)*, праві частини якої задовольняють для деякого параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}_+$ *умовам*

$$f \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \quad i \quad g_{k,j} \in H^{\varphi\rho^{2q-m_{k,j}-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_{k,0})$$

для всіх $k \in \{1, \dots, r\}$ *та* $j \in \{1, \dots, q\}$*. Тоді* $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Відмітимо важливі окремі випадки цієї теореми.

Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$, то $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) = H^{\alpha}(\Omega)$ і $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_{k,0}) = H^{\alpha}(\Gamma_k)$ для всіх $k \in \{1, \dots, r\}$ та $\alpha \in \mathrm{RO}_+$. У цьому випадку теорема 4 стверджує, що регулярність розв'язку u підвищується глобально, тобто в усій області Ω впритул до її межі Γ.

Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \varnothing$, то за теоремою 4 регулярність розв'язку u підвищується в околах усіх внутрішніх точок області Ω.

Як застосування розширеної соболєвської шкали наведемо достатню умову неперервності узагальнених частинних похідних розв'язку u в точках множини $\overline{\Omega}$.

Теорема 5 *Нехай виконується умова теореми* 4*. Окрім того, припустимо, що*

$$\int_1^{\infty} t^{2l+n-1-2q} \varphi^{-2}(t) dt < \infty \tag{15}$$

для деякого цілого $l \geq 0$*. Тоді* $u \in C^{l}(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Зауваження 1. Умова (15) не лише достатня в теоремі 5, але й необхідна на класі всіх розв'язків u, що задовольняють умову теореми 4.

5 Допоміжні результати

Наведемо тут декілька важливих для нас результатів, що будуть використані в доведеннях теорем. Перші два з них стосуються вкладень просторів Хермандера.

Твердження 1 *Нехай* $\alpha, \alpha_1 \in \mathrm{RO}$*. Відношення функцій* α/α_1 *обмежене в околі* ∞ *тоді і тільки тоді, коли* $H^{\alpha_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Omega)$*. Це вкладення щільне і неперервне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли* $\alpha(t)/\alpha_1(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$*. Це твердження зберігає силу, якщо в ньому замінити* Ω *на* Γ_k*, де* $k \in \{1, \dots, r\}$.

Твердження 1 є прямим наслідком теорем 2.2.2 і 2.2.3 з монографії Л. Хермандера [2, сс. 55, 56].

Окремим важливим випадком цього твердження є наступні вкладення для просторів Хермандера і Соболєва: якщо $\alpha \in \mathrm{RO}$ та $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$, то

$$H^{(s_1)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Omega), \tag{16}$$

$$H^{(s_1)}(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Gamma_k). \tag{17}$$

Ці вкладення неперервні, щільні та компактні.

Твердження 2 *Нехай функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і ціле число $l \geq 0$. Тоді*

$$\int\limits_1^{\infty} t^{2l+n-1}\alpha^{-2}(t)\,dt < \infty \quad \Leftrightarrow \quad H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l}(\overline{\Omega}).$$

Останнє вкладення неперервне.

Це твердження є наслідком теореми 2.2.7 з монографії Л. Хермандера [2, с. 59] (пор. з [25, лема 2]).

Зв'язок між розширеною соболєвською шкалою і просторами Соболєва не вичерпується вкладеннями (5) та їх аналогами (16) і (17); він значно глибший. А саме, кожний простір H^{α}, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, є результат інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари соболєвських просторів $H^{(s_0)}$ і $H^{(s_1)}$, якщо $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha) < s_1$. Ця фундаментальна властивість буде використана нами в доведенні теореми 1.

У цьому зв'язку нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та деякі її властивості (див. монографію [9, пп. 1.1, 2.4.2] або статтю, [40, п. 2], де ці питанні викладені систематично). Нам достатньо обмежитися сепарабельними гільбертовими просторами.

Нехай задана впорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J є самоспряжений додатно визначений оператор в просторі X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається за парою X однозначно; він називається породжуючим для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a,b]$ і відокремлені від нуля на кожній множині $[r,\infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. У просторі X_0 означений, як функція від J, оператор $\psi(J)$. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w,w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ є гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується наступне. Якщо при кожному $j \in \{0,1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо казати, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для деякої додатної угнутої функції $\psi_1(t)$. (Тут $\psi \asymp \psi_1$ значить обмеженість обох відношень ψ/ψ_1 і ψ_1/ψ на вказаній множині). Цей важливий факт випливає з теореми Ж. Петре [41] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного степеня (див. також монографію [42, п. 5.4]).

Згадана вище інтерполяційна властивість розширеної соболєвської формулюється так.

Твердження 3 *Нехай задані функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha\big(t^{1/(s_1-s_0)}\big) & \text{при} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \text{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконуються *наступні рівності просторів з еквівалентністю норм в них:*

$$\left[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\right]_\psi = H^\alpha(\Omega), \tag{19}$$

$$\left[H^{(s_0)}(\Gamma_k), H^{(s_1)}(\Gamma_k)\right]_\psi = H^\alpha(\Gamma_k) \tag{20}$$

для кожного $k \in \{1, \dots, r\}$.

Формула (19) доведена в [21, теорема 5.1], а (20) — в [9, теорема 2.21]. Зауважимо, що за умови твердження 3

$$\left[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi = H^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

з рівністю норм [9, теорема 2.19].

Відмітимо також ще дві фундаментальні властивості розширеної соболєвської шкали $\{H^\alpha : \alpha \in \mathrm{RO}\}$. Вона замкнена відносно інтерполяції з функціональним параметром і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$ (див. [9, п. 2.4.2] та [21]). Останній факт випливає з теореми В. І. Овчинникова [19, с. 511] про опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для заданої пари гільбертових просторів. Нагадаємо, що властивість (гільбертового) простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає наступне: а) виконуються неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) будь-який лінійний оператор, обмежений на кожному з просторів X_0 и X_1, є обмеженим і на X.

Наприкінці цього пункту наведемо дві загальні властивості інтерполяції, які будуть використані в доведеннях. Перша з них показує, що при інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість, але й нетеровість лінійних операторів при деяких додаткових умовах [9, п. 1.1.7].

Твердження 4 *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задане лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j, *де* $j = 0, 1$, *є обмеженими і нетеровими операторами* $T : X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень рівна* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Друга властивість зводить інтерполяцію ортогональних сум гільбертових просторів до інтерполяції доданків [9, п. 1.1.5].

Твердження 5 *Нехай задане скінченне число припустимих пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ гільбертових просторів, де $k = 1, \ldots, p$. Тоді для довільного $\psi \in \mathcal{B}$ вірно*

$$\Big[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)},\, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Big]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p} \big[X_0^{(k)},\, X_1^{(k)}\big]_\psi$$

з рівністю норм.

6 Доведення

Доведення теореми 1. У випадку просторів Соболєва, тобто коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s > 0$, ця теорема є прямим наслідком теореми 1 з роботи [37, с. 38] (див. також [9, с. 238]).

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}_+$ довільне. Виведемо теорему 1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. Виберемо дійсні числа l_0 і l_1 такі, що $0 < l_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi) < l_1$. Відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмежених нетерових операторів

$$(A, B) :\ H^{(l_i+2q)}(\Omega) \to \mathcal{H}_{(l_i)} \quad \text{при} \quad i = 0,\, 1, \tag{21}$$

що діють у парах просторів Соболєва. Тут позначено

$$\mathcal{H}_{(l_i)} := H^{(l_i)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(l_i+2q-m_{k,j}-1/2)}(\Gamma_k).$$

Оператори (21) мають спільне ядро N та однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim G$. Окрім того,

$$\begin{aligned} &(A, B)\big(H^{(l_i+2q)}(\Omega)\big) = \\ &= \big\{F \in \mathcal{H}_{(l_i)} :\ (F, W)_{\Omega,\Gamma} = 0 \text{ для всіх } W \in G\big\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Тут N і G є скінченновимірні простори з формулювання теореми 1, яка вірна у соболєвському випадку.

Означимо функцію ψ за формулою (18), в якій покладаємо $\alpha := \varphi$ та $s_0 := l_0$ і $s_1 := l_1$. Згідно з твердженням 3 функція ψ є інтерполяційним параметром. Тому в силу твердженням 4 з обмеженості і нетеровості обох операторів (21) випливає обмеженість і нетеровість оператора

$$(A,B):\ \big[H^{(l_0+2q)}(\Omega),H^{(l_1+2q)}(\Omega)\big]_\psi\to\big[\mathcal{H}_{(l_0)},\mathcal{H}_{(l_1)}\big]_\psi. \tag{23}$$

Він є звуженням оператора (21) з $i=0$. Покажемо, що (23) є оператор (8) з формулювання теореми 1.

На підставі твердження 3 маємо наступні рівності просторів з точністю до еквівалентності норм в них:

$$\big[H^{(l_0)}(\Omega),H^{(l_1)}(\Omega)\big]_\psi=H^{\varphi}(\Omega), \tag{24}$$

$$\big[H^{(l_0+2q)}(\Omega),H^{(l_1+2q)}(\Omega)\big]_\psi=H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega); \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\big[H^{(l_0+2q-m_{k,j}-1/2)}(\Gamma_k),H^{(l_1+2q-m_{k,j}-1/2)}(\Gamma_k)\big]_\psi=\\&=H^{\varphi\rho^{2q-m_{k,j}-1/2}}(\Gamma_k)\quad\text{при}\quad k=1,\dots,r\quad\text{і}\quad j=1,\dots,q.\end{aligned} \tag{26}$$

Щодо останніх двох формул зауважимо таке. Рівність (25) отримуємо, поклавши $\alpha:=\varphi\varrho^{2q}$, $s_0:=l_0+2q$ і $s_1:=l_1+2q$ в твердженні 3, а рівність (26) дістаємо, поклавши в тому ж твердженні

$$\alpha:=\varphi\rho^{2q-m_{k,j}-1/2},$$
$$s_0:=l_0+2q-m_{k,j}-1/2,\quad s_1:=l_1+2q-m_{k,j}-1/2$$

При цьому в обох випадках функція ψ задовольняє (18).

З формул (24) і (26) випливає в силу твердження 5, що

$$\begin{aligned}&\big[\mathcal{H}_{(l_0)},\mathcal{H}_{(l_1)}\big]_\psi=\big[H^{(l_0)}(\Omega),H^{(l_1)}(\Omega)\big]_\psi\oplus\\&\oplus\bigoplus_{k=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{q}\big[H^{(l_0+2q-m_{k,j}-1/2)}(\Gamma_k),H^{(l_1+2q-m_{k,j}-1/2)}(\Gamma_k)\big]_\psi=\mathcal{H}_\varphi.\end{aligned} \tag{27}$$

Тепер на підставі (25) і (27) робимо висновок, що обмежений і нетерів оператор (23) діє в парі просторів $(A,B):\ H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)\to\mathcal{H}_\varphi$. В силу твердження 4 ядро цього оператора та його індекс збігаються з спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N-\dim G$ операторів (21). Окрім того,

$$\begin{aligned}&(A,B)\big(H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)\big)=\mathcal{H}_\varphi\cap(A,B)\big(H^{(l_0+2q)}(\Omega)\big)=\\&=\big\{F\in\mathcal{H}_\varphi:\ (F,W)_{\Omega,\Gamma}=0\ \text{для всіх}\ W\in G\big\}.\end{aligned}$$

Тут також скористалися рівністю (22) та вкладенням $\mathcal{H}_{\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_{(l_0)}$, яке випливає з формул (16) і (17). Залишається зауважити, що цей оператор є продовженням за неперервністю відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, оскільки множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. За теоремою 1 звуження оператора (8) на $P(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega))$ є неперервним і взаємно однозначним відображенням підпростору $P(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega))$ на підпростір $Q(\mathcal{H}_{\varphi})$. Тому в силу теореми Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом (13). Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. Для довільної функції $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ в силу теореми 2 маємо

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} + \|u - Pu\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \leq \\ \leq c_1\|(A,B)Pu\|_{\mathcal{H}_{\varphi}} + c_2\|u - Pu\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (13), а c_2 є деяке додатне число, не залежне від u. Це число існує, оскільки функція $u - Pu$ належить скінченновимірному простору N, а в ньому еквівалентні всі норми, зокрема, норми в просторах $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ і $L_2(\Omega)$. Звідси з урахуванням формул

$$(A,B)Pu = (A,B)u \quad \text{і} \quad \|u - Pu\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}$$

маємо потрібну оцінку (14). Теорема 3 доведена.

Доведення теореми 4. Спочатку встановимо цю теорему у випадку глобальної регулярності, тобто коли $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$. Тоді, за умовою, $u \in H^{(2q)}(\Omega)$ і $F := Au \in \mathcal{H}_{\varphi}$. Відмітимо [37, с. 38], що теорема 1 є вірною у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$. Тому

$$F \in \mathcal{H}_{\varphi} \cap (A,B)\big(H^{(2q)}(\Omega)\big) = (A,B)\big(H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)\big).$$

Отже, поряд з умовою $(A,B)u = F$ виконується рівність $(A,B)v = F$ для деякої функції $v \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$. Тоді $(A,B)(u - v) = 0$, що за теоремою 1 (для $\varphi \equiv 1$) тягне за собою включення

$$w := u - v \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \quad \text{та} \quad u = v + w \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega).$$

У розглянутому випадку теорема 4 доведена.

Звідси виведемо її у загальній ситуації. Позначимо

$$\Upsilon := \{\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0\}.$$

Попередньо доведемо, що в силу умови теореми 4 виконується для кожного $i \in \mathbb{N}$ імплікація

$$\begin{gathered}\big(\chi u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) + H^{(2q+i-1)}(\Omega) \ \text{ для всіх } \ \chi \in \Upsilon\big) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \big(\chi u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) + H^{(2q+i)}(\Omega) \ \text{ для всіх } \ \chi \in \Upsilon\big).\end{gathered} \tag{28}$$

Тут і далі у доведенні використовуємо алгебраїчні суми просторів.

Виберемо довільне $i \in \mathbb{N}$ та припустимо, що посилка імплікації (28) істинна. Розглянемо довільну функцію $\chi \in \Upsilon$ та функцію $\eta \in \Upsilon$ таку, що $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. За умовою, $\chi F \in \mathcal{H}_{\varphi}$, де $F := (A, B)u$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з диференціальним оператором (A, B), можемо записати наступне:

$$\begin{gathered}\chi F = \chi(A, B)(\eta u) = (A, B)(\chi\eta u) - (A', B')(\eta u), \\ (A, B)(\chi u) = \chi F + (A', B')(\eta u).\end{gathered} \tag{29}$$

Тут (A', B') — деякий диференціальний оператор вигляду (A, B), порядки компонент якого менші принаймні на одиницю, ніж порядки відповідних компонент оператора (A, B). За умовою імплікації (28) маємо $\eta u = u_1 + u_2$ для деяких функцій

$$u_1 \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \quad \text{і} \quad u_2 \in H^{(2q+i-1)}(\Omega).$$

Звідси та в силу (29) можемо записати $(A, B)(\chi u) = F_1 + F_2$, де

$$F_1 := \chi F + (A', B')u_1 \in \mathcal{H}_{\varphi}, \tag{30}$$

$$F_2 := (A', B')u_2 \in \mathcal{H}_{(i)}. \tag{31}$$

Пояснимо останні два включення. Тут $\mathcal{H}_{(s)}$ позначає простір $\mathcal{H}_{\alpha}$ у соболєвському випадку $\alpha(t) \equiv t^s$ і $s \in \mathbb{R}$. Оскільки компонентами $\operatorname{ord}(A', B') \leq \operatorname{ord}(A, B) - 1$, то відображення $v \mapsto (A'v, B'v)$, де $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого оператора

$$(A', B') : H^{(s+2q)}(\Omega) \to \mathcal{H}_{(s+1)} \quad \text{для кожного} \quad s \geq 0.$$

Звідси, де беремо $s := i-1$, та з включення $u_2 \in H^{(2q+i-1)}(\Omega)$ випливає (31).

Далі, з обмеженості операторів

$$(A', B') : \, H^{(l_i+2q)}(\Omega) \to \mathcal{H}_{(l_{i+1})} \hookrightarrow \mathcal{H}_{(l_i)} \quad \text{при} \quad i = 0, \, 1,$$

випливає в силу інтерполяційних формул (25) і (27) обмеженість оператора

$$\begin{aligned} (A', B') : \, H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) = \bigl[H^{(l_0+2q)}(\Omega), H^{(l_1+2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to \\ \to \bigl[\mathcal{H}_{(l_0)}, \mathcal{H}_{(l_1)}\bigr]_{\psi} = \mathcal{H}_{\varphi}. \end{aligned} \tag{32}$$

Тут числа l_0 і l_1 та інтерполяційний параметр ψ такі, як у доведенні теореми 1. Тепер формула (30) є наслідком (32) та включень $\chi F \in \mathcal{H}_{\varphi}$ і $u_1 \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$.

Скористаємося проектором Q і теоремою 2 (у соболєвському випадку також). З рівності $(A, B)(\chi u) = F_1 + F_2$ та включень (30) і (31) випливає, що

$$(A, B)(\chi u) = Q(A, B)(\chi u) = QF_1 + QF_2 = (A, B)v_1 + (A, B)v_2.$$

Тут функції

$$v_1 \in P\bigl(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)\bigr) \quad \text{і} \quad v_2 \in P\bigl(H^{(i+2q)}(\Omega)\bigr) \tag{33}$$

є розв'язки (єдині) задач

$$(A, B)v_1 = QF_1 \in Q(\mathcal{H}_{\varphi}) \quad \text{і} \quad (A, B)v_2 = QF_2 \in Q(\mathcal{H}_{(i)}).$$

Тепер з рівності

$$(A, B)(\chi u) = (A, B)(v_1 + v_2)$$

випливає, що

$$\chi u = v_1 + (v_2 + w) \quad \text{для деякого} \quad w \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Ця формула з урахуванням включень (33) та довільності функції $\chi \in \Upsilon$ значить істинність висновку імплікації (28).

Таким чином, ми довели, що ця імплікація істинна для кожного $i \in \mathbb{N}$. За умовою $u \in H^{(2q)}(\Omega)$; тому посилка імплікації (28) є істинною для $i = 1$. Виберемо число $p \in \mathbb{N}$ таке, що $p > \sigma_1(\varphi)$; тоді в силу (16)

$$H^{(2q+p)}(\Omega) \subset H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega).$$

Скориставшись імплікацією (28) послідовно для значень $i = 1, 2, \dots, p$ робимо висновок, що

$$\chi u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) + H^{(2q+p)}(\Omega) = H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \text{ для всіх } \chi \in \Upsilon.$$

Отже, $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Теорема 4 доведена.

Доведення теореми 5. Виберемо довільну точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ та функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. В силу теореми 4, умови (15) і твердження 2, в якому беремо $\alpha(t) \equiv \varphi(t)t^{2q}$, маємо включення

$$\chi u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \subset C^{l}(\overline{\Omega}).$$

Звідси з урахуванням вибору x та χ випливає, що $u \in C^{l}(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. Теорема 5 доведена.

Наприкінці цього пункту обгрунтуємо сказане в зауваженні 1. Нехай ціле $l \geq 0$. Припустимо, що для кожного розв'язку u, який задовольняє умову теореми 4, виконується включення $u \in C^{l}(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. Покажемо, що тоді є вірним (15). Будь-яка функція $u \in H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ задовольняє умову теореми 4 і тому належить простору $C^{l}(\Omega_0)$ згідно із зробленим припущенням. Звідси випливає включення

$$H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega_1) \subset C^{l}(\overline{\Omega}_1),$$

де Ω_1 є деяка (довільно вибрана) куля в $\mathbb{R}^n$, замикання якої лежить в Ω_0. В силу твердження 2 це включення тягне за собою (15).

7 Висновки

У статті досліджено загальну еліптичну крайову задачу в обмеженій евклідовій многозв'язній області у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. Зв'язні компоненти межі цієї області є замкненими нескінченно гладкими многовидами однієї вимірності. Порядки крайових диференціальних виразів можуть бути різними на різних зв'язних компонентах; така крайова задачі є формально змішаною.

Доведено, що їй відповідають нетерові обмежені оператори, що діють у парах просторів Хермандера (теорема 1) та породжують ізоморфізми між їх підпросторами (теорема 2). Встановлені нові апріорні оцінки розв'язків цієї крайової задачі (теорема 3). Досліджена глобальна та локальна регулярність розв'язків стосовно розширеної соболєвської шкали (теорема 4). Знайдені нові достатні умови неперервності їх узагальнених частинних похідних (теорема 5). Ці умови сформульовані у термінах належності правих частин задачі до просторів Хермандера і є необхідними на класах цих просторів.

Авторка дякує О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — Москва: Мир, 1971. — 372 с.

[2] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — Москва: Мир, 1965. — 380 с.

[3] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

[4] *Agmon S.* Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. — Princeton, N.J.: Van Nostrand Reinhold, 1965. — 292 p.

[5] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

[6] *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. — Москва: Наука, 1972. — 544 с.

[7] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. — Berlin: Springer, 1997. — P. 1–144.

[8] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.

[9] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[10] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

[11] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — Москва: Наука, 1985. — 144 с.

[12] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

[13] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 3. — С. 352—370.

[14] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 5. — С. 679–701.

[15] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 11. — С. 1536—1555.

[16] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. — 2006. — **3**, № 4. — С. 547—580.

[17] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 4. — С. 497—520.

[18] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — **6**, No. 2. — P. 211–281.

[19] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – № 2. – P. 349 – 515.

[20] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 205–226.

[21] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces. — Preprint arXiv:1106.2049v2 [math.FA] 25 Dec 2012. — 15 p.

[22] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 3. — С. 368–380.

[23] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. — 2009. — № 3. — С. 13–19.

[24] *Мурач А. А.* Об эллиптических системах в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3. — С. 391–399.

[25] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 11. — С. 1477–1491.

[26] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 180–202.

[27] *Murach A. A., Zinchenko T.* Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — **19**, No. 1. — P. 29–39.

[28] *Зинченко Т. Н.* Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале // Доп. НАН України. — 2013. — № 3. — С. 14–20.

[29] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.— Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

[30] *Triebel H.* The Structure of Functions. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+ 425 p.

[31] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes: In 3 volumes. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[32] *Schechter M.* Mixed boundary value problems for general elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1960. — **13**, No. 2. — P. 183–201.

[33] *Peetre J.* Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables. I // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). — 1961. — **15**. — P. 337–353.

[34] *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1973. — 232 с.

[35] *Simanca S. R.* Mixed elliptic boundary value problems // Comm. Partial Differential Equations. — 1987. — **12**, No. 2. — P. 123–200.

[36] *Harutyunyan G., Schulze B.-W.* Elliptic Mixed, Transmission and Singular Crack Problems. — Zürich: European Mathematical Society, 2008. — xii+765 p.

[37] *Мурач А. А.* Эллиптические краевые задачи в полных шкалах пространств типа Лизоркина–Трибеля // Доп. АН України. — 1994. — № 12. — С. 36–39.

[38] *Мурач А. А.* Эллиптические краевые задачи в многосвязных областях в уточненной шкале пространств // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 29–35.

[39] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. — 1965. — **20**, № 1. — С. 3–74.

[40] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — **14**, No. 1. — P. 81–100.

[41] *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, № 1 – 2. – P. 91 – 92.

[42] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.