Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 96–111

УДК 517.9

В.В. Городецький, Я.М. Дрінь

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці)

Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в зліченно нормованих просторах гладких функцій

drin_jaroslav@i.ua

Invention operator calculus in class of pseudodifferential operators with non-smooth homogeneous symbol, determinate in one slide-multitude norm of a spaces of infinite differentiable functions.

Побудовано операторне числення в класі псевдодиференціальних операторів з негладкими однорідними символами, що діють у певному зліченно нормованому просторі нескінченно диференційовних функцій.

Вступ

Останні десятиліття інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a – Функція (символ), що задовольняє певні умови, F , F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. Імпульсом для такого розвитку послужив той факт, що ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу і сучасної математичної фізики. Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія рівнянь з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Наприклад, ПДО з символом $|\sigma|^\gamma$, $\gamma \in (0, 2)$, який траткується як оператор Лапласа степеня $\gamma/2$, є твірним оператором симетричного стійкого процесу. Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також із сучасною теорією фракталів.

Дослідженням ПДО та задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займалося багато математиків, використовуючи різні методи і підходи (M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М.А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, Ф. Трев, Ю.А. Дубінський, Б.Й. Пташник та ін.). При цьому одержані важливі результати про розв'язність задачі Коші у різних функціональних просторах. У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з негладкими однорідними символами на теперішній час добре відомі результати про будову та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші, за допомогою яких одержані інтегральні зображення розв'язків. Досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, стійкість за Ляпуновим, теореми типу Ліувілля). Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана, Я.М. Дріня (які визначили клас ППДО з негладкими однорідними символами і розпочали дослідження класичних розв'язків задачі Коші для ППДР і їх систем), М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея (де ПДО трактуються як гіперсингулярні інтеграли і встановлена класична розв'язність задачі Коші для ПДР) [1, 2, 3, 4] та ін.

Для подальшого розвитку теорії ПДО та ПДР з негладкими символами представляє науковий інтерес дослідження властивостей ПДО "нескінченного порядку" вигляду $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, де $A = F^{-1}[aF]$. Еволюційні рівняння з такими операторами є природними узагальненнями відомих параболічних псевдодиференціальних рівнянь. У певному розумінні близьким до такого питання є питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді диференціальних або інтегральних операторів, операторів узагальненого диференціювання скінченного та нескінченного порядків, яке вивчається в теорії аналітичних у крузі функцій.

У цій роботі будується операторне числення $A \to f(A)$ в одному класі зліченно нормованих просторів нескінченно диференційовних функцій, який є природним середовищем для дослідження задачі Коші та багатоточкових за часом задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь.

1 Простори основних функцій

Нехай γ – фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$, $\gamma_0 := 1+[\gamma]$, $M(x) := 1+|x|$, $x \in \mathbb{R}$, $\Phi = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists c_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :\ |D_x^k \varphi(x)| \le c(1+|x|)^{-(\gamma_0+k)}\}$. У Φ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм [5]:

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\omega_0+k} |D_x^k \varphi(x)|,\ \varphi \in \Phi,\ p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\omega_0 = \gamma_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ – фіксований параметр.

Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ою нормою; Φ_p – банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$; кожне таке вкладення є неперервним, щільним і компактним; Φ – повний досконалий зліченно нормований простір з топологією проективної границі банахових просторів Φ_p [5].

Функції з простору Φ абсолютно інтегровані на $\mathbb{R}$, тому на них визначена операція перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx,\ \varphi \in \Phi.$$

Символом Ψ позначимо Фур'є-образ простору $\Phi : \Psi = F[\Phi]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi$, обмежена і неперервна на $\mathbb{R}$. Наведемо основні властивості функцій з простору Ψ [5].

1. Якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$.

2. Якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція.

Зауважимо, що $F[\varphi]$ у точці $\xi = 0$ може бути недиференційовною функцією. Наприклад, функція $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, є елементом простору Φ з параметром $\gamma \in (1,2)$, але похідна функції $F[\varphi](\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ у точці $\xi = 0$ не існує.

3. У функції $D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi \to \pm 0} D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\varphi \in \Phi$.

4. Кожна функція $F[\varphi] \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$, у точці 0 задовольняє умову Діні.

Зауваження 1. У всіх точках $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Функція $F[\varphi]$ неперервно диференційовна (навіть нескінченно диференційовна), тому в таких точках умова Діні для $F[\varphi]$ також виконується. Крім того, перетворення Фур'є $F[\varphi]$ функції $\varphi \in \Phi$ є інтегровною на $\mathbb{R}$ функцією. Із загальної теорії перетворення Фур'є випливає, що тоді функція φ зображається через її перетворення Фур'є $F[\varphi]$ за допомогою операції оберненого перетворення Фур'є F^{-1}: $\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]]$. Для перетворення Фур'є відома теорема єдиності: якщо $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ і φ – кусково-неперервна на $\mathbb{R}$ функція, то з умови $F[\varphi] = 0$ випливає, що $\varphi = 0$. Отже, перетворення Фур'є відображає Φ на Ψ, причому це відображення є взаємнооднозначним і неперервним.

5. Правильними є нерівності:

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,\ k \geq m,\ \exists \tilde{c}_k > 0\ \exists c_m > 0:$$

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |\xi^k D_\xi^m F[\varphi](\xi)| \leq \tilde{c}_k c_m,\ \varphi \in \Phi,$$

де $\tilde{c}_k \leq c A^k k^k$ (c, $A > 0$; сталі c, A залежать лише від функції $F[\varphi]$).

З урахуванням останньої нерівності в просторі Ψ вводиться структура зліченно нормованого простору

$$\|\psi\|_p := \sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k \psi(\xi)| \Big\},\ \psi \in \Psi,\ p \in \mathbb{Z}_+.$$

Збіжність у просторі Ψ характеризується так [5]: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi$ збігається за топологією простору Ψ до $\varphi \in \Psi$ тоді й лише тоді, коли вона: 1) обмежена в Ψ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+\ \exists c = c(p) > 0\ \forall \nu \geq 1: \quad \|\varphi_\nu\|_p \leq c_p;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_\xi^m(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0.

Мультиплікатором у просторі Ψ є кожна функція $a \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ (або $a \in C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$, причому $\lim\limits_{\xi \to \pm 0} D_{\xi}^{k} a(\xi) < \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$), яка на нескінченності разом з усіма своїми похідними зростає не швидше за поліном.

2 Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку

Нехай $\alpha \in (0,1)$ – фіксоване число, f – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\exists c > 0 \ \exists a > 0 \ \exists h \geq 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ \ |f(z)| \leq c(1+|x|)^{h} e^{a|y|^{\alpha}}. \quad (1)$$

Лема. *Для похідних функції f на дійсній осі, яка задовольняє умову (1), правильними є оцінки:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}_0 \tilde{B}^{n} n^{n(1-1/\alpha)} (1+|x|)^{h}, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Згідно з формулою Коші

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R},$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z-x|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{R^{n}} \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq$$

$$\leq c \frac{n!}{R^{n}} (1+|x \pm R|^{h} \exp\{aR^{\alpha}\}) \leq cn!(1+|x|+R) g_n(R), \ R > 0,$$

де $g_n(R) = R^{-n} \exp\{aR^{\alpha}\}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $g_n(R)$, $R \in (0,\infty)$, є диференційовною, причому

$$\lim_{R \to +\infty} g_n(R) = +\infty, \ \lim_{R \to +0} g_n(R) = +\infty, \ n \in \mathbb{N},$$

$g_n(R) > 0$, $R \in (0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що ця функція досягає свого мінімуму на $(0,+\infty)$, тобто існує $R_0 = R_0(n) > 0$ таке, що

$g_n(R) \geq g_n(R_0)$. Використовуючи методи диференціального числення безпосередньо знаходимо, що

$$\inf_R g_n(R) = \frac{b^n}{n^{n/\alpha}},\ b = (a\alpha e)^{1/\alpha},\ n \in \mathbb{N},$$

причому вказаний інфімум досягається в точці $R_0(n) = (n/(a\alpha))^{1/\alpha}$. Отже,

$$|f^{(n)}(x)| \leq cn!(1 + |x| + R_0)^h g_n(R_0) \leq$$
$$\leq cn!\Big(1 + |x| + \Big(\frac{n}{a\alpha}\Big)^{1/\alpha}\Big)^h \frac{b^n}{n^{n/\alpha}} \leq c\Big(2\beta_0\Big(\frac{n}{a\alpha}\Big)^{1/\alpha} + |x|\Big)\frac{b^n n!}{n^{n/\alpha}} \leq$$
$$\leq c\beta^h e^{nh/\alpha}\frac{b^n n!}{n^{n/\alpha}}(1 + |x|)^h = c_0 \frac{b_1^n n!}{n^{n/\alpha}}(1 + |x|)^h,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\beta_0 = \max\Big\{1, \Big(\frac{1}{a\alpha}\Big)^{1/\alpha}\Big\},\ \beta = 2\beta_0,\ c_0 = c\beta^h,\ b_1 = be^{h/\alpha}.$$

Скориставшись формулою Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta/(12n)},\ 0 < \theta < 1,$$

отримаємо, що

$$|f^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}_0 \tilde{b}^n n^{n\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}(1 + |x|)^h,\ \tilde{c}_0 = c\sqrt{2\pi}e,\ \tilde{b} = 2b_1 e^{-1}. \tag{3}$$

Лема доведена.

Нехай a: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна однорідна порядку $\gamma > 1$ ($\gamma \neq 2, 4, 6, \dots$) функція, яка: 1) нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) для похідних функції a справджуються оцінки

$$|a^{(k)}(\xi)| \leq c_k |\xi|^{\gamma - k},\ k \in \mathbb{N},\ \xi \in \mathbb{R} \setminus |[0\},$$

причому послідовність $\{c_k, k \geq 1\}$ задовольняє умову:

$$\exists \tilde{c} > 0\ \exists \tilde{A} > 0\ \forall k \in \mathbb{N}:\ \ c_k \leq \tilde{c}\tilde{A}^k k!;$$

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0 > 0$, $\delta \geq \gamma$ такі, що

$$c_0'|\xi|^\gamma \leq a(\xi) \leq \tilde{c}_0(1 + |\xi|^\delta).$$

Із умов 1) – 3) випливає, що функція a є мультиплікатором у просторі Ψ. Отже, оператор A, який задається правилом $A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]]$, $\varphi \in \Phi$, відображає простір Φ в себе, є лінійним і неперервним.

Говоритимемо, що в просторі Φ задано псевдодифеернціальний оператор нескінченного порядку $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x) \quad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ x \in \mathbb{R} \right)$$

зображає деяку основну функцію з простору Φ.

Теорема. *Якщо функція f задовольняє умову* (1)*, то в просторі Φ визначений і є неперервним псевдодиференіальний оператор нескінченного порядку $f(A) \equiv A_f$.*

Доведення. Нехай $\varphi \in \Phi$,

$$\psi(x) := (f(A)\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (F^{-1}[a(\xi)F[\varphi](\xi)])^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{-1}[a^n(\xi)F[\varphi](\xi)](x).$$

Доведемо, що $\psi \in \Phi$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) випливає, що для доведення твердження досить показати, що $F[\psi] \in \Psi$. Запишемо (поки-що формально) співвідношення

$$F[\psi](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n(\xi) F[\varphi](\xi) = f(a(\xi)) \cdot F[\varphi](\xi). \tag{4}$$

Передусім доведемо, що $f(a)$ – мультиплікатор у просторі Ψ (звідси випливатиме, що a^n є мультиплікатором у просторі Ψ при кожному $n \in \mathbb{N}$). Для цього скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складної функції при $\xi \neq 0$:

$$D_\xi^s f(a(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{da^m} f(a) \sum \frac{s!}{m_1! \dots m_l!} \Big(\frac{1}{1!} \frac{d}{d\xi} a(\xi) \Big)^{m_1} \dots \Big(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\xi^l} a(\xi) \Big)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $m_1 + 2m_2 + \dots + l m_l = s$, $m_1 + \dots + m_l = m$). Для того, щоб уникнути громіздких викладок, розглянемо випадок, коли в умові (1) і оцінці (3) $h = 1$. Урахувавши властивості функцій f та a знайдемо, що

$$\xi \neq 0: \ \ |D_\xi^s f(a(\xi))| \leq \tilde{c}_0 (1+|\xi|) \sum_{m=1}^{s} \tilde{b}^m \sum \frac{s!}{m_!! \dots m_l!} \times$$

$$\times \tilde{c}^{m_1+\dots+m_l} \tilde{A}^{m_1+2m_2+\dots+lm_l} (|\xi|^{\gamma-1})^{m_1} (|\xi|^{\gamma-2})^{m_2} \dots (|\xi|^{\gamma-l})^{m_l} =$$

$$= \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s |\xi|^{\gamma(m_1+\dots+m_l)-(m_1+2m_2+\dots+lm_l)} (1+|\xi|) =$$

$$= \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s |\xi|^{\gamma m - s} (1+|\xi|) = \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s (|\xi|^{\gamma m - s} + |\xi|^{\gamma m + 1 - s}).$$

Отже,

$$\xi \neq 0: \ \ |D_\xi^s f(a(\xi))| \leq \tilde{c} \tilde{c}_0 c_0^s s! \sum_{m=1}^{s} |\xi|^{\gamma m - s} (1+|\xi|), \ c_0 = \max\{1, \tilde{c}\tilde{b}\tilde{A}\}.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то

$$|D_\xi^s f(a(\xi))| \leq 2\tilde{c}\tilde{c}_0 c_0^s s! |\xi|^{-s}, \ s \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то

$$|D_\xi^s f(a(\xi))| \leq \tilde{c}\tilde{c}_0 c_0^s s! |\xi|^{s(\gamma-1)} (1+|\xi|), \ s \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Далі розглянемо випадок, коли $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$ і оцінимо функцію

$$\Lambda(\xi) := \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi)) \tilde{\varphi}(\xi))|, \ \forall \tilde{\varphi} \in \Psi.$$

Урахувавши (5) знайдемо, що

$$\xi \neq 0: \ \ \Lambda(\xi) \leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s |D_\xi^s f(a(\xi))| \cdot |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{\alpha_s}{|\xi|^s} \frac{\tilde{c}_{k-s} c_{k-s}}{|\xi|^{k-s}} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_{k-s} c_{k-s} = c_p, \tag{7}$$

$$\alpha_s = \tilde{c}_0 \tilde{c} c_0^s s!.$$

Тут ми скористалися тим, що $\tilde{\varphi} \in \Psi$, тобто, для довільного $\omega \in \mathbb{Z}_+$ такого, що $\omega \geq k - s$ справджується нерівність

$$\xi \neq 0: \ \ |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\tilde{c}_\omega c_{k-s}}{|\xi|^\omega}. \tag{8}$$

Якщо в останній нерівності покласти $\omega = k - s$, то прийдемо до нерівностей (7). Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (6), (8) знайдемо, що

$$\Lambda(\xi) \leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k (|\xi|^{k(\gamma-1)} + |\xi|^{k(\gamma-1)+1}) \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \frac{\tilde{c}_\omega c_{k-s}}{|\xi|^\omega} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (|\xi|^{k\gamma} + |\xi|^{k\gamma+1}) \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_\omega c_{k-s} |\xi|^{-\omega}.$$

Покладемо $\omega = k([\gamma]+1)+1 > k-s$, $0 \leq s \leq k$. Тоді

$$(|\xi|^{k\gamma} + |\xi|^{k\gamma+1})|\xi|^{-\omega} \leq 2,$$

і

$$\Lambda(\xi) \leq \tilde{c}_p, \ \tilde{c}_p = 2 \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_{k([\gamma]+1)+1} c_{k-s}. \tag{9}$$

Із обмежень на функції f, a та $\tilde{\varphi}$ ($\lim\limits_{\xi \to \pm 0} \tilde{\varphi}^{(k)}(\xi) < +\infty, \forall k \in \mathbb{Z}_+$) випливає також, що

$$\lim_{\xi \to \pm 0} \xi^k D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi)) < \infty.$$

Звідси та з оцінок (7), (8) випливає нерівність

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists L_p > 0 : \ \|f(a)\tilde{\varphi}\|_p \leq L_p < \infty.$$

Це означає, що $f(a) \cdot \tilde{\varphi} \in \Psi$, тобто операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$ визначена в просторі Ψ.

Випадок $h \neq 1$ (h – параметр з умови (1)) досліджується за аналогічною схемою; при цьому використовується очевидна нерівність $(1+|x|^h) \leq (1+|x|)^{[h]+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Доведемо, що операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$ є неперервною у просторі Ψ. Нехай послідовність $\{\tilde{\varphi}_n, n \geq 1\} \subset \Psi$ збігається до нуля в просторі Ψ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall n \geq 1 : \ \|\tilde{\varphi}_n\|_p \leq c_p,$$

і для кожного $\nu \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_\xi^\nu \tilde{\varphi}_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ \forall n \geq n_0 : \ |D_\xi^\nu \tilde{\varphi}_n(\xi)| < \varepsilon, \ \xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}. \tag{10}$$

Аналогічно тому, як це зроблено при доведенні твердження: $f(a)\tilde{\varphi} \in \Psi$, якщо $\tilde{\varphi} \in \Psi$, переконуємося в правильності нерівності

$$\|f(a)\tilde{\varphi}_n\|_p \leq c_p,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

(стала $c_p > 0$ не залежить від n).

Зазначимо, що для $\xi \in \mathbb{K}$ знайдуться сталі d_1, $d_2 > 0$ такі, що $d_1 \leq |\xi| \leq d_2$ (точка $0 \notin \mathbb{K}$). Тоді за допомогою оцінок (5), (6), (10) встановлюємо нерівність

$$|D_\xi^\nu(f(a(\xi))\tilde{\varphi}_n(\xi))| \leq c_\nu \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \xi \in \mathbb{K}.$$

Звідси та з (11) випливає твердження про неперервність операцій $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} \in \Psi$, у просторі Ψ. Цим доведено, що $f(a)$ – мультиплікатор у цьому просторі. Урахувавши цей факт та (4) дістаємо, що $F[\psi] \in \Psi$.

Таким чином, залишається обґрунтувати коректність проведених у співвідношенні (4) перетворень. Для цього досить довести правильність співвідношення:

$$r_{n,\varphi}(\xi) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k a^k(\xi) F[\varphi](\xi) \to 0, n \to \infty,$$

у просторі Ψ, тобто, що

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ :\ \ \|r_{n,\varphi}\|_p \to 0, n \to +\infty.$$

За означенням $\|\cdot\|_p$ маємо, що

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big\{ \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| \Big\}.$$

Запишемо (поки-що формально) співвідношення:

$$L_{m,n}(\xi) := |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| = |\xi|^m \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k D_\xi^m (a^k(\xi) F[\varphi](\xi)) \Big| \leq$$

$$\leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{m} C_m^l |D_\xi^l a^k(\xi)| \cdot |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)|,\ \xi \neq 0.$$

Функцію $|D_\xi^l a^k(\xi)|$ при $\xi \neq 0$ оцінимо за допомогою формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при оцінці похідної $D_\xi^s f(a(\xi))$, $\xi \neq 0$, знайдемо, враховуючи (9), що

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \sum_{i=1}^{l} |D_a^i a^k(\xi)| \times$$

$$\times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_\alpha=i \\ i_1+2i_2+\dots+\alpha i_\alpha=l}} \frac{l!}{i_1!\dots i_\alpha!} \left| \left(\frac{1}{1!} D_\xi^1 a(\xi)\right)^{i_1} \dots \left(\frac{1}{i_\alpha!} D_\xi^\alpha a(\xi)\right)^{i_\alpha} \right| \leq$$

$$\leq l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} a^{k-i}(\xi) (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{i\gamma-l} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_0^k l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{\delta(k-i)+i\gamma-l}.$$

Далі вважаємо, що $|\xi| \geq 1$. Тоді

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \tilde{\tilde{c}}_0^k d_l |\xi|^{\delta k+l\gamma}, \tag{12}$$

$$\tilde{\tilde{c}} = 2\tilde{c}_0, \ d_l = l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} i! \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i;$$

тут врахована нерівність

$$\frac{k!}{(k-i)!} = \frac{k!i!}{(k-i)!i!} \leq 2^k i!.$$

Оскільки $F[\varphi] \in \Psi$, то для $|\xi| \geq 1$ правильною є нерівність

$$|D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_{m-l}\tilde{c}_\nu}{|\xi|^\nu}, \ \nu \geq m-l, \ \tilde{c}_\nu = c_0 B^\nu \nu^\nu. \tag{13}$$

Покладемо в (13) $\nu = \delta k + m(2+[\gamma])$. Тоді

$$L_{m,n}(\xi) \leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k |\xi|^{\delta k} \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l |\xi|^{\gamma l} |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq$$

$$\leq \omega_m \Delta_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k \tilde{c}_{\delta k+m(2+[\gamma])}, \ |\xi| \geq 1,$$

$$\omega_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l, \ \Delta_0 = \max\{c_0, c_1, \dots, c_m\}.$$

Нехай $\tilde{\alpha} := m(2 + [\gamma])$. Тоді $\tilde{c}_{\delta k+\tilde{\alpha}}$ оцінюється так:

$$\tilde{c}_{\delta k+\tilde{\alpha}} \leq c_0' \tilde{B}^k k^{k\delta}, \ c_0' = c_0 B^\alpha (\delta + \tilde{\alpha})^{\tilde{\alpha}}, \ \tilde{B} = B^\delta (\delta + \tilde{\alpha})^\delta e^{\tilde{\alpha}}.$$

Врахувавши останні нерівності знайдемо, що

$$L_{m,n}(\xi) \leq \omega_m c_0' \Delta_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k B_1^k k^{k\delta}, \ B_1 = \tilde{\tilde{c}}_0 \tilde{B}, \ |\xi| \geq 1.$$

Внаслідок (2) для коефіцієнтів Тейлора $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, функції f справджуються оцінки:

$$|c_k| \leq c_0 \frac{b_1^k}{k^{k/\alpha}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Отже, якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{B_2^k}{k^{k(1/\alpha - \delta)}},$$

де $L_1 = c_0 c_0' \Delta_0 \omega_m$, $B_2 = b_1 B_2$; вважаємо також, що $\alpha < 1/\delta$, тобто $\alpha \in (0, 1/\delta) \subset (0, 1)$. При виконанні вказаного обмеження на параметр α ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} B_2^k k^{-k(1/\alpha - \delta)}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ як залишок збіжного ряду. Оскільки для $k \geq k_0$, де $k_0 = [(2B_2)^{1/\omega}] + 1$, $\omega = 1/\alpha - \delta$, справджується нерівність $k^{-k\omega} \leq (2B_2)^{-k}$, то для $n \geq [(2B_2)^{1/\omega}]$ маємо, що

$$L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L_1}{2^n} < +\infty, \ \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то в цьому випадку

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \tilde{\tilde{c}}_0^k d_l \frac{|\xi|^{k-i+i\gamma}}{|\xi|^l} \leq \frac{\tilde{\tilde{c}}_0^k d_l}{|\xi|^l},$$

де $\tilde{\tilde{c}}_0$, d_l – сталі з нерівності (12). Отже,

$$L_{m,n}(\xi) \leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \cdot |\xi|^{-l}, \ \xi \neq 0.$$

Далі скористаємося тим, що при $\xi \neq 0$:

$$|D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_{m-l}}{|\xi|^{m-l}}, \ \lim_{\xi \to \pm 0} D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi) < \infty.$$

Отже, при $\xi \neq 0$:

$$L_{m,n}(\xi) \leq \tilde{\omega}_n \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k, \ \tilde{\omega}_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l c_{m-l}.$$

Залишається ще один раз скористатися оцінками коефіцієнтів Тейлора c_k функції f і в результаті отримаємо, що для $\xi \neq 0$, $|\xi| < 1$

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{B_3^k}{k^{k(1/\alpha-\delta)}}, \ L_2 = c_0 \omega_m, \ B_3 = b_1 \tilde{\tilde{c}}_0.$$

Безпосередньо переконуємося в тому, що для $k \geq \tilde{k}_0$, де $\tilde{k}_0 = [(2B_3)^{1/\omega}] + 1$, $\omega = 1/\alpha - \delta$, справджується нерівність $k^{-k\omega} \leq (2B_3)^{-k}$. Отже, для $n \geq [(2B_3)^{1/\omega}]$

$$L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L_2}{2^n} < +\infty, \ |\xi| < 1, \ \xi \neq 0.$$

Тоді

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L}{2^n}, \ L = \max\{L_1, L_2\},$$

для $n \geq n_0 = \max\{[(2B_2)^{1/\omega}], [(2B_3)^{1/\omega}]\}$. Звідси випливає нерівність

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sum_{m=0}^{p} L_{m,n}(\xi) \leq \sum_{m=0}^{p} \frac{L(m)}{2^n} = \frac{L_p}{2^n} < \infty.$$

Таким чином, $r_{n,\varphi} \in \Psi$ для кожного n і $r_{n,\varphi} \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі Ψ. Цим доведено, що в просторі Φ оператор A_f визначений коректно. Він є також неперервним у цьому просторі.

Справді, нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset \Phi$, $\varphi_n \to 0$ при $n \to +\infty$ у просторі Φ. Тоді із співвідношення (4) випливає, що

$$F[A_f \varphi_n] = f(a) F[\varphi_n] \to 0, \ n \to \infty,$$

у просторі Ψ, оскільки, за доведеним, функція $f(a)$ є мультиплікатором у просторі Ψ. Тоді, внаслідок властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого і оберненого) отримуємо, що

$$A_f\varphi_n = F^{-1}[f(a)F[\varphi_n]] \to 0, n \to \infty,$$

у просторі Φ. Теорема доведена.

Зауваження 2. Із співвідношення (4) випливає, що

$$A_f\varphi = F^{-1}[f(a)F[\varphi]],\ \forall\varphi \in \Phi,$$

тобто A_f – псевдодиференціальний оператор, побудований за символом $f(a)$, негладким у точці 0.

Як приклад, розглянемо функцію $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \dfrac{z^2}{n^\rho}\Big)$, $z \in \mathbb{C}$, $\rho > 2$, яка, як доведено в [6], є цілою, має експоненціальне зростання порядку $\dfrac{2}{\rho} < 1$ в площині $\mathbb{C}$ та експоненціальне спадання порядку $\dfrac{2}{\rho}$ на дійсній осі, тобто f задовольняє умову (1). Тому якщо $1 < \gamma \leq \delta < \rho/2$ (γ, δ – параметри з умов 1) – 3), які задовольняє функція-символ a), то в Φ визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку

$$f(A) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{A^2}{n^\rho}\Big),\ \rho > 2,\ A = F^{-1}[aF].$$

Зауваження 3. Якщо ціла функція f задовольняє умову (1) з параметром $\alpha \geq 1$, а однорідна функція-символ $a(\xi)$, за якою будується псевдодиференціальний оператор A, має порядок однорідності $0 < \gamma < 1$, задовольняє умови 1) – 3) де в умові 3) параметр $\delta \in \Big[\gamma, \dfrac{1}{\alpha}\Big)$, то твердження доведеної теореми залишається правильним і в цьому випадку.

Зазначимо, що тоді в просторі Φ коректно визначені оператори $\cos A$, $\sin A$.

Нехай P – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову:

$$\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ \ \mathrm{Re}P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Тоді

$$|e^{P(x)}| = e^{\mathrm{Re}P(x)} \le e^{-c|x|^{2b}}, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0 \; \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \;\; |e^{P(z)}| \le e^{|P(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Скориставшись рядом теорем з [6], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа одержимо, що функція $e^{P(z)}$ в комплексній площині задовольняє також нерівність

$$|\exp\{P(z)\}| \le c_0 \exp\{-c_2|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}\}$$

з деякими сталими $c_0, c_2, c_3 > 0$. Отже, функція $f(z) = \exp\{P(z)\}$ задовольняє умову (1) з параметрами $\alpha = 2b, h = 0$, і в просторі Φ визначені та є неперервними оператори $f(A) = \exp\{P(A)\}$, $f(A) = \exp\{tP(a)\}$, де $t > 0$ – фіксований параметр. У цьому випадку розв'язок еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \tag{14}$$

формально можна записати у вигляді $u(t, x) = c\exp\{tP(A)\}\varphi(x)$, де $\varphi \in \Phi$, $c = \mathrm{const}$, і досліджувати задачу Коші та багатоточкові за часом задачі для рівняння (14) за допомогою операторного методу. До рівнянь (14) належить також еволюційне рівняння $\partial u/\partial t + A^2u = 0$, $A^2 = F^{-1}[a^2F]$ (тут $P(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$).

Література

[1] *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболыческих псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60-69.

[2] *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198–203.

[3] *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1976. – № 7. – С. 1296–1301.

[4] *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковсике процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.

[5] *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

[6] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.