Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 113–122

УДК 517.935;519.718

Нові критерії стійкості і локалізації спектра лінійних систем

О.Г. Мазко

Інститут математики НАН України, Київ; mazko@imath.kiev.ua

Предлагаются новые необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и локализации собственных значений линейных автономных систем. Их практическая реализация сводится к решению двух скалярных неравенств относительно симметричной положительно определенной матрицы. В качестве следствия для линейных систем управления приводится методика построения множества стабилизирующих обратных связей по измеряемому выходу.

New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability and the spectrum localization of linear autonomous systems are proposed. Applying the conditions reduces to solving two scalar inequalities with respect to a symmetric positive definite matrix. As a corollary for linear control systems, the methods for constructing a set of stabilizing measurable output feedbacks are presented.

1 Вступ

При проектуванні об'єктів нової техніки значна увага приділяється методам аналізу стійкості та стабілізації лінеаризованих неперервних або дискретних моделей систем керування. Із сучасними та класичними методами теорії стійкості та стабілізації лінійних динамічних систем можна ознайомитись, наприклад, в [1, 2].

В даній роботі пропонуються нові необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості та локалізації власних значень лінійних автономних систем. Їх практичне застосування зводиться до розв'язування двох скалярних нерівностей відносно симетричної додатно визначеної матриці. Як наслідок для лінійних систем керування наводиться методика побудови множини стабілізуючих керувань у вигляді зворотного зв'язку по вимірюваному виходу.

Будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) — простір дійсних (комплексних) матриць розмірів $n \times m$, I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$; X^* (X^T) — комплексно спряжена (транспонована) матриця для матриці X; $X > 0$ ($X \geq 0$) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\}$ — інерція ермітової матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності; $\lambda_{\max}(X)$ ($\lambda_{\min}(X)$) — максимальне (мінімальне) власне значення ермітової матриці X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; $\rho(A)$ — спектральний радіус матриці A; $\mathrm{tr}A$ — слід (сума діагональних елементів) матриці A; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x.

2 Допоміжні результати

Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ введемо скалярну функцію

$$\mu(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - (n-1)\,\mathrm{tr}A^2. \qquad (1)$$

Лема 2.1 *Нехай матриця* A *має дійсний спектр* $\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *і виконується нерівність* $\mu(A) > 0$*. Тоді всі власні значення* α_i *додатні (від'ємні) в тому і лише в тому випадку, коли* $\mathrm{tr}A > 0$ *(*$\mathrm{tr}A < 0$*). Якщо ж* $\mu(A) \geq 0$*, то всі власні значення* α_i *невід'ємні (недодатні) в тому і лише в тому випадку, коли* $\mathrm{tr}A \geq 0$ *(*$\mathrm{tr}A \leq 0$*).*

Доведення. Оскільки слід матриці збігається з сумою її власних значень, то функція $\mu(A)$ представляється у вигляді

$$\mu(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - (n-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

Для фіксованого індексу k ($1 \leq k \leq n$) маємо

$$trA = \alpha_k + d_k, \quad \mu(A) = 2\alpha_k d_k - (n-2)\alpha_k^2 - w_k, \qquad (2)$$

де

$$d_k = \sum_{i\neq k} \alpha_i, \quad w_k = (n-1)\sum_{i\neq k} \alpha_i^2 - d_k^2 = v^T E v \geq 0,$$

$$E = \begin{bmatrix} n-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-2 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-2 \end{bmatrix} = (n-1)I_{n-1} - ee^T,$$

$v^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n]$, $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$. Можна встановити, що E – невід'ємно визначена матриця з інерцією $i(E) = \{n-2, 0, 1\}$, причому,

$$w_k = \sum_{i<j, i \neq k, j \neq k} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \geq 0.$$

Згідно з (2) маємо нерівність $\alpha_k > 0$ ($\alpha_k \geq 0$) для кожного $k = \overline{1,n}$, якщо $\mathrm{tr}A > 0$ і $\mu(A) > 0$ ($\mathrm{tr}A \geq 0$ і $\mu(A) \geq 0$). Аналогічно, якщо $\mathrm{tr}A < 0$ і $\mu(A) > 0$ ($\mathrm{tr}A \leq 0$ і $\mu(A) \geq 0$), то $\alpha_k < 0$ ($\alpha_k \leq 0$) для кожного $k = \overline{1,n}$.

Лему доведено.

Наслідок 2.1 *Нехай $Y = Y^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — ермітова матриця і виконується нерівність $\mu(Y) > 0$. Тоді вона додатно (від'ємно) визначена в тому і лише в тому випадку, коли $\mathrm{tr}\, Y > 0$ ($\mathrm{tr}\, Y < 0$). Якщо ж $\mu(Y) \geq 0$, то матриця Y невід'ємно (недодатно) визначена в тому і лише в тому випадку, коли $\mathrm{tr}\, Y \geq 0$ ($\mathrm{tr}\, Y \leq 0$).*

Лема 2.2 *Якщо ермітові матриці $X = X^*$ та $Y = Y^*$ задовольняють умови*

$$\mathrm{tr}\ X \cdot \mathrm{tr}\ Y \geq 0, \quad \mu(X) > 0, \quad \mu(Y) \geq 0, \tag{3}$$

то $\mu(X + Y) > 0$.

Доведення. Враховуючи співвідношення (3), маємо

$$\begin{aligned}
[\mathrm{tr}(X+Y)]^2 &= (\mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y)^2 = (\mathrm{tr}X)^2 + (\mathrm{tr}Y)^2 + 2\mathrm{tr}X \cdot \mathrm{tr}Y > \\
&> (n-1)\mathrm{tr}X^2 + (n-1)\mathrm{tr}Y^2 + 2(n-1)\sqrt{\mathrm{tr}X^2 \cdot \mathrm{tr}Y^2} \geq \\
&\geq (n-1)(\mathrm{tr}X^2 + \mathrm{tr}Y^2 + 2|\mathrm{tr}(XY)|) \geq \\
&\geq (n-1)\mathrm{tr}(X+Y)^2,
\end{aligned}$$

тобто $\mu(X + Y) > 0$. Тут використана також нерівність Коші–Буняковського для ермітових матриць [3]

$$|\mathrm{tr}\ (XY)|^2 \leq \mathrm{tr}\ X^2 \cdot \mathrm{tr}\ Y^2.$$

Лему доведено.

Зауваження 2.1 Із тотожності Лагранжа [3] випливає, що для матриці A з дійсним спектром функція $\mu(A)$ має таке представлення:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 .$$

Зазначимо також, що лему 2.1 можна узагальнити, використовуючи функції

$$\mu_\nu(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - \nu\,\mathrm{tr}A^2,$$

$$\mu_*(A) = \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}A^* - \nu\,\mathrm{tr}(AA^*) \equiv \mu_\nu(A_R) + \mu_\nu(A_I),$$

де $A_R = (A + A^*)/2$, $A_I = (A - A^*)/(2i)$, $\nu \in \mathbb{R}^1$ — дійсне число. Наприклад, можна довести, що кількість власних значень матриці A з від'ємними дійсними частинами більша числа ν, якщо

$$\mathrm{tr}A_R < 0, \quad \mu_\nu(A_R) > 0, \quad 0 \le \nu < n. \tag{4}$$

3 Умови асимптотичної стійкості і стабілізації лінійних систем

Теорема 3.1 *Лінійна система*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для деякої симетричної додатно визначеної матриці $X = X^T > 0$ *виконуються нерівності*

$$\mathrm{tr}(AX) < 0, \quad \mu(AX + XA^T) > 0. \tag{6}$$

Доведення. За теоремою Ляпунова система (5) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для довільної матриці $Y = Y^T < 0$ існує єдиний розв'язок $X = X^T > 0$ матричного рівняння

$$AX + XA^T = Y. \tag{7}$$

Якщо матриця $X = X^T > 0$ задовольняє умови (6), то для матриці Y типу (7) виконуються умови від'ємної визначеності в наслідку 2.1 і, отже, система асимптотично стійка. Навпаки, якщо система (5) асимптотично стійка, то існує матриця $X = X^T > 0$, що задовольняє нерівності (6). Дійсно, множина від'ємно визначених матриць

$Y = Y^T < 0$, які задовольняють нерівність $\mu(Y) > 0$, не порожня. Наприклад, можна покласти $Y = \alpha I_n$, $\alpha < 0$. При цьому $\operatorname{tr} Y = n\alpha < 0$, $\mu(Y) = n\alpha^2 > 0$, $\operatorname{tr}(AX) = n\alpha/2 < 0$, де $X = X^T > 0$ — розв'язок рівняння Ляпунова (7), тобто виконуються нерівності (6).

Теорему доведено.

Наведемо наслідки леми 2.2 і теореми 3.1.

Наслідок 3.1 *Нехай для деякої матриці* $X = X^T > 0$ *виконуються умови* (6). *Тоді лінійна система*

$$\dot{x} = (A + \Delta)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

асимптотично стійка для довільної матриці Δ *такої, що*

$$\operatorname{tr}(\Delta X) \le 0, \quad \mu(\Delta X + X\Delta^T) \ge 0. \tag{9}$$

Доведення. Враховуючи умови (6), (9) і лему 2.2, маємо нерівності $\operatorname{tr}[(A+\Delta)X] < 0$ і $\mu(Y) > 0$, де $Y = (A+\Delta)X + X(A+\Delta)^T$. Отже, за теоремою 3.1 система (8) асимтотично стійка.

Наслідок доведено.

Розглянемо лінійну систему керування

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = Ky, \tag{10}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і виходу системи, A, B, C і K — сталі матриці відповідних розмірів.

Сформулюємо наслідок 3.1 для системи (10) у випадку $\Delta = BKC$.

Наслідок 3.2 *Нехай для деяких матриць* K_* *і* $X = X^T > 0$ *виконуються умови*

$$\operatorname{tr}(A_* X) < 0, \quad \mu(A_* X + X A_*^T) > 0, \tag{11}$$

де $A_* = A + BK_*C$. *Тоді для кожної матриці зворотного зв'язку* $K = K_* + \widetilde{K} \in \mathbb{R}^{m\times l}$ *такої, що*

$$\operatorname{tr}(CXB\widetilde{K}) \le 0, \quad \mu(B\widetilde{K}CX + XC^T\widetilde{K}^T B^T) \ge 0, \tag{12}$$

замкнена система керування (10) *асимптотично стійка.*

Скалярні нерівності (12) описують деяку область асимптотичної стійкості системи керування (10) у матричному просторі коефіцієнтів підсилення K зворотного зв'язку. При цьому $v(x) = x^T X^{-1} x$ є спільною функцією Ляпунова для відповідної сім'ї систем.

Приклад 3.1 Розглянемо нелінійну систему рівнянь, яка описує динаміку маятника з маховиковим керуванням,

$$E\dot{x} = A(x)x + B\,u, \quad y = Cx, \quad u = Ky, \tag{13}$$

де

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1\chi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J\chi & J_r + \chi J_m \\ 0 & J_r\chi + J_m\chi^2 & J_r + J_m\chi^2 \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (m_0 b + m_1 h)g\chi\,\varphi(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\psi) = \frac{\sin\psi}{\psi}, \quad C = I_3.$$

Тут $J = J_v + J_r + J_m + m_1 h^2$ — повний момент інерції системи "маятник–маховик–двигун", $\varphi(\psi)$ — неперервна функція. Візьмемо такі значеннями параметрів [4]:

$$m_0 = 1\,\text{кг}, \;\; m_1 = 3\,\text{кг}, \;\; b = 0,1\,\text{м}, \;\; h = 0,13\,\text{м},$$

$$J_v = 0,0392\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \;\; J_m = 0,03\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \;\; J_r = 0,0001\,\text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$\chi = 0,1, \;\; c_1 = 0,08\,\text{Н}\cdot\text{м/В}, \;\; c_2 = 0,0076\,\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

В околі нульового положення рівноваги маятника функція $\varphi(\psi) \approx 1$. Лінійне наближення замкненої системи (13) в околі точки $x = 0$ запишемо у вигляді

$$E\dot{x} = Mx, \tag{14}$$

де $M = A(0) + BK$. Система (14) з невиродженою матрицею E асимптотично стійка лише тоді, коли сумісна система матричних нерівностей

$$MXE^T + EXM^T < 0, \quad X = X^T > 0. \tag{15}$$

При цьому нульове положення рівноваги системи (13) також асимптотично стійке.

Використовуючи систему Mathcad, знаходимо матриці

$$X = \begin{bmatrix} 1,614 & -0,048 & -30,7606 \\ -0,048 & 49,5901 & -441,8941 \\ -30,7606 & -441,8941 & 6082,4 \end{bmatrix} > 0,$$

$$K_* = [14,1388 \;\; 1,856 \;\; 1,0375],$$

які задовольняють умови

$$\mathrm{tr}(MXE^T) = -0.0963 < 0, \quad \mu(MXE^T + EXM^T) = 0,0002 > 0,$$

де $M = A(0) + BK_*$. При цьому $\sigma(F) = \{-5,0585; -2,3712 \pm 3,4193i\}$, де $F(\lambda) = M - \lambda E$ — пучок матриць, є спектром системи (14).

Отже, виконуються нерівності (15) і нульове положення рівноваги нелінійної системи (13) з керуванням $u = K_* x$ асимптотично стійке.

Зазначимо, що для класу систем типу (14), не розв'язаних відносно похідних, при умові регулярності $\det(M - \lambda E) \not\equiv 0$ можна сформулювати достатні умови асимптотичної стійкості в термінах функцій сліду деяких матриць, використовуючи наслідок 2.1 і систему лінійних матричних нерівностей

$$MXE^T + EXM^T + EYE^T \leq 0, \quad EXE^T \geq 0. \qquad (16)$$

При цьому матриця E може бути виродженою. Якщо деякі матриці $X = X^T$ і $Y = Y^T > 0$ задовольняють співвідношення (16), то система (14) асимптотично стійка. Критерієм асимптотичної стійкості даної системи є існування розв'язків системи нерівностей (16) у вигляді [5]

$$X = Z\widehat{X}Z^T, \quad Y = Z\widehat{Y}Z^T, \quad \widehat{Y} > 0,$$

де Z — розв'язок максимального рангу алгебраїчної системи

$$MZE = EZM, \quad Z = ZEZ.$$

Дані твердження можна встановити за допомогою канонічної форми Кронекера регулярного пучка матриць $M - \lambda E$ [6].

4 Локалізація та дихотомія спектра матриці відносно аналітичних кривих

Нехай аналітична крива Λ_0 розділяє комплексну площину $\mathbb{C}^1$ на дві відкриті непорожні області Λ_+ і Λ_-:

$$\Lambda_0 = \{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) = 0\},\ \ \Lambda_+ = \{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) > 0\},\ \ \Lambda_- = \{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) < 0\},$$

де $f(\lambda,\overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}$ — ермітова функція, що побудована із аналітичних функцій $f_i(\lambda)$ і коефіцієнтів ермітової матриці $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_1^r$. Наприклад, якщо

$$f_1(\lambda) \equiv 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то $f(\lambda,\overline{\lambda}) = 2(\mathrm{Re}\lambda - \alpha)$ і Λ_0 є вертикальною прямою $\mathrm{Re}\lambda = \alpha$, яка ділить комплексну площину на дві напівплощини $\Lambda_\pm$. Якщо

$$f_1(\lambda) \equiv 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda - \lambda_0, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

то $f(\lambda,\overline{\lambda}) = r^2 - |\lambda - \lambda_0|^2$ і Λ_0 описує коло радіуса r з центром в точці λ_0.

Поставимо у відповідність матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і функції f лінійний оператор у просторі матриць $\mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\mathbf{M} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \mathbf{M}X = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(A) X f_j^*(A), \tag{17}$$

де $f_i(A)$ — аналітичні функції від матриці A. Очевидно, що даний оператор зберігає підпростір ермітових матриць. Критерієм оборотності оператора (17) є система нерівностей $f(\lambda_i,\overline{\lambda_j}) \neq 0$, $i,j = \overline{1,n}$, де $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ — спектр матриці A [7]. Якщо оператор (17) оборотний, то виконується умова дихотомії спектра $\sigma(A)$ відносно кривої Λ_0, тобто $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \emptyset$.

Використовуючи узагальнені теореми Ляпунова та Островського–Шнайдера (див., наприклад, [5, гл. 1]) та враховуючи наслідок 2.1, маємо такі твердження.

Теорема 4.1 *Нехай для деякої матриці* $X = X^*$ *сумісна система нерівностей*
$$\operatorname{tr}\mathbf{M}X > 0, \quad \mu(\mathbf{M}X) > 0, \tag{18}$$
Тоді виконуються наступні твердження:

1) $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \emptyset$*;*

2) *якщо* $X > 0$*, то* $\sigma(A) \subset \Lambda_+$*;*

3) *якщо* $i_+(\Gamma) = 1$*, то* $i_0(X) = 0$*;*

4) *якщо* $i_+(\Gamma) = i_-(\Gamma) = 1$*, то в областях* Λ_+ *і* Λ_- *знаходяться відповідно* $i_+(X)$ *і* $i_-(X)$ *власних значень матриці* A*, враховуючи кратності.*

Зауваження 4.1 Якщо оператор $\mathbf{M}$ оборотний, то система нерівностей (18) сумісна відносно $X = X^*$. Наприклад, розв'язок матричного рівняння
$$\mathbf{M}X = Y, \tag{19}$$
де $Y = \alpha I_n$, $\alpha > 0$, задовольняє нерівності (18). Якщо $i_+(\Gamma) = 1$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_+$ в тому і лише в тому випадку, коли оператор $\mathbf{M}$ позитивно оборотний, тобто для довільної матриці $Y = Y^* > 0$ рівняння (19) має розв'язок $X = X^* > 0$ ([5, с. 165]). В [5] виділено також максимальний клас ермітових функцій $\mathcal{F}_0^m$, що містить функції f з обмеженням $i_+(\Gamma) = 1$ і для якого виконується наведений критерій включення $\sigma(A) \subset \Lambda_+$.

Отже, маємо наступний критерій локалізації спектра матриці.

Теорема 4.2 *Якщо* $i_+(\Gamma) = 1$*, то всі власні значення матриці* A *знаходяться в області* Λ_+ *тоді і лише тоді, коли система нерівностей* (18) *має розв'язок* $X = X^* > 0$*.*

Зауваження 4.2 Умови локалізації, дихотомії і розподілу спектра матриці A в теоремах 4.1 і 4.2 можна послабити, використовуючи властивості типу керованості пари матриць (A, Y), де $Y = \mathbf{M}X \geq 0$ [5, гл. 1, п. 8]. Наприклад, в твердженні 2) теореми 4.1 замість умов (18) можна використовувати співвідношення
$$\operatorname{tr}\mathbf{M}X > 0, \quad \mu(\mathbf{M}X) \geq 0, \quad \operatorname{tr}\mathbf{W}X > 0, \quad \mu(\mathbf{W}X) > 0,$$
де
$$\mathbf{W}X = (\mathbf{M}X)^2 + A(\mathbf{M}X)^2A^* + \cdots + A^{n-1}(\mathbf{M}X)^2A^{n-1*}.$$

5 Висновок

В роботі отримано нові необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості та локалізації власних значень лінійних автономних систем. Їх практична реалізація є досить проста і зводиться до розв'язування двох скалярних нерівностей відносно симетричної додатно визначеної матриці. Як наслідок, для лінійних систем керування наводиться методика побудови множини стабілізуючих керувань у вигляді зворотного зв'язку по вимірюваному виходу.

[1] *Liao X., Wang L., Yu P.* Stability of Dynamical Systems // Monograph Series on Nonlinear Sience and Complexity / Eds. A.C.J. Luo and G. Zaslavsky. — Amsterdam et al.: Elsevier, 2007. — Vol. 5. — 706 p.

[2] *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 2002.— 308 с.

[3] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

[4] *Андриевский Б. Р.* Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН, 2009. — Вып. 24. — С. 258–280.

[5] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 1999. — **28**. — 216 с.

[6] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[7] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.