Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 123–144

УДК 517.93;519.711

Стабілізація механічних систем з невизначеними параметрами *

О.Г. Мазко, Л.В. Богданович

Інститут математики НАН України, Київ; mazko@imath.kiev.ua

Работа посвящена разработке новых методов анализа робастной устойчивости, стабилизации и оптимизации состояний равновесия механических объектов, описываемых с помощью дифференциальных систем второго порядка в форме Лагранжа с обратной связью по измеряемому выходу. При этом вектор измеряемого выхода формируется в виде линейных комбинаций компонент как фазовых переменных, так и управления. Для семейства нелинейных механических систем с неопределенными матрицами коэффициентов и обратной связи формулируются достаточные условия асимптотической устойчивости состояния равновесия с общей квадратичной функцией Ляпунова. Предлагается методика робастной стабилизации и оценки квадратичного критерия качества семейства нелинейных систем в форме Лагранжа. Применение полученных результатов сводится к решению систем линейных матричных неравенств. Приводится пример стабилизации маятника на подвижной платформе.

The paper is devoted to working out new methods for analysis of robust stability, stabilization and optimization of the equilibrium states of mechanical objects described by second order differential systems in the Lagrange form with the measuring output feedback control vector. Herewith, the vector is a linear combination of the phase and control components. Sufficient asymptotic stability conditions of the equilibrium state are formulated with the joint quadratic Lyapunov function for a family of nonlinear mechanical systems with uncertain coefficient matrices and a measured output feedback. The methods of robust stabilization and evaluation of the quadratic performance criterion are proposed for a family of nonlinear Lagrange's systems. Applying the results reduces to solving systems of linear matrix inequalities. An example of stabilization of pendulum with a mobile platform is presented.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

1 Вступ

Багато механічних керованих об'єктів описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$A_2(\cdot)\ddot{x} + A_1(\cdot)\dot{x} + A_0(\cdot)x = B_0(\cdot)u, \quad y = C_0(\cdot)x + C_1(\cdot)\dot{x} + D(\cdot)u, \quad (1)$$

де x і $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектори узагальнених координат та швидкостей, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор керування, $y \in \mathbb{R}^l$ — вектор вимірюваного виходу, а матричні коефіцієнти A_0, A_1, A_2, B_0, C_0, C_1 і D відповідних розмірів $n\times n$, $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, $l\times n$, $l\times n$, $l\times m$ можуть неперервно залежати від x, $\dot{x}$ і t в околі ізольованого стану рівноваги $x = \dot{x} = 0$ при $t \geq 0$. В подальших викладках матриця A_2 не залежить від часу t.

В системі (1) матриці описують такі механічні характеристики:

- $A_2 = A_2^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матриця інерції (мас),
- $A_1 = \Theta + \Xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матриця дисипативних ($\Theta = \Theta^T$) та гіроскопічних ($\Xi = -\Xi^T$) сил,
- $A_0 = \Pi + \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матриця потенціальних ($\Pi = \Pi^T$) та неконсервативних ($\Psi = -\Psi^T$) сил,
- $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матриця зовнішніх (керуючих) сил,
- $C_0 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$ і $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$ — матриці спостереження відповідно узагальнених координат, швидкостей та керування.

Однією з основних задач для системи (1) є побудова керування у вигляді статичного зворотного зв'язку по виходу, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги. Ця задача відноситься до категорії складних задач теорії керування [1]. Навіть властивості керованості і спостережуваності системи не гарантують для неї існування статичного стабілізуючого регулятора по виходу. В таких випадках в задачах стабілізації застосовуються динамічні регулятори або статичний зворотний зв'язок по стану спостерігача, що асимптотично відтворює стан системи (див., наприклад, [2,3]). З оглядом відомих методів стабілізації лінійних систем за допомогою статичного зворотного зв'язку по виходу можна ознайомитись в [4, 5].

На практиці важливе значення мають робастні стабілізатори для систем типу (1), тобто такі статичні або динамічні регулятори, які забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги за умов невизначеності матричних коефіцієнтів. Як множини невизначеності використовуються матричні інтервали, політопи, афінні та еліпсоїдальні сім'ї матриць тощо. Для опису невизначеності та умов робастної стійкості систем в напівупорядкованому просторі можна використовувати конусні інтервали [6, 7]. У багатьох роботах в термінах лінійних матричних нерівностей (ЛМН) отримано достатні умови стійкості лінійних керованих систем з невизначеними матрицями коефіцієнтів і зворотного зв'язку по вимірюваному виходу. З оглядом задач і відомих методів аналізу робастної стійкості і стабілізації систем керування зі зворотним зв'язком можна ознайомитися в роботах [1, 5].

Дана робота присвячена розробці нових методів аналізу робастної стійкості, стабілізації та оптимізації станів рівноваги класу нелінійних механічних систем керування типу (1) за допомогою статичного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу, що містить компоненти як фазових змінних, так і керування. Використовуючи і розвиваючи результати робіт [3,8,9], формулюються достатні умови стійкості ізольованого стану рівноваги сім'ї механічних систем керування з невизначеними матрицями коефіцієнтів і зворотного зв'язку по вимірюваному виходу. Також будуються спільна функція Ляпунова і верхня оцінка квадратичного функціонала якості. В результаті пропонуються нові методи оптимізації даної сім'ї систем. Практичне застосування одержаних результатів зводиться до знаходження розв'язків систем диференціальних або алгебраїчних ЛМН. Для розв'язання ЛМН зі сталими матрицями можуть бути використані достатньо ефективні засоби у вигляді LMI toolbox комп'ютерної системи Matlab.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$; $X = X^T > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця X; $i(X) = \{i_+, i_-, i_0\}$ — інерція ермітової матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності; $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ — максимальне (мінімальне) власне значення ермітової матриці X; $\rho(A)$ — спектральний радіус матриці A; trA — слід (сума діагональних елементів) матриці A; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) з вершинами $A_1, \dots, A_\nu$ у просторі матриць вигляду

$$\mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\} = \Big\{A = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i : \;\; \alpha_i \geq 0, \; i = \overline{1, \nu}, \; \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1\Big\}.$$

2 Допоміжні результати

Для заданих матриць $D, U, V, W = W^T \le 0$ і $R = R^T \ge 0$ відповідних розмірів $l \times m$, $m \times n$, $l \times n$, $n \times n$ і $m \times m$ введемо нелінійні оператори

$$\mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K, \tag{2}$$

$$\mathcal{F}(K) = W + U^T\mathcal{D}(K)V + V^T\mathcal{D}^T(K)U + V^T\mathcal{D}^T(K)\,R\,\mathcal{D}(K)V, \tag{3}$$

які визначені на множині матриць $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \ne 0\}$. Введемо також еліпсоїдальну множину матриць

$$\mathcal{K} = \{K : K^TPK \le Q\}, \tag{4}$$

де $P = P^T > 0$ і $Q = Q^T > 0$ — додатно визначені матриці відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$.

Неважко встановити такі властивості оператора $\mathcal{D}(K)$:

1) $\mathcal{D}(K) \equiv K[I_l + D\mathcal{D}(K)]$, $I_l + D\mathcal{D}(K) \equiv (I_l - DK)^{-1}$, $K \in \mathcal{K}_D$;
2) якщо $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_D$, то $K_3 = (I_m - K_1D)^{-1}K_2 \in \mathcal{K}_D$ і

$$\mathcal{D}(K_1 + K_2) \equiv \mathcal{D}(K_1) + \mathcal{D}(K_3)\,[I_l + D\mathcal{D}(K_1)];$$

3) якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $K_* = -\mathcal{D}(K) \in \mathcal{K}_D$ і $\mathcal{D}(K_*) = -K$.

Лема 2.1 [8] *Якщо виконуються матричні нерівності*

$$D^TQD + R < P, \quad \Omega = \left[\begin{array}{c|cc} W & U^T & V^T \\ \hline U & R-P & D^T \\ V & D & -Q^{-1} \end{array}\right] \le 0 \ (< 0), \tag{5}$$

то $\mathcal{F}(K) \le 0$ (< 0) *для довільної матриці* $K \in \mathcal{K}$.

Зазначимо, что дана лема є узагальненням твердження достатності критерію, відомого як лема Пітерсена про матричну невизначеність [11] (див. також [12]). Згідно з [11], для довільної матриці $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ з обмеженою нормою $\|K\| = (\lambda_{\max}(K^TK))^{1/2} \le 1$ виконується матрична нерівність $\mathcal{F}(K) = W + U^TKV + V^TK^TU < 0$ тоді і лише тоді, коли існує $\varepsilon > 0$ таке, що $W + \varepsilon^{-1}U^TU + \varepsilon V^TV < 0$. Останнє співвідношення можна подати у блочному вигляді

$$\Omega = \begin{bmatrix} W & U^T & V^T \\ U & -\varepsilon I_m & 0 \\ V & 0 & -\varepsilon^{-1}I_l \end{bmatrix} < 0,$$

а вимога $\|K\| \le 1$ виконується, якщо $K^T K \le I_l$. Якщо покласти в лемі 2.1 $D = 0$, $R = 0$, $P = \varepsilon I_m$ і $Q = \varepsilon I_l$, де $\varepsilon > 0$ — деяке число, то маємо твердження достатності леми Пітерсена.

Лема 2.2 *Нехай виконується система матричних нерівностей*

$$Y + A_i^T Z + Z^T A_i + A_i^T X A_i \le 0 \ (< 0) \quad i = \overline{1, \nu}, \tag{6}$$

де $X = X^T \ge 0$, $Y = Y^T$, Z *і* A_i *— задані матриці розмірів* $n \times n$. *Тоді для довільної матриці* $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$

$$Y + A^T Z + Z^T A + A^T X A \le 0 \ (< 0). \tag{7}$$

Доведення. Для довільних чисел $\alpha_i \ge 0$, в сумі рівних 1, введемо такі позначення:

$$A = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i, \quad a = [\alpha_1, \dots, \alpha_\nu]^T, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}.$$

Помножимо на α_i і підсумуємо нерівності (6), отримаємо

$$Y + A^T Z + Z^T A + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i^T X A_i \le 0.$$

Далі, перетворимо вираз

$$S = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i^T X A_i - A^T X A = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_i^T X A_j = \mathcal{A}^T (\Gamma \otimes X) \mathcal{A}, \tag{8}$$

де $\mathcal{A}^T = [A_1^T, \dots, A_\nu^T]$, $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^{\nu} = \Lambda - aa^T$, $\otimes$ — символ кронекерового добутку матриць. Оскільки $\Gamma \ge 0$ [13, лема 1] і $X \ge 0$, то $\Gamma \otimes X \ge 0$ і, як наслідок, $S \ge 0$, що забезпечує виконання матричної нерівності (7). Причому, нерівність (7) буде строгою, якщо всі нерівності системи (6) є також строгими.

Лему доведено.

Із формули (8) і [13, лема 1] випливає наступне твердження.

Лема 2.3 *Якщо* $X = X^T \ge 0$, *то для довільних вектора* $x \in \mathbb{R}^n$ *і матриці* $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ *виконується нерівність*

$$x^T A^T X A x \le \max_{1 \le k \le \nu} x^T A_k^T X A_k x.$$

Розглянемо нелінійну диференціальну систему, не розв'язану відносно похідних,

$$E(x)\dot{x} = A(x,t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

де E і A — матриці розмірів $n \times n$, причому, залежність E від x і A від x і t неперервна в околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$ при $t \geq 0$ і така, що $x = 0$ — єдиний в $\mathcal{S}_0$ стан рівноваги системи.

Лема 2.4 *Ізольований стан рівноваги $x = 0$ системи* (9) *асимптотично стійкий, якщо для деяких $\varepsilon_i > 0$ (i=0,1,2) і неперервно-диференційовної симетричної матриці $X = X(t)$ виконується система співвідношень*

$$\varepsilon_1 I_n \leq X \leq \varepsilon_2 I_n, \tag{10}$$

$$E_0^T \dot{X} E_0 + E_0^T X A_0 + A_0^T X E_0 + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \tag{11}$$

де $E_0 = E(0)$, $A_0 = A(0,t)$ і $t \geq 0$.

Доведення. Для виконання нерівності (11) необхідно, щоб матриця E_0 була невиродженою. Інакше, множення справа та зліва даної нерівності відповідно на v і v^T, де $v \neq 0$ — власний вектор матриці E_0, що відповідає її нульовому власному значенню, приводить до суперечності. Невиродженою повинна бути також матриця $E(x)$, неперервно залежна від x в деякому околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$.

Побудуємо функцію Ляпунова для системи (9) у вигляді $v(x) = x^T E_0^T X E_0\, x$, де X — додатно визначена симетрична матриця, що задовольняє умови (10). Аналогічні умови виконуються також для матриці $E_0^T X E_0$, оскільки E_0 — невироджена матриця. За другою теоремою Ляпунова стан $x = 0$ системи (9) рівномірно асимптотично стійкий, якщо для деякого $\varepsilon > 0$ похідна в силу системи задовольняє нерівність

$$\dot{v}(x) = x^T [E_0^T \dot{X} E_0 + F^T E_0^T X E_0 + E_0^T X E_0 F)] x \leq -\varepsilon \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де $F(x,t) = E^{-1}(x) A(x,t)$. Для досягнення даної нерівності достатньо виконання функціональної матричної нерівності

$$\Omega(x,t) = E_0^T \dot{X} E_0 + F^T E_0^T X E_0 + E_0^T X E_0 F \leq -\varepsilon I_n, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0,$$

яка означає, що $\sup\limits_{x \in \mathcal{S}_0, t \geq 0} \omega(x,t) \leq -\varepsilon$, де $\omega(x,t) = \lambda_{\max}(\Omega(x,t))$. Оскільки залежність $\Omega(x,t)$ неперервна при $x \in \mathcal{S}_0$ і $t \geq 0$, то остання нерівність є наслідком умови

$$\omega(0,t) = \lambda_{\max}(E_0^T \dot{X} E_0 + A_0^T X E_0 + E_0^T X A_0) \leq -\varepsilon_0, \quad t \geq 0,$$

де $\varepsilon_0 > \varepsilon$, тобто лінійної матричної нерівності (11).

Лему доведено.

При застосуванні леми 2.4 додатно визначену матрицю X іноді можна шукати сталою. Наприклад, якщо система (9) автономна, тобто матриця A не залежить від t, то замість (10) і (11) можна використовувати достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги у вигляді алгебраїчних матричних нерівностей

$$E_0^T X A_0 + A_0^T X E_0 < 0, \quad X = X^T > 0. \tag{12}$$

3 Робастна стабілізація механічних систем

Подамо механічну систему керування (1) у вигляді

$$E(z)\dot{z} = A(z,t)z + B(z,t)u, \quad y = C(z,t)z + D(z,t)u, \tag{13}$$

де $z = [x^T, \dot{x}^T]^T$ — вектор повного стану системи,

$$E = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n\times n} \\ \hline 0_{n\times n} & A_2 \end{array}\right], A = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n\times n} & I_n \\ \hline -A_0 & -A_1 \end{array}\right], B = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ B_0 \end{bmatrix}, C = [C_0, C_1].$$

Побудуємо множину стабілізуючих керувань для системи (13) у вигляді статичного зворотного зв'язку:

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K}_* = \left\{ K_* + \widetilde{K} : \ \widetilde{K} \in \mathcal{K} \right\}, \tag{14}$$

де $K_* \in \mathbb{R}^{m\times l}$ — матриця коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку, що забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи, $\mathcal{K}$ – еліпсоїдальна множина допустимих збурень $\widetilde{K}$ матриці K_* у вигляді (4), яку визначають матриці $P = P^T > 0$ і $Q = Q^T > 0$ відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$.

Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $u = \mathcal{D}(K)(C_0 x + C_1 \dot{x})$, де $\mathcal{D}(K)$ — оператор (3), і замкнена система має вигляд

$$E(z)\dot{z} = M(z,t)z, \tag{15}$$

де $M = A + B\mathcal{D}(K)C$, або у формі Лагранжа

$$A_2 \ddot{x} + [A_1 - B_0 \mathcal{D}(K) C_1]\dot{x} + [A_0 - B_0 \mathcal{D}(K) C_0]x = 0. \tag{16}$$

Для класу лінійних автономних систем за умов регулярності $\det(M - \lambda E) \not\equiv 0$ маємо достатні умови асимптотичної стійкості системи (15) у вигляді системи лінійних матричних нерівностей [10]:

$$M^T XE + E^T XM + E^T YE \leq 0, \quad E^T XE \geq 0, \quad Y > 0. \tag{17}$$

При цьому $v(z) = z^T E^T XEz$ — функція Ляпунова системи (15). У випадку $\det A_2 \neq 0$, що характерно для механічних систем, умови (17) є критерієм асимптотичної стійкості системи (15), яка зводиться до форми Коші

$$\dot{z} = Fz, \quad F = E^{-1}M. \tag{18}$$

Теорема 3.1 *Нехай для деяких* $\varepsilon_i > 0$ *(i=0,1,2) і неперервно-диференційовної симетричної матриці* $X(t)$ *при* $z = 0$ *і* $t \geq 0$ *виконується система співвідношень*

$$\varepsilon_1 I_{2n} \leq X \leq \varepsilon_2 I_{2n}, \tag{19}$$

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|cc} E^T\dot{X}E + M_*^T XE + E^T XM_* + \varepsilon_0 I_{2n} & E^T XB & C_*^T \\ \hline B^T XE & -G^T PG & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{20}$$

де $M_* = A + BK_cC$, $C_* = C + DK_cC$, $K_c = \mathcal{D}(K_*)$, $G = I_m - K_*D$.

Тоді кожне керування (14) *забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги* $z = 0$ *системи* (15) *і спільну функцію Ляпунова* $v(z) = z^T E_0^T XE_0 z$, *де* $E_0 = E(0)$.

Доведення. Перш за все, із матричної нерівності (20) випливає

$$D^T QD - G^T PG < 0, \quad z \in \mathcal{S}_0. \tag{21}$$

Це забезпечує умови $K_* \in \mathcal{K}_D$, $\widehat{K} = G^{-1}\widetilde{K} \in \mathcal{K}_D$, $K \in \mathcal{K}_D$ при $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$ і, як наслідок, представлення замкненої системи у вигляді (15) в деякому околі $\mathcal{S}_0$ точки $z = 0$ [9]. За лемою 2.4 матричні нерівності (19) та

$$E_0^T \dot{X} E_0 + E_0^T XM_0 + M_0^T XE_0 + \varepsilon_0 I_{2n} < 0, \quad t \geq 0, \tag{22}$$

де $\varepsilon_0 > 0$ і $M_0 = M(0,t)$, забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги системи (15).

Використовуючи властивість 2) оператора (2), перепишемо нерівність (22) у вигляді

$$\mathcal{F}(\widehat{K}) = W + U^T\mathcal{D}(\widehat{K})V + V^T\mathcal{D}^T(\widehat{K})U \le 0,$$

де $W = E^T\dot{X}E + M_*^T XE + E^T XM_* + \varepsilon_0 I_{2n}$, $U = B^T XE$, $V = C_*$ при $z = 0$. При цьому

$$\widetilde{K} \in \mathcal{K} \iff \widehat{K} \in \widehat{\mathcal{K}} = \{K : K^T\widehat{P}K \le Q\},$$

де $\widehat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$, $\widehat{P} = G^T PG$.

Застосовуючи лему 2.1 у випадку $R = 0$, отримаємо блочну матричну нерівність (20), яка забезпечує виконання умови (22) і, як наслідок, асимптотичну стійкість стану рівноваги $z = 0$ замкненої системи (15) для довільної матриці $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Теорему доведено.

Використовуючи блочне розбиття матриці

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3^T & X_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{23}$$

де $X_1 = X_1^T$, $X_2 = X_2^T$ і X_3 — блоки розмірів $n \times n$, матричну нерівність (20) можна представити в термінах коефіцієнтів вихідної системи (1):

$$\Omega = \left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3B_0 & C_{0*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_2^T X_2 B_0 & C_{1*}^T \\ \hline B_0^T X_3^T & B_0^T X_2 A_2 & -G^T PG & D^T \\ C_{0*} & C_{1*} & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{24}$$

де

$$\Omega_{11} = \dot{X}_1 + A_{0*}^T X_3^T + X_3 A_{0*} + \varepsilon_0 I_n,$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12}^T = A_2^T \dot{X}_3^T + X_1 + A_{1*}^T X_3^T + A_2^T X_2 A_{0*},$$

$$\Omega_{22} = A_2^T \dot{X}_2 A_2 + A_2^T X_3^T + X_3 A_2 + A_2^T X_2 A_{1*} + A_{1*}^T X_2 A_2 + \varepsilon_0 I_n,$$

$$A_{0*} = B_0 K_c C_0 - A_0, \quad A_{1*} = B_0 K_c C_1 - A_1,$$

$$C_{0*} = C_0 + DK_cC_0, \quad C_{1*} = C_1 + DK_cC_1.$$

Припустимо, що система (1) при $x = 0$ і $t \geq 0$ має невизначені коефіцієнти:

$$\begin{gathered} A_0 \in \mathrm{Co}\{A_{01}, \ldots, A_{0\alpha_0}\}, \quad A_1 \in \mathrm{Co}\{A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}\}, \\ B_0 \in \mathrm{Co}\{B_{01}, \ldots, B_{0\beta}\}, \\ C_0 \in \mathrm{Co}\{C_{01}, \ldots, C_{0\gamma_0}\}, \;\; C_1 \in \mathrm{Co}\{C_{11}, \ldots, C_{1\gamma_1}\}. \end{gathered} \tag{25}$$

При додаткових обмеженнях на матриці X і K_* будемо використовувати аналогічні припущення відносно A_2 і D при $x = 0$ і $t \geq 0$:

$$A_2 \in \mathrm{Co}\{A_{21}, \ldots, A_{2\alpha_2}\}, \tag{26}$$

$$D \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}. \tag{27}$$

Задані набори сталих матриць в (25)–(27) є вершинами деяких політопів у відповідних просторах. Оскільки всі матричні коефіцієнти системи, окрім A_2 і D, входять у вирази блоків Ω лінійно, то умову (24) теореми 3.1 можна подати у вигляді системи матричних нерівностей, побудованих в термінах вершин політопів (25). Якщо в системі є невизначеність типу (26), то при наявності квадратичної залежності від A_2 доданка $A_2^T \dot{X}_2 A_2$, що входить у діагональний блок Ω_{22} матриці (24), слід використовувати обмеження на похідну $\dot{X}_2 \geq 0$ (див. лему 2.2). Невизначеність типу (27) можна використовувати, наприклад, у випадку $K_* \equiv 0$.

Наведемо наслідки теореми 3.1 з використанням сталої матриці (23).

Наслідок 3.1 *Нехай сумісна система ЛМН зі сталими матрицями* (23) *і*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} & C_{0p*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r} & C_{1q*}^T \\ \hline B_{0r}^T X_3^T & B_{0r}^T X_2 A_{2k} & -G^T P G & D^T \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{28}$$

де $\Omega_{11} = A_{0irp}^T X_3^T + X_3 A_{0irp}$, $\Omega_{21} = \Omega_{12}^T = X_1 + A_{1jrq}^T X_3^T + A_{2k}^T X_2 A_{0irp}$,

$$\Omega_{22} = A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} + A_{2k}^T X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^T X_2 A_{2k},$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_c C_{0p} - A_{0i}, \quad A_{1jrq} = B_{r0} K_c C_{1q} - A_{1j},$$
$$C_{0p*} = C_{0p} + D K_c C_{0p}, \quad C_{1q*} = C_{1q} + D K_c C_{1q},$$

$$i = \overline{1,\alpha_0},\ j = \overline{1,\alpha_1},\ k = \overline{1,\alpha_2},\ r = \overline{1,\beta},\ p = \overline{1,\gamma_0},\ q = \overline{1,\gamma_1}.$$

Тоді кожне керування (14) *забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги* $z = 0$ *сім'ї систем* (15), (25), (26).

Наслідок 3.2 *Нехай сумісна система ЛМН зі сталими матрицями* (23) *і*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} & C_{0p}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r} & C_{1q}^T \\ \hline B_{0r}^T X_3^T & B_{0r}^T X_2 A_{2k} & -P & D_s^T \\ C_{0p} & C_{1q} & D_s & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{29}$$

де $\Omega_{11} = -A_{0i}^T X_3^T - X_3 A_{0i}$, $\Omega_{21} = \Omega_{12}^T = X_1 - A_{1j}^T X_3^T - A_{2k}^T X_2 A_{0i}$,

$$\Omega_{22} = A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} - A_{2k}^T X_2 A_{1j} - A_{1j}^T X_2 A_{2k},$$

$$i = \overline{1,\alpha_0},\ j = \overline{1,\alpha_1},\ k = \overline{1,\alpha_2},\ r = \overline{1,\beta},\ p = \overline{1,\gamma_0},\ q = \overline{1,\gamma_1},\ s = \overline{1,\delta}.$$

Тоді кожне керування (14) *при* $K_* \equiv 0$ *забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги* $z = 0$ *сім'ї систем* (15), (25)–(27).

Слід зазначити, що додаткові обмеження на блоки матриці X, що використані в роботі [14], дають можливість врахувати структуру матриць дисипативних, гіроскопічних, потенціальних та неконсервативних сил, а також матриці інерції, і сформулювати достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нелінійних механічних систем керування при наявності поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів.

4 Оцінка функціонала якості сім'ї механічних систем

Розглянемо систему керування (1) з квадратичним функціоналом якості

$$J(u, z_0) = \int_0^\infty \varphi(z, u, t)\, dt, \tag{30}$$

де

$$\varphi(z, u, t) = \left[z^T, u^T\right] \Phi(t) \left[\begin{array}{c} z \\ u \end{array}\right], \quad z = [x^T, \dot{x}^T]^T, \quad z_0 = z(0),$$

а блоки симетричної матриці

$$\Phi(t) = \left[\begin{array}{cc} S & N \\ N^T & R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} S_0 & S_2 & N_0 \\ S_2^T & S_1 & N_1 \\ \hline N_0^T & N_1^T & R \end{array}\right]$$

при деякому $\delta > 0$ задовольняють умови

$$S \geq NR^{-1}N^T + \delta\, I_n, \quad R > 0, \quad t \geq 0. \tag{31}$$

Потрібно описати множину керувань (14), які забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги $z = 0$ системи (1) і оцінку

$$J(u, z_0) \leq \omega, \tag{32}$$

де ω — деяке максимально допустиме значення функціонала.

Теорема 4.1 *Нехай для деяких $\varepsilon_i > 0$ (i=0,1,2) і неперервно-диференційовної симетричної матриці $X(t)$ при $z = 0$ і $t \geq 0$ виконується система співвідношень*

$$z_0^T E^T X(0) E\, z_0 \leq \omega, \quad \varepsilon_1 I_{2n} \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_{2n}. \tag{33}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} E^T \dot{X} E + M_*^T X E + E^T X M_* + \Phi_* + \varepsilon_0 I_{2n} & B_*^T & C_*^T \\ \hline B_* & R - G^T P G & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{34}$$

де $M_* = A + BK_cC$, $\Phi_* = L_*^T \Phi L_*$, $B_* = B^T X E + N^T + RK_cC$, $C_* = C + DK_cC$, $L_*^T = [I_{2n}, C^T K_c^T]$, $G = I_m - K_* D$, $K_c = \mathcal{D}(K_*)$.

Тоді кожне керування (14) *забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги $z = 0$ системи* (15)*, спільну функцію Ляпунова $v(z) = z^T E_0^T X E_0 z$, де $E_0 = E(0)$, і оцінку функціонала* (32)*.*

Доведення. Умова (34) забезпечує існування значень оператора $\mathcal{D}(K)$, $\mathcal{D}(K_*)$ і $\mathcal{D}(\widehat{K})$, де $\widehat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$ (див. п. 2). При цьому замкнену систему записуємо у вигляді (15). Побудуємо функцію Ляпунова $v(z,t) = z^T E_0^T X(t) E_0 z$, де $X(t)$ — неперервно-диференційовеа матриця, що задовольняє умови (33). Похідна функції v в силу системи і підінтегральний вираз в (30) відповідно мають вигляд

$$\dot{v} = z^T (E_0^T \dot{X} E_0 + F^T E_0^T X E_0 + E_0^T X E_0 F) z, \quad \varphi(z,u,t) = z^T L^T \Phi L z,$$

де $F = E^{-1}M$, $M = A + B\mathcal{D}(K)C$, $L^T = [I_n, C^T\mathcal{D}^T(K)]$, $K = K_* + \widetilde{K}$.

Припустимо, що разом з (33) і (34) виконуються нерівності

$$\dot{v}(z,t) \leq -\varphi(z,u,t) \leq -\delta\,\|z\|^2, \quad z \in \mathcal{S}_0,\ t \geq 0, \tag{35}$$

де $\mathcal{S}_0$ — окіл точки $z = 0$, що містить z_0. Для цього достатньо виконання матричних нерівностей (31) і (див. доведення теореми 3.1)

$$E_0^T\dot{X}E_0 + M_0^TXE_0 + E_0^TXM_0 + L_0^T\Phi L_0 \leq -\varepsilon_0 I_{2n}, \quad t \geq 0, \tag{36}$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $M_0 = A_0 + B_0\widehat{\mathcal{D}}(K_0)C_0$, $\widehat{\mathcal{D}}(K_0) = (I_m - K_0D_0)^{-1}K_0$, $L_0^T = [I_n, C_0^T\widehat{\mathcal{D}}^T(K_0)]$, $K_0 = K_{*0} + \widetilde{K}_0$. Тут нульовий індекс для кожної матриці означає, що використовується її значення при $z = 0$.

Згідно з лемою 2.4 матрична нерівність (36) забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги системи (15). Враховуючи (33) і (35), маємо верхню оцінку функціонала:

$$J(u,z_0) \leq -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\,v(z,t)\,dt = z_0^TE_0^TX(0)E_0\,z_0 \leq \omega.$$

Використовуючи властивість 2) оператора $\widehat{\mathcal{D}}$, перепишемо матричну нерівність (36) при $z = 0$ і $t \geq 0$ у вигляді

$$\mathcal{F}(\widehat{K}) = W + U^T\mathcal{D}(\widehat{K})V + V^T\mathcal{D}^T(\widehat{K})U + V^T\mathcal{D}^T(\widehat{K})R\mathcal{D}(\widehat{K})V \leq 0, \tag{37}$$

де $W = E^T\dot{X}E + M_*^TXE + E^TXM_* + \Phi_* + \varepsilon_0 I_{2n}$, $U = B_*$, $V = C_*$. При цьому $\widetilde{K} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \widehat{K} \in \widehat{\mathcal{K}} = \{K : K^T\widehat{P}K \leq Q\}$, де $\widehat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$, $\widehat{P} = G^TPG$. Отже, твердження теореми випливає із леми 2.1 і формул (33), (34) і (37).

Теорему доведено.

Використовуючи блочне розбиття матриці (23) матричну нерівність (34) можна представити в термінах коефіцієнтів вихідної системи (1):

$$\Omega = \left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & B_{0*}^T & C_{0*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & B_{1*}^T & C_{1*}^T \\ \hline B_{0*} & B_{1*} & R - G^TPG & D^T \\ C_{0*} & C_{1*} & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{38}$$

де

$$\begin{aligned}\Omega_{11} =& \dot{X}_1 + A_{0*}^TX_3^T + X_3A_{0*} + S_0 \\ &+ C_0^TK_c^TN_0^T + N_0K_cC_0 + C_0^TK_c^TRK_cC_0 + \varepsilon_0 I_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{21} = \Omega_{12}^T =& A_2^T \dot{X}_3^T + X_1 + A_{1*}^T X_3^T + A_2^T X_2 A_{0*} + S_2^T \\ &+ C_1^T K_c^T N_0^T + N_1 K_c C_0 + C_1^T K_c^T R K_c C_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{22} =& A_2^T \dot{X}_2 A_2 + A_2^T X_3^T + X_3 A_2 + A_2^T X_2 A_{1*} + A_{1*}^T X_2 A_2 + S_1 \\ &+ C_1^T K_c^T N_1^T + N_1 K_c C_1 + C_1^T K_c^T R K_c C_1 + \varepsilon_0 I_n,\end{aligned}$$

$$A_{0*} = B_0 K_c C_0 - A_0, \quad A_{1*} = B_0 K_c C_1 - A_1,$$

$$B_{0*} = B_0^T X_3^T + N_0^T + R K_c C_0, \quad B_{1*} = B_0^T X_2 A_2 + N_1^T + R K_c C_1,$$

$$C_{0*} = C_0 + D K_c C_0, \quad C_{1*} = C_1 + D K_c C_1.$$

Можна сформулювати наслідки теореми 4.1 для нелінійних механічних систем з невизначеностями коефіцієнтів типу (25)–(27). Наведемо один із них у випадку сталих матриць.

Наслідок 4.1 *Нехай разом з* (23) *виконується система ЛМН зі сталими матрицями*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} + N_0 & C_{0p*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r} + N_1 & C_{1q*}^T \\ \hline B_{0r}^T X_3^T + N_0^T & B_{0r}^T X_2 A_{2k} + N_1^T & R - G^T P G & D^T \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{39}$$

де

$$\begin{aligned}\Omega_{11} =& A_{0irp}^T X_3^T + X_3 A_{0irp} + S_0 \\ &+ C_{0p}^T K_c^T N_0^T + N_0 K_c C_{0p} + C_{0p}^T K_c^T R K_c C_{0p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{21} = \Omega_{12}^T =& X_1 + A_{1jrq}^T X_3^T + A_{2k}^T X_2 A_{0irp} + S_2^T \\ &+ C_{1q}^T K_c^T N_0^T + N_1 K_c C_{0p} + C_{1q}^T K_c^T R K_c C_{0p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{22} =& A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} + A_{2k}^T X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^T X_2 A_{2k} + S_1 \\ &+ C_{1q}^T K_c^T N_1^T + N_1 K_c C_{1q} + C_{1q}^T K_c^T R K_c C_{1q},\end{aligned}$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_c C_{0p} - A_{0i}, \quad A_{1jrq} = B_{r0} K_c C_{1q} - A_{1j},$$

$$C_{0p*} = C_{0p} + D K_c C_{0p}, \quad C_{1q*} = C_{1q} + D K_c C_{1q},$$

$$i = \overline{1, \alpha_0},\ j = \overline{1, \alpha_1},\ k = \overline{1, \alpha_2},\ r = \overline{1, \beta},\ p = \overline{1, \gamma_0},\ q = \overline{1, \gamma_1}.$$

Тоді кожне керування (14) *забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги* $z = 0$ *і оцінку функціонала* (32) *сім'ї систем* (15), (25), (26), *де*

$$\omega = \max_{1 \leq k \leq \alpha_2} \omega_k, \quad \omega_k = z_0^T Z_k z_0, \quad Z_k = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 A_{2k} \\ A_{2k}^T X_3^T & A_{2k}^T X_2 A_{2k} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Зазначимо, що наведена верхня оцінка функціонала якості в останньому твердженні випливає з першої нерівності (33) для відповідного матричного політопа E і леми 2.3 (див. також доведення леми 2.2). При цьому значення ω в (40) залежить від розв'язку системи ЛМН (39). Якщо вимагати, щоб ω було заданим (так, як в теоремі 4.1), то при знаходженні блоків матриці $X = X^T > 0$ до системи (39) слід приєднати нерівності $z_0^T Z_k z_0 \leq \omega$, $k = \overline{1, \alpha_2}$.

5 Робастна стабілізація маятника на рухомій платформі

Побудуємо систему керування одноланкового маятника на рухомій платформі (рис. 1). Кінетична та потенціальна енергії системи відповідно мають вигляд

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2 \right), \quad H = m_1 g \eta_1,$$

де $\xi_1 = \xi + h \sin\theta$, $\eta_1 = -h\cos\theta$, m_0 — маса платформи, m_1 — маса маятника, θ — кут відхилення маятника, ξ — горизонтальне переміщення платформи, g — прискорення вільного падіння.

Рух системи в узагальнених координатах ξ і θ описуються рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = v, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

де

$$L = T - H = \frac{1}{2} m_0 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\xi}^2 + 2h\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + h^2\dot{\theta}^2 \right) + m_1 g h \cos\theta.$$

Враховуючи силу опору руху платформи, покладемо $v = u - k\dot{\xi}$, де u — керуюча сила, прикладена до платформи, k — коефіцієнт опору.

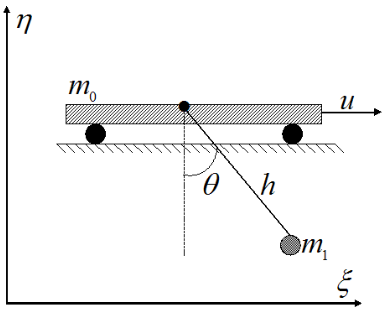

Рис. 1: Одноланковий маятник на платформі.

Тоді рівняння руху системи набувають вигляду

$$\begin{cases}(m_0+m_1)\ddot{\xi}+m_1h\ddot{\theta}\cos\theta-m_1h\dot{\theta}^2\sin\theta+k\dot{\xi}=u,\\ h\ddot{\theta}+\ddot{\xi}\cos\theta+g\sin\theta=0.\end{cases}\tag{41}$$

Причому, якщо в другому рівнянні g замінити на $-g$, то дана система буде описувати рух платформи з маятником в околі верхнього положення рівноваги.

Систему рівнянь (41) можна подати у векторно-матричній формі:

$$A_2(x)\,\ddot{x}+A_1(x,\dot{x})\,\dot{x}+A_0(x)x=B_0u,\tag{42}$$

де

$$x=\begin{bmatrix}\xi\\ \theta\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad A_0(x)=\left[\begin{array}{c|c}0&0\\ \hline 0&g\,\varphi(\theta)\end{array}\right],$$

$$A_1(x,\dot{x})=\left[\begin{array}{c|c}k&-m_1h\dot{\theta}\sin\theta\\ \hline 0&0\end{array}\right],\quad A_2(x)=\left[\begin{array}{c|c}m_0+m_1&m_1h\cos\theta\\ \hline \cos\theta&h\end{array}\right],$$

$\varphi(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ — неперервна функція.

Покладемо $h=0,6096$, $m_0=0,94$, $m_1=0,23$, $k=0$ [15] і розглянемо такі випадки для вектора спостереження $y=C_0\,x+C_1\,\dot{x}+Du$:

$$1)\ l=2,\ \ y=[\xi+\dot{\xi}+u\ \ \dot{\theta}]^T;\qquad 2)\ l=3,\ \ y=[\xi+u\ \ \dot{\xi}\ \ \dot{\theta}]^T.$$

Випадку 1) відповідають такі значення коефіцієнтів:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Маємо нелінійну систему керування у векторно-матричній формі:

$$E(z)\dot{z} = A(z)z + B\,u, \quad y = Cz + Du, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$E(z) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, A(z) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, C = [C_0, C_1].$$

Застосовуючи методику з роботи [9, лема 1], знаходимо вектор $K = [1,3033 \quad -1,2088]$ і відповідне керування

$$u = K_* y, \quad K_* = -\mathcal{D}(K) = [4,2974 \quad -3,9858], \tag{44}$$

що забезпечує асимптотичну стійкість лінійної системи

$$\dot{z} = Fz, \quad F = E_0^{-1} M_*, \tag{45}$$

де $E_0 = E(0)$, $M_* = A(0) - BKC$, $K = -\mathcal{D}(K_*)$. При цьому її спектр $\sigma(F) = \{-1,1979 \pm 4,0064i; -0,5500 \pm 0,9860i\}$, а нульове положення рівноваги нелінійної системи (43) з керуванням (44) також асимптотично стійке. Поведінка розв'язків замкненої системи (43), (44) з початковим вектором $z_0 = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 2]^T$ зображена на рис. 2.

Нехай m_0 і k — невизначені параметри, що набувають значень на інтервалах

$$0,6 \le m_0 \le 1,5, \quad 0 \le k \le 5. \tag{46}$$

Для ілюстрації наслідку 4.1 задамо матриці функціоналу (30):

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Система (39) складається з чотирьох матричних нерівностей, що відповідають можливим значенням пари (m_0, k) на кінцях інтервалів (46): $(0,6;\ 0)$; $(0,6;\ 5)$; $(1,5;\ 0)$; $(1,5;\ 5)$. Використовуючи систему Matlab, знайдено додатно визначені матриці

$$P = 1,9969 > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 0,5117 & -0,0134 \\ -0,0134 & 0,5181 \end{bmatrix} > 0,$$

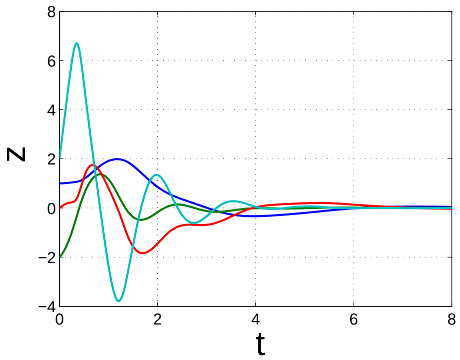

Рис. 2: Поведінка системи з керуванням $u = K_* y$ ($l = 2$).

$$X = \begin{bmatrix} 22,9939 & -6,9497 & 5,1524 & 0,0937 \\ -6,9497 & 67,3503 & -21,5309 & 5,193 \\ 5,1524 & -21,5309 & 20,8101 & -8,0951 \\ 0,0937 & 5,193 & -8,0951 & 10,152 \end{bmatrix} > 0,$$

які задовольняють вказану систему нерівностей.

Отже, у випадку 1) для всіх значень параметрів m_0 і k із інтервалів (46) і вектора коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку K із замкненої області $\mathcal{K}_*$, обмеженої еліпсом (рис. 3)

$$(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^T = P^{-1},$$

рух маятника на платформі в околі нульового стану рівноваги асимптотично стійкий. При цьому значення заданого функціонала якості не перевищує числа $\omega = 333,3289$, знайденого за формулою (40).

Тепер розглянемо систему керування (43) у випадку 2), якому відповідають такі значення коефіцієнтів:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно застосовуючи методику [9, лема 1], знаходимо вектор $K = [1,2776 \;\; 1,3169 \;\; -1,2095]$ і відповідне керування

$$u = K_* y, \quad K_* = -\mathcal{D}(K) = [4,6026 \;\; 4,7443 \;\; -4,3572], \qquad (47)$$

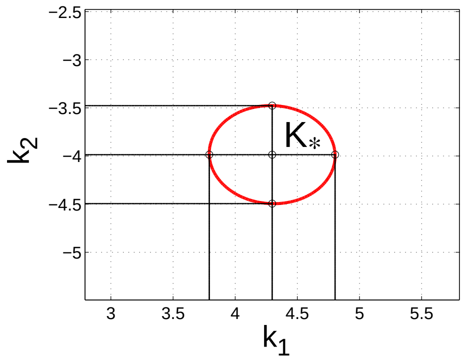

Рис. 3: Область коефіцієнтів керування $\mathcal{K}_*$.

що забезпечує асимптотичну стійкість лінійної системи (45). При цьому спектр $\sigma(F) = \{-1,1960 \pm 4,0009i; -0,5599 \pm 0,9693i\}$, а нульове положення рівноваги нелінійної системи (43) з керуванням (47) також асимптотично стійке. Поведінка розв'язків замкненої системи (43), (47) з початковим вектором $z_0 = [1 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 2]^T$ майже така сама, як і у випадку 1) (див. рис. 2).

Для ілюстрації наслідку 4.1 теореми 4.1 використаємо ті ж самі матриці функціоналу (4) і інтервали невизначеності параметрів m_0 і k (46), що і у випадку 1). Система співвідношень (39) складається з чотирьох матричних нерівностей, що відповідають можливим значенням пари (m_0, k) на кінцях інтервалів (46). Використовуючи систему Matlab, знайдено додатно визначені матриці

$$P = 1,4949 > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 0,5948 & 0,0035 & -0,0236 \\ 0,0035 & 0,6157 & -0,0203 \\ -0,0236 & -0,0203 & 0,5966 \end{bmatrix} > 0,$$

$$X = \begin{bmatrix} 20,9184 & -6,187 & 4,6595 & 0,0784 \\ -6,187 & 62,7929 & -19,5111 & 4,575 \\ 4,6595 & -19,5111 & 19,4365 & -7,5023 \\ 0,0784 & 4,575 & -7,5023 & 9,458 \end{bmatrix} > 0,$$

які задовольняють вказану систему нерівностей. Множину $\mathcal{K}_*$ в (14)

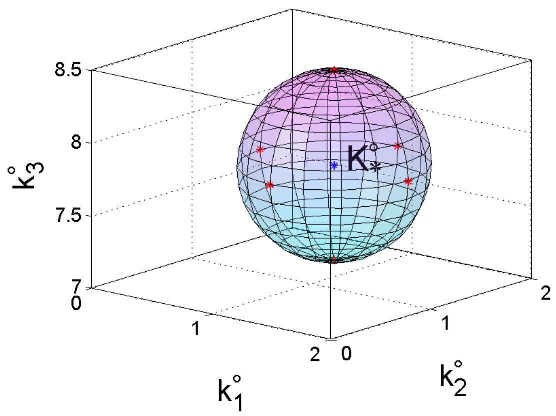

Рис. 4: Еліпсоїд коефіцієнтів керування $\mathcal{K}_*$.

можна подати у вигляді $\mathcal{K}_* = \left\{K : KT \in \mathcal{K}^0\right\}$, де

$$\mathcal{K}^0 = \left\{K^0 : \gamma_1(k_1^0 - k_{*1}^0)^2 + \gamma_2(k_2^0 - k_{*2}^0)^2 + \gamma_3(k_3^0 - k_{*3}^0)^2 \leq 1\right\},$$

$K_*^0 = K_*T = [k_{*1}^0 \ \ k_{*3}^0 \ \ k_{*3}^0]$, $K^0 = KT = [k_1^0, k_3^0, k_3^0]$, T — ортогональна матриця, стовпчики t_i якої є власні вектори матриці PQ^{-1}, що відповідають її власним значенням $\gamma_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$. В даному випадку

$$T = \begin{bmatrix} 0,6277 & 0,6634 & 0,4073 \\ 0,2694 & -0,6760 & 0,6859 \\ 0,7303 & -0,3208 & -0,6031 \end{bmatrix},$$

$K_*^0 = [0,9850 \ \ 1,2436 \ \ 7,7563]$, $\gamma_1 = 2,6278$, $\gamma_2 = 2,4809$, $\gamma_3 = 2,3518$.

На рис. 4 зображена еліпсоїдальна множина векторів $\mathcal{K}^0$.

Таким чином, у випадку 2) для всіх значень параметрів m_0 і k із відповідних інтервалів (46) і вектора коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку $K \in \mathcal{K}_*$ із замкненої області $\mathcal{K}_*$, обмеженої еліпсоїдом, рух маятника на платформі в околі нульового положення рівноваги асимптотично стійкий. При цьому верхня оцінка функціонала якості $\omega = 309,6734$ менша, ніж у випадку 1).

6 Висновки

В роботі отримано нові методи аналізу робастної стійкості станів рівноваги і оцінки функціонала якості нелінійних механічних систем керування зі статичним зворотним зв'язком по вимірюваному виходу, що містить компоненти як фазових змінних, так і керування. При цьому значення невизначених матричних коефіцієнтів можуть належати заданим політопам, зокрема, матричним інтервалам або афінним множинам, а можливі значення матриці коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку описують еліпсоїдальну множину.

Практична реалізація запропонованих методів базується на розв'язанні диференціальних або алгебраїчних ЛМН. Для чисельного моделювання невизначених механічних систем керування типу MIMO та знаходження розв'язків алгебраїчних ЛМН може бути застосований комплекс ефективних процедур Robust Control Toolbox разом з LMI Solvers системи Matlab. Відмінною особливістю побудованих ЛМН у порівнянні з відомими є можливість побудови еліпсоїда стабілізуючих матриць зворотного зв'язку, спільної квадратичної функції Ляпунова, а також оцінки квадратичного функціонала якості для нелінійної системи керування з невизначеними матричними коефіцієнтами.

[1] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.

[2] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

[3] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[4] *Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback: a survey // Automatica. — 1997. — V. 33, № 2. — P. 125–137.

[5] *Алиев Ф.А., Ларин В.Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикладная механика. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 3–49.

[6] *Mazko A.G.* Matrix Equations, Spectral Problems and Stability of Dynamic Systems // An international book series "Stability, Oscillations and Optimization of Systems", V. 2, eds. A.A. Martynyuk, P. Borne and

C. Cruz-Hernandez. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2008. — XX+270 p.

[7] *Mazko A.G.* Cone inequalities and stability of dynamical systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2011. — V. 11, № 3. — P. 303–318.

[8] *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и оценка качества семейства нелинейных систем управления // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 2. — С. 174–186.

[9] *Мазко О.Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 1. — С. 213–231.

[10] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 1999. — **28**. — 216 с.

[11] *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems Control Lett. — 1987. — V. 8, № 4. — P. 351–357.

[12] *Топунов М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // Автоматика и Телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 125–139.

[13] *Мазко О.Г., Шрам В.В.* Умови стійкості та локалізації спектра сім'ї лінійних динамічних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 3. — С. 149–168.

[14] *Алілуйко А.М., Мазко О. Г.* Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 1. — С. 7–24.

[15] *Singh N.M., Dubey J. and Laddha G.* Control of Pendulum on a Cart with State Dependent Riccati Equations // World Academy of Science, Engineering and Technology.— 2008.— **41**.— P. 671–675.