Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 145–170

УДК 519.624.2

Експериментально-аналітичне дослідження властивостей складових FD-методу при його застосуванні до задач Штурма-Ліувілля

***В.Л. Макаров*[1], *Н.М. Романюк*[2], *І.І. Лазурчак*[3]**

[1] *Інститут математики НАН України, Київ; makarov@imath.kiev.ua*
[2] *Інститут математики НАН України, Київ; nataliaromanyuk2013@gmail.com*
[3] *Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка, Дрогобич; informatyka@drohobych.net*

Для розв'язання регулярної скалярної задачі Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Діріхле на відрізку $[0, 1]$ вивчається поведінка складових FD-методу відносно порядкового номера n власного значення в залежності від гладкості потенціала $q(x)$ з вибором в якості функції $\bar{q}(x)$, що його наближає, тотожної нулю. Розглядаються випадки, коли потенціал $q(x)$ є: а) нескінченно-диференційовна періодична функція; б) кусково-стала функція; в) неперервна кусково-гладка функція; г) функція, що належить негативному простору Соболєва $H_2^{-1}(0, 1)$. У випадках б) і г) отримані аналітичні оцінки для поправок до власних значень, які відносно n є непокращуваними за порядком. В інших випадках поведінка поправок до власних значень досліджена експериментально.

To solve a regular scalar Sturm–Liouville problem for a second-order ordinary differential equation on the interval $[0, 1]$ with the Dirichlet boundary conditions, we study the behaviour of the FD-method components of the eigenvalue number n versus the smoothness of the potential $q(x)$ whereas the approximate $\bar{q}(x)$ is identical to zero. We consider the cases when the potential $q(x)$ is a) infinitely differentiable periodic function; b) piecewise constant function; c) continuous piecewise smooth function; d) belongs to the negative Sobolev space. In the cases b) and d), we obtain analytical estimations for approximations of eigenvalues which, for a given number n, are unimprovable with respect to the order. In other cases, the estimates behavior is studied by using a numerical experiment.

1 Вступ

Розглянемо регулярну скалярну задачу Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Діріхле

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))\, u(x) = 0, x \in (0, 1),\ u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

і застосуємо до неї FD-метод з вибором в якості функції $\bar{q}(x)$, що наближає $q(x)$, тотожної нулю або метод гомотопій, або, що те ж саме, метод Адомяна [1]. Тоді наближення (m-го рангу за термінологією FD-методу) до розв'язку задачі (1) матиме вигляд

$$\overset{m}{u}_n(x) = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}(x),\ \overset{m}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}. \tag{2}$$

Тут $u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$ – розв'язок базової задачі

$$\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1) = 0. \tag{3}$$

Члени рядів (2) визначаються як розв'язки рекурентної послідовності задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)}(x) &= -\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(x) + q(x)u_n^{(j)}(x) \\ &\equiv -F_n^{(j+1)}(x), \quad x \in (0, 1), \end{aligned} \tag{4}$$

$$u_n^{(j+1)}(0) = u_n^{(j+1)}(1) = 0, \quad j = 0,\ 1,\ ..., m-1,$$

де

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 q(x) u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x)\, dx, \tag{5}$$

$$\int_0^1 u_n^{(j+1)}(x) u_n^{(0)}(x)\, dx = 0, \quad j = 0,\ 1,\ ..., m-1. \tag{6}$$

Під складовими FD-методу ми розуміємо $u_n^{(j)}(x)$, $\lambda_n^{(j)},\ j = 0, 1, \ldots$.

Основне питання, яке нас цікавить– це вивчення поведінки зазначених складових відносно порядкового номера n в залежності від гладкості коефіцієнта $q(x)$.

Вперше FD-метод був запропонований в роботі [2] для розв'язування регулярної скалярної задачі Штурма-Ліувілля (1) з кусково-сталим наближенням $\bar{q}(x)$ коефіцієнта $q(x)$. Метод дозволяє при фіксованому параметрі дискретизації N (кількість сходинок у функції $\bar{q}(x)$) визначити наближення до власних функцій і власних значень $\{u_n(x), \lambda_n\}$ з точністю $O((Nn)^{-m})$, де m – ранг методу.

Пізніше в роботах $[3, 4]$ доведені наступні явні апріорні оцінки для випадку, коли кусково-стала функція, що наближає $q(x)$, тотожно рівна нулю ($\bar{q}(x) \equiv 0$)

$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(0)\right| \leq \|q\|_\infty \frac{\left(r_n^0\right)^m}{1 - r_n^0} 2 \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \leq$$
$$\leq \|q\|_\infty \frac{\left(r_n^0\right)^m}{1 - r_n^0} \frac{1}{(m+1)\sqrt{\pi m}}, \tag{7}$$

$$\left\|u_n(x, q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x, 0)\right\| \leq \frac{\left(r_n^0\right)^{m+1}}{1 - r_n^0} 2 \frac{(2m+1)!!}{(2m+4)!!} \leq$$
$$\leq \frac{\left(r_n^0\right)^{m+1}}{1 - r_n^0} \frac{1}{(m+2)\sqrt{\pi(m+1)}}, \tag{8}$$

де $r_n^0 = \frac{4\|q\|_\infty}{\pi^2(2n-1)}$, $\|q\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |q(x)|$. При цьому припускалось, що функція $q(x)$ кусково-неперервна, і в оцінках використовувалась норма Чебишева $\|q\|_\infty$. Згідно доведених в $[3, 4]$ оцінок поправки до власних значень і норми поправок до власних функцій мали порядки малості $O\left(n^{-m+1}\right)$ і $O\left(n^{-m}\right)$ відповідно.

Зауваження 1.1 Метод типу Адомяна (2)-(6) раніше до задачі Штурма-Ліувілля (1) не застосовувався.

Для того, щоб записати розв'язки задач (4), введемо узагальнену функцію Гріна

$$g_n(x,\xi) = 2\sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{\infty} \frac{\sin(p\pi x)\sin(p\pi\xi)}{\pi^2(n^2-p^2)} = \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(\cos(n\pi(x+\xi))-\right. \tag{9}$$

$$-\cos(n\pi(x-\xi)) - 2\pi n[\sin(n\pi(x+\xi))(1-x-\xi) - \sin(n\pi\,|x-\xi|)\times$$

$$\times(1-|x-\xi|)]) = \hat{g}_n(x,\xi) + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left[\cos\left(n\pi(x+\xi)\right) - \cos(n\pi(x-\xi))\right],$$

або, що те ж саме,

$$g_n(x,\xi) = \begin{cases} \left(\frac{(x-1)\cos(n\pi x)}{\pi n} - \frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2}\right)\sin(n\pi\xi) + \frac{\sin(n\pi x)\xi\cos(n\pi\xi)}{\pi n}, \\ 0 \le \xi < x \le 1, \\ \left(\frac{x\cos(n\pi x)}{\pi n} - \frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2}\right)\sin(n\pi\xi) + \frac{\sin(n\pi x)(\xi-1)\cos(n\pi\xi)}{\pi n}, \\ 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Зауваження 1.2 Функція Гріна (9) має такі властивості

$$\begin{gathered} g_n(x,\xi) = g_n(\xi,x),\ \ g_n(x,\xi) = g_n(1-x,1-\xi), \\ \int_0^1 g_n(x,\xi)\sin(n\pi x)\,dx = 0,\ \ \int_0^1 g_n(x,\xi)\sin(n\pi\xi)\,d\xi = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Тоді при фіксованому j розв'язок задачі (4), що задовольняє умові ортогональності (6), можна записати у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x) = -\int_0^1 g_n(x,\xi)F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

Лема 1.1 *Нехай $q(x) \in H_2^1(0,1)$, тоді має місце представлення*

$$\lambda_n^{(2)} = \int_0^1\int_0^1 w_n(x,\xi)\,q'(\xi)q'(x)d\xi dx, \tag{12}$$

де

$$w_n(x,\xi) = \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi g_n(t,s)\, u_n^{(0)}(t) u_n^{(0)}(s) ds dt, \tag{13}$$

і наступна оцінка

$$\left|\lambda_n^{(2)}\right| \le \frac{3}{4}\left(\frac{\|q\|_{H_2^1(0,1)}}{2\pi n}\right)^2. \tag{14}$$

Доведення. Маємо

$$\lambda_n^{(2)} = \int\limits_0^1 q(x) u_n^{(1)}(x) u_n^{(0)}(x) dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\, q(x) u_n^{(0)}(x) q(\xi)\times$$
$$\times\, u_n^{(0)}(\xi) d\xi dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 q(x) q(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} w_n(x,\xi)\, d\xi dx = \tag{15}$$
$$= -\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} w_n(x,\xi)\, q'(\xi) d\xi q(x) dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 w_n(x,\xi)\, q'(\xi) q'(x) d\xi dx.$$

Тут ми скористалися співвідношеннями

$$w_n(1,\xi) = 0, \forall \xi \in [0,1],\ w_n(x,1) = 0, \forall x \in [0,1],\ w_n(1,1) = 0,$$

які випливають з властивостей функції $g_n(x,\xi)$.
Із (15) слідує оцінка

$$\left|\lambda_n^{(2)}\right| \le \max_{x,\xi\in[0,1]} |w_n(x,\xi)| \left(\|q\|_{H_2^1(0,1)}\right)^2. \tag{16}$$

Аналітична форма запису функції (13) буде наступною:

$$w_n(x,\xi) = -\frac{1}{16\pi^2 n^2}(x+\xi-|x-\xi|)(x+\xi+|x-\xi|-2)(\cos(2\pi n x) +$$
$$+\cos(2\pi n\xi)+1) + \frac{1}{16\pi^3 n^3}[2(x+\xi+|x-\xi|-2)\sin(\pi n(x+\xi-$$
$$-\ |x-\xi|)) + 2(x+\xi-|x-\xi|)\sin(\pi n(x+\xi+|x-\xi|)) -$$
$$-(x-\xi-\operatorname{sgn}(x-\xi))\sin(2\pi n(x-\xi)) + (x+\xi-1)\sin(2\pi n(x+\xi))] -$$
$$-\frac{3}{16\pi^4 n^4}\sin(2\pi n x)\sin(2\pi n\xi).$$

За допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple експериментально встановлено, що максимум $|w_n(x,\xi)|$ на області визначення знаходиться на прямій $x=\xi$. З необхідних і достатніх умов екстремума функції легко визначити, що він досягається в точці $x=\frac{1}{2}, \xi=\frac{1}{2}$ при парних n і $n=1$ та в точках $x=\frac{n\pm1}{2n}, \xi=\frac{n\pm1}{2n}$ – при непарних $n=3,5,\dots$. Тому має місце оцінка

$$\max_{x,\xi\in[0,1]} |w_n(x,\xi)| \leq \left| w_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{3}{16\pi^2 n^2}. \tag{17}$$

Нерівність (14) доведена.

Теорема 1.1 *Нехай* $q(x)$ *— непарна функція на відрізку* $[0,1]$ *відносно точки* $\frac{1}{2}$. *Тоді для* $j=1,2,\dots$ *виконуються наступні співвідношення:*

$$u_n^{(2j-1)}(x) = -u_n^{(2j-1)}(1-x), u_n^{(2j)}(x) = u_n^{(2j)}(1-x), \text{ якщо } n- \text{ непарне}; \tag{18}$$

$$u_n^{(2j-1)}(x) = u_n^{(2j-1)}(1-x), u_n^{(2j)}(x) = -u_n^{(2j)}(1-x), \text{ якщо } n- \text{ парне}; \tag{19}$$

$$\lambda_n^{(2j-1)} = 0; \tag{20}$$

$$\lambda^{(2j)} = \int\limits_0^1 q(x) u_n^{(2j-1)}(x) u_n^{(0)}(x) dx. \tag{21}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, тобто

$$q(x) = -q(1-x), x\in[0,1]. \tag{22}$$

Доведення проведемо методом повної математичної індукції.
Із (5), враховуючи (22), при $j=0$ маємо

$$\lambda_n^{(1)} = \int\limits_0^1 q(x)\left[u_n^{(0)}(x)\right]^2 dx = 0.$$

Розв'язок задачі (4) при $j=0$ буде мати вигляд

$$u_n^{(1)}(x) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi) q(\xi) u_n^{(0)}(\xi) d\xi. \tag{23}$$

Враховуючи (10), з (23) робимо висновок, що $u_n^{(1)}(x)$ є непарною функцією відносно точки $x = \frac{1}{2}$, якщо n є непарним, і парною функцією, якщо n є парним числом.

Повернемось до задачі (4) при $j = 1$. Із (5) і (23) маємо

$$\lambda_n^{(2)} = \int_0^1 q(x)u_n^{(1)}(x)u_n^{(0)}(x)dx.$$

Згідно (11) розв'язок задачі (4) при $j = 1$ має вигляд

$$u_n^{(2)}(x) = \int_0^1 g_n(x,\xi)q(\xi)u_n^{(1)}(\xi)d\xi, \tag{24}$$

і тоді з (10), (22) і (24) робимо висновок, що $u_n^{(2)}(x)$ є парною функцією відносно точки $x = \frac{1}{2}$, якщо n є непарним, і непарною функцією, якщо n є парним числом.

Припустимо, що співвідношення (18)-(21) справедливі при $i = s$, покажемо, що вони будуть справедливі і при $i = s + 1$. Запишемо умову розв'язності задачі (4) при $j = 2s$

$$\int_0^1 \left(-\sum_{p=0}^{2s} \lambda_n^{(2s+1-p)} u_n^{(p)}(x) + q(x)u_n^{(2s)}(x) \right) u_n^{(0)}(x)dx = 0,$$

звідки, з урахуванням припущення індукції та умов ортогональності (6), маємо

$$\lambda_n^{(2s+1)} = 0.$$

Тоді розв'язок задачі (4) при $j = 2s$ має вигляд

$$u_n^{(2s+1)}(x) = \int_0^1 g_n(x,\xi) \left[-\sum_{p=1}^{s} \lambda_n^{(2s-2p+2)} u_n^{(2p-1)}(\xi) + q(\xi)u_n^{(2s)}(\xi) \right] d\xi,$$

що з урахуванням припущення індукції приводить до співвідношень

$$\begin{gathered} u_n^{(2s+1)}(x) = -u_n^{(2s+1)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{непарне}, \\ u_n^{(2s+1)}(x) = u_n^{(2s+1)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{gathered} \tag{25}$$

При $j = 2s + 1$ розв'язок задачі (4) має вигляд

$$u_n^{(2s+2)}(x) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\left[-\sum_{p=1}^{s} \lambda_n^{(2s-2p+2)} u_n^{(2p)}(\xi) + q(\xi)u_n^{(2s+1)}(\xi)\right] d\xi,$$

що з урахуванням припущення індукції приводить до співвідношень (функція у квадратних дужках є парною)

$$\begin{aligned} &u_n^{(2s+2)}(x) = u_n^{(2s+2)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{непарне},\\ &u_n^{(2s+2)}(x) = -u_n^{(2s+2)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{aligned} \tag{26}$$

Запишемо розв'язок задачі (4) при $j = 2s + 2$

$$u_n^{(2s+3)}(x) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\left[-\sum_{p=1}^{s+1} \lambda_{n,k}^{(2s-2p+4)} u_n^{(2p-1)}(\xi) + q(\xi)u_n^{(2s+2)}(\xi)\right] d\xi,$$

звідки, враховуючи припущення індукції, а також (25) і (26), отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} &u_n^{(2s+3)}(x) = -u_n^{(2s+3)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{непарне},\\ &u_n^{(2s+3)}(x) = u_n^{(2s+3)}(1-x), \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{aligned} \tag{27}$$

Теорема доведена.

Далі будемо розглядати ряд випадків, коли функція $q(x)$ належить різним класам гладкості і є такою, що FD-метод точно реалізується (термінологія вперше була введена в роботі [5]).

2 Функція $q(x)$ — нескінченно-диференційовна, $q(x) \in C^\infty[0,1]$

Випадок, коли функція $q(x)$ є поліном, був розглянутий в роботі [6]. В ній показано, що існує алгоритмічна реалізація FD-методу, яка є такою, що точно реалізується, і використовує лише арифметичні операції. Крім того доведено, що поведінка поправок до власних значень $\lambda_n^{(j)}$ по відношенню до порядкового номера n є наступною

$$\lambda_n^{(j)} = O\left(\frac{1}{n^{2j-2}}\right).$$

Розглянемо тепер частинний випадок рівняння Хілла [7] з $q(x) = \cos(\pi x)$, $q(x) \in C^{\infty}[0,1]$, який не є поліноміальним, але також таким, що FD-метод точно реалізується. Тоді для $\lambda_n^{(j)}$, $u_n^{(j)}(x)$ виконується теорема 1.1. Маємо

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi^2\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)},$$

$$\lambda_n^{(4)} = \frac{20n^2+7}{32\pi^6\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(2n-1\right)^3\left(2n+1\right)^3},$$

$$\lambda_n^{(6)} = \frac{144n^4+232n^2+29}{16\pi^{10}\left(2n-3\right)\left(2n+3\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(2n-1\right)^5\left(2n+1\right)^5},$$

$$\lambda_n^{(8)} = \left[376064n^{10}+585216n^8-2245664n^6+256912n^4+827565n^2+ +68687\right] / \left[8192\pi^{14}(n-2)(n+2)(2n-3)(2n+3)(n-1)^3(n+1)^3\times \times(2n-1)^7(2n+1)^7\right],$$

і

$$u_n^{(1)}(x) = -\frac{\sqrt{2}\sin(\pi x(n+1))}{2\pi^2\left(2n+1\right)} + \frac{\sqrt{2}\sin(\pi x(n-1))}{2\pi^2\left(2n-1\right)},$$

$$u_n^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n+2\right)\right)}{16\pi^4\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} + \frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n-2\right)\right)}{16\pi^4\left(n-1\right)\left(2n-1\right)},$$

$$u_n^{(3)}(x) = -\frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n+3\right)\right)}{96\pi^6\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)} + + \frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n-3\right)\right)}{96\pi^6\left(n-1\right)\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)} - \frac{\sqrt{2}\left(4n^2+8n+7\right)\sin\left(\pi x\left(n+1\right)\right)}{32\pi^6\left(n+1\right)\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)^3} + + \frac{\sqrt{2}\left(4n^2-8n+7\right)\sin\left(\pi x\left(n-1\right)\right)}{32\pi^6\left(n-1\right)\left(2n+1\right)\left(2n-1\right)^3},$$

$$u_n^{(4)}(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n+4\right)\right)}{1536\pi^8\left(n+2\right)\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)} + + \frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x\left(n-4\right)\right)}{1536\pi^8\left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)} + + \frac{\sqrt{2}\left(2n^2+5n+5\right)\sin\left(\pi x\left(n+2\right)\right)}{48\pi^8\left(n+1\right)\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)^3\left(2n+3\right)} + + \frac{\sqrt{2}\left(2n^2-5n+5\right)\sin\left(\pi x\left(n-2\right)\right)}{48\pi^8\left(n-1\right)\left(2n+1\right)\left(2n-1\right)^3\left(2n-3\right)}.$$

Інші вирази для поправок не наводимо через їх громіздкість.

Зауважимо, що в цьому випадку для кожного фіксованого номера n_0 власного значення і власної функції існує такий крок FD-методу j_0, що для всіх наступних $j \geq j_0$ користуватись вище наведеними формулами не можна (виникає ділення на нуль). Зокрема, така ситуація виникає при $n = 1$, починаючи з поправок $\lambda_1^{(4)}$, $u_1^{(2)}(x)$, при $n = 2$ – з поправок $\lambda_2^{(8)}$, $u_2^{(4)}(x)$, при $n = 3$ – з поправок $\lambda_3^{(12)}$, $u_3^{(6)}(x)$, і, в загальному випадку, при $n = n_0$, починаючи з $\lambda_{n_0}^{(4n_0)}$, $u_{n_0}^{(2n_0)}(x)$. Тому замість вище наведених формул треба використовувати інші формули. Їх ми отримуємо для кожного фіксованого номера $n = n_0, n_0 + 1, \ldots.$ власного значення, розв'язуючи відповідні диференціальні рівняння (4) з накладеними умовами ортогональності (6).

Так, при $n = 1$, вже починаючи з $\lambda_1^{(2)}$, потрібно використовувати формули, наведені нижче, у яких ділення на нуль вже нема

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{1}{12\pi^2}, u_1^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{96\pi^4}\sin(3\pi x),$$
$$u_1^{(3)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{8640\pi^6}\left(25\sin(2\pi x) - 3\sin(4\pi x)\right), \lambda_1^{(4)} = \frac{5}{3456\pi^6},$$

а при $n = 2$ маємо

$$u_2^{(4)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{48384000\pi^8}\left(2944\sin(4\pi x) + 75\sin(6\pi x)\right),$$
$$u_2^{(5)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{21772800000\pi^{10}}\left(2223200\sin(\pi x) + 349344\sin(3\pi x) - \right.$$
$$\left. -35775\sin(5\pi x) - 375\sin(7\pi x)\right), \lambda_2^{(8)} = \frac{93824197}{31352832000000\pi^{14}}.$$

Експериментально визначеною поведінкою поправок до власних значень відносно порядкового номера n є

$$\lambda_n^{(j)} = O\left(\frac{1}{n^{2j-2}}\right).$$

3 $q(x)$ – кусково-стала функція, $q(x) \in Q^0[0, 1]$

Розглянемо такий випадок:

$$q(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2}, 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{a}{2}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{28}$$

тоді одержуємо $\lambda_n^{(2j+1)} = 0,\ j = 0, 1, ...,$ і

$$\lambda_n^{(2)} = a^2 \frac{2\cos(\pi n) + 1}{16\pi^2 n^2},\ \lambda_n^{(4)} = a^4 \left[-\frac{\cos(\pi n)}{768\pi^4 n^4} - \frac{5 + 2\cos(\pi n)}{256\pi^6 n^6} \right],$$

$$\lambda_n^{(6)} = a^6 \left[\frac{\cos(\pi n)}{245760\pi^6 n^6} + \frac{7 + 2\cos(\pi n)}{12288\pi^8 n^8} + \frac{3\,(3 + 8\cos(\pi n))}{4096\pi^{10} n^{10}} \right],$$

$$\lambda_n^{(8)} = a^8 \left[-\frac{\cos(\pi n)}{165150720\pi^8 n^8} - \frac{24 + 11\cos(\pi n)}{3932160\pi^{10} n^{10}} - \frac{11 + 28\cos(\pi n)}{98304\pi^{12} n^{12}} - \right.$$
$$\left. - \frac{13\,(11 + 4\cos(\pi n))}{65536\pi^{14} n^{14}} \right],$$

$$\lambda_n^{(10)} = a^{10} \left[\frac{\cos(\pi n)}{190253629440\pi^{10} n^{10}} + \frac{22 + 23\cos(\pi n)}{660602880\pi^{12} n^{12}} + \right.$$
$$\left. + \frac{208 + 357\cos(\pi n)}{62914560\pi^{14} n^{14}} + \frac{5\,(47 + 21\cos(\pi n))}{1572864\pi^{16} n^{16}} + \frac{17\,(5 + 14\cos(\pi n))}{262144\pi^{18} n^{18}} \right]$$

і

$$u_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{4\pi n} x \cos(\pi n x) - \frac{a\sqrt{2}(\cos(\pi n)+1)}{8\pi^2 n^2} \sin(\pi n x), 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -\frac{a\sqrt{2}}{4\pi n}\,(x-1)\cos(\pi n x) + \frac{a\sqrt{2}(\cos(\pi n)+1)}{8\pi^2 n^2} \sin(\pi n x),\ \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$u_n^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{a^2\sqrt{2}}{384} \left(\frac{12x^2-1}{\pi^2 n^2} + \frac{6(2\cos(\pi n)-1)}{\pi^4 n^4} \right) \sin(\pi n x) + \frac{a^2\sqrt{2}(\cos(\pi n)-1)}{32\pi^3 n^3} \times \\ \times x\cos(\pi n x), 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -\frac{a^2\sqrt{2}}{384} \left(\frac{12x^2-24x+11}{\pi^2 n^2} + \frac{6(2\cos(\pi n)-1)}{\pi^4 n^4} \right) \sin(\pi n x) + \\ + \frac{a^2\sqrt{2}(\cos(\pi n)-1)}{32\pi^3 n^3}\,(x-1)\cos(\pi n x),\ \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Інші вирази для поправок не наводимо через їх громіздкість. Даний приклад ілюструє наступну теорему і свідчить про те, що оцінка (29) відносно n є непокращуваною за порядком.

Теорема 3.1 *Нехай* $q(x) = a\left[-\frac{1}{2} + \mathrm{H}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ *і* $a > 0$. *Тоді виконуються співвідношення*

$$\left|\lambda_n^{(2j)}\right| \le c_{2j} \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2j}, j = 1, 2, ..., \tag{29}$$

$$\lambda_n^{(2j+1)} = 0, j = 0, 1, ..., \tag{30}$$

де $\mathrm{H}(x)$ *– функція Хевісайда і сталі* c_{2j} *не залежать від* a, n *і*

$$c_{2j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0. \tag{31}$$

Доведення. Справедливість рівностей (30) випливає з теореми 1.1. Доведення нерівностей (29) будемо здійснювати методом повної математичної індукції. При $j=1$ з (5) маємо

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{2\cos(\pi n)+1}{16\pi^2 n^2} a^2 \tag{32}$$

і c_2 тут дорівнює $\frac{3}{16}$.

Припустимо, що нерівність (29) виконується для всіх j від $j=1$ до $j=k$. Покажемо, що ця нерівність матиме місце і при $j=k+1$. З формул (4), (5) будемо мати

$$\begin{gathered}\lambda_n^{(2k+2)} = \int\limits_0^1 q(x)u_n^{(0)}(x)u_n^{(2k+1)}(x)dx = \int\limits_0^1 q(x)u_n^{(0)}(x)\int\limits_0^1 g_n(x,\xi_1)\times \\ \times\left[-\sum_{p=1}^{2k}\lambda_n^{(2k+1-p)}u_n^{(p)}(\xi_1)+q(\xi_1)u_n^{(2k)}(\xi_1)\right]d\xi_1 dx = \qquad (33) \\ = -\sum_{p=1}^{2k}\lambda_n^{(2k+1-p)}\int\limits_0^1 q(x)u_n^{(0)}(x)\int\limits_0^1 g_n(x,\xi_1)u_n^{(p)}(\xi_1)d\xi_1 dx + \\ + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 q(x)u_n^{(0)}(x)g_n(x,\xi_1)q(\xi_1)u_n^{(2k)}(\xi_1)d\xi_1 dx = R_{2k}+G_1\left(u_n^{(2k)}\right).\end{gathered}$$

Використовуючи оцінки

$$\max_{x,\xi_1\in[0,1]}\left|g_n\left(x,\xi_1\right)\right| \le \frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2(n\pi)^2} < \frac{7}{6\pi n}, \tag{34}$$

$$\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}\left|u_n^{(j)}\left(x\right)\right| \le d_j\left(\frac{a}{\pi n}\right)^j, j=0,1,...,$$

з (33) одержуємо

$$\begin{gathered}\left|\lambda_n^{(2k+2)}\right| \le \frac{a}{2}\frac{7}{6\pi n}\sum_{p=1}^{2k}c_{2k+1-p}d_p\left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+1}+\left|G_1\left(u_n^{(2k)}\right)\right| = \qquad (35) \\ = \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2}\frac{7}{12}\sum_{p=1}^{2k}c_{2k+1-p}d_p+\left|G_1\left(u_n^{(2k)}\right)\right| = \hat{R}_{2k}+\left|G_1\left(u_n^{(2k)}\right)\right|.\end{gathered}$$

де $d_j = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^j \frac{1}{(j+1)\sqrt{\pi j}}$ (див. [3, 4]). Далі

$$G_1\left(u_n^{(2k)}\right) = \int_0^1 \int_0^1 q(x) u_n^{(0)}(x) g_n(x,\xi_1) q(\xi_1) \int_0^1 g_n(\xi_1,\xi_2) \times$$

$$\times \left[- \sum_{p=1}^{2k-1} \lambda_n^{(2k-p)} u_n^{(p)}(\xi_2) + q(\xi_2) u_n^{(2k-1)}(\xi_2) \right] d\xi_2 d\xi_1 dx =$$

$$= R_{2k-1} + G_2\left(u_n^{(2k-1)}\right),$$

де

$$R_{2k-1} = - \sum_{s=1}^{2k-1} \lambda_n^{(2k-s)} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u_n^{(0)}(x) q(x) g_n(x,\xi_1) q(\xi_1) g_n(\xi_1,\xi_2) \times$$

$$\times u_n^{(s)}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 dx,$$

$$G_2\left(u_n^{(2k-1)}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q(x) u_n^{(0)}(x) g_n(x,\xi_1) q(\xi_1) g_n(\xi_1,\xi_2) q(\xi_2) \times$$

$$\times u_n^{(2k-1)}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 dx,$$

і, отже, справедлива нерівність

$$\left| G_1\left(u_n^{(2k)}\right) \right| \le |R_{2k-1}| + \left| G_2\left(u_n^{(2k-1)}\right) \right| \le \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2} \left(\frac{7}{12}\right)^2 \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{2k-1} c_{2k-s} d_s + \left| G_2\left(u_n^{(2k-1)}\right) \right| = \hat{R}_{2k-1} + \left| G_2\left(u_n^{(2k-1)}\right) \right|. \quad (36)$$

Продовжуючи за аналогією, одержуємо

$$G_{2k}\left(u_n^{(1)}\right) = G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right), \quad (37)$$

де

$$G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{2k+2} u_n^{(0)}(\xi_0) \prod_{i=0}^{2k} q(\xi_i) g_n(\xi_i,\xi_{i+1}) q(\xi_{2k+1}) \times$$

$$\times u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} \ldots d\xi_0, \ \ \xi_0 = x.$$

Із формул (33)–(37) випливає, що

$$\lambda_n^{(2k+2)} = \sum_{p=0}^{2k-2} R_{2k-p} + G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right), \tag{38}$$

де

$$R_{2k-p} = -\sum_{s=1}^{2k-p} \lambda_n^{(2k-p+1-s)} \underbrace{\int_0^1 ... \int_0^1}_{p+2} u_n^{(0)}(\xi_0) \prod_{i=0}^{p} q(\xi_i) g_n(\xi_i, \xi_{i+1}) \times$$
$$\times\, u_n^{(s)}(\xi_{p+1}) d\xi_{p+1} ... d\xi_0, p = 0, 1, ..., 2k,$$

причому $R_0 = R_1 = 0$. З (38) отримуємо нерівність

$$\left|\lambda_n^{(2k+2)}\right| \leq \sum_{p=0}^{2k-2} |R_{2k-p}| + \left|G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right)\right| \leq \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2} \times$$
$$\times \left\{\sum_{p=1}^{2k} \left(\frac{7}{12}\right)^p \sum_{s=1}^{2k+1-p} c_{2k+2-s-p} d_s\right\} + \left|G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right)\right|. \tag{39}$$

Змінивши порядок сумування в (39), отримаємо оцінку

$$\left|\lambda_n^{(2k+2)}\right| \leq \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2} \chi_1 \sum_{p=1}^{k} c_{2p} \left(\frac{7}{12}\right)^{2k-2p} + \left|G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right)\right|, \tag{40}$$

де $\chi_1 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 \chi$, $\quad \chi = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{48}{7\pi^2}\right)^l \frac{1}{(l+1)\sqrt{\pi l}} \approx 0.316252908$.

Залишилось оцінити $\left|G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right)\right|$. Враховуючи вигляд $q(x)$ з умов теореми, можна переконатись, що має місце формула

$$G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right) = a^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{2k} \int_0^{\frac{1}{2}} u_n^{(0)}(\xi_0) \prod_{i=0}^{2k-1} g_n(\xi_i, \xi_{i+1}) q(\xi_{i+1}) \times$$
$$\times\, g_n(\xi_{2k}, \xi_{2k+1}) u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} \ldots d\xi_0. \tag{41}$$

Обчислення інтегралів $t_j(\xi_j)$ в (41) по змінним ξ_j, $j = 0, 1, ..., 2k+1$ виконаємо послідовно, починаючи з ξ_0 і до ξ_{2k+1}. Отримаємо

$$t_0(\xi_0) = t_{0,1}(\xi_0) = u_n^{(0)}(\xi_0) = \sqrt{2}\sin(\pi n \xi_0),$$

$$t_1(\xi_1) = -a\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g_n(\xi_0, \xi_1) t_0(\xi_0) d\xi_0 = t_{1,1}(\xi_1) + t_{1,2}(\xi_1),$$

$$t_{1,1}(\xi_1) = \frac{a\sqrt{2}}{4\pi n}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_1\right|\right)\cos\left(\pi n \xi_1\right),$$

$$t_{1,2}(\xi_1) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - \xi_1\right)\frac{a\sqrt{2}\left(1 + \cos\left(\pi n\right)\right)}{8\pi^2 n^2}\sin\left(\pi n \xi_1\right),$$

$$t_2(\xi_2) = \int\limits_0^1 q(\xi_1) g_n(\xi_1, \xi_2) t_1(\xi_1) d\xi_1 = t_{2,1}(\xi_2) + t_{2,2}(\xi_2),$$

$$t_{2,1}(\xi_2) = \frac{a^2\sqrt{2}}{4\pi^2 n^2}\left[\frac{1}{96} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_2\right|\right)^2\right]\sin\left(\pi n \xi_2\right),$$

$$t_{2,2}(\xi_2) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - \xi_2\right)\frac{a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi n\right) - 1\right)}{32\pi^3 n^3}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_2\right|\right)\cos\left(\pi n \xi_2\right) -$$

$$- \frac{a^2\sqrt{2}\left(2\cos\left(\pi n\right) - 1\right)}{64\pi^4 n^4}\sin\left(\pi n \xi_2\right),$$

$$t_3(\xi_3) = \int\limits_0^1 q(\xi_2) g_n(\xi_2, \xi_3) t_2(\xi_2) d\xi_1 = t_{3,1}(\xi_3) + t_{3,2}(\xi_3),$$

$$t_{3,1}(\xi_3) = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi^3 n^3}\left[\frac{1}{384}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_3\right|\right) - \frac{1}{96}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_3\right|\right)^3\right]\cos\left(\pi n \xi_3\right),$$

$$t_{3,2}(\xi_3) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - \xi_3\right)\frac{a^3\sqrt{2}}{3072\pi^4 n^4}\left[12\left(\cos\left(\pi n\right) - 2\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_3\right|\right)^2 - 5\cos\left(\pi n\right) + 4\right]\sin\left(\pi n \xi_3\right) - \frac{3a^3\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi n\right) - 1\right)}{256\pi^5 n^5}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_3\right|\right)\cos\left(\pi n \xi_3\right)$$

і так далі. Методом повної математичної індукції доводимо, що мають місце представлення

$$
\begin{gathered}
t_{2j}(\xi_{2j}) = \int\limits_0^1 q(\xi_{2j-1}) g_n(\xi_{2j-1}, \xi_{2j}) t_{2j-1}(\xi_{2j-1}) d\xi_{2j-1} = \\
= t_{2j,1}(\xi_{2j}) + t_{2j,2}(\xi_{2j}), \quad j = 1, 2, ..., \quad t_0(\xi_0) = t_{0,1}(\xi_0) = u_n^{(0)}(\xi_0), \\
t_{2j,1}(\xi_{2j}) = \frac{a^{2j}\sqrt{2}}{4(n\pi)^{2j}} \sum_{p=0}^{j} \mu_{2p}^{(2j)} \left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_{2j}\right|\right)^{2p} \sin(n\pi\xi_{2j}),
\end{gathered}
\tag{42}
$$

а також

$$
\begin{gathered}
t_{2j+1}(\xi_{2j+1}) = \int\limits_0^1 q(\xi_{2j}) g_n(\xi_{2j}, \xi_{2j+1}) t_{2j}(\xi_{2j}) d\xi_{2j} = \\
= t_{2j+1,1}(\xi_{2j+1}) + t_{2j+1,2}(\xi_{2j+1}), \quad j = 0, 1, ..., \\
t_{2j+1,1}(\xi_{2j+1}) = \frac{a^{2j+1}\sqrt{2}}{4(n\pi)^{2j+1}} \sum_{p=0}^{j} \mu_{2p+1}^{(2j+1)} \left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \xi_{2j+1}\right|\right)^{2p+1} \times \\
\times \cos(n\pi\xi_{2j+1}).
\end{gathered}
\tag{43}
$$

Із (42) і (43) одержуємо

$$
\begin{gathered}
\mu_{2p+1}^{(2j+1)} = \frac{\mu_{2p}^{(2j)}}{4\,(2p+1)}, \; p = 0, 1, ..., j, \; j = 0, 1, ..., \; \mu_0^{(0)} = 4, \\
\mu_0^{(2j)} = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{\mu_{2p+1}^{(2j-1)}}{4\,(2p+2)\,(2p+3)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+2}, j = 1, 2, ..., \\
\mu_{2p+2}^{(2j)} = -\frac{\mu_{2p+1}^{(2j-1)}}{4\,(2p+2)}, p = 0, 1, ..., j-1, j = 1, 2, ...,
\end{gathered}
\tag{44}
$$

Наслідком співвідношень (44) є

$$
\begin{gathered}
\mu_{2p+1}^{(2j+1)} = (-1)^p \frac{\mu_1^{(2j-2p+1)}}{16^p\,(2p+1)!}, \; p = 0, 1, ..., j, \; j = 0, 1, ..., \\
\mu_1^{(2j+1)} = \frac{1}{64} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(-1)^s}{16^s (2s+3)!} \mu_1^{(2j-2s-1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s}, j = 1, 2, ...
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Введемо твірну функцію $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \mu_1^{(2j+1)}$, тоді з другого рівняння в (45) маємо

$$f(z) = \frac{\frac{\sqrt{z}}{8}}{\sin\left(\frac{\sqrt{z}}{8}\right)},$$

звідки

$$\mu_1^{(2j+1)} = \frac{1}{j!} \left.\frac{d^j f(z)}{dz^j}\right|_{z=0}. \tag{46}$$

Із (44), (45) і (46) одержуємо розв'язок системи рекурентних співвідношень (44)

$$\begin{aligned}
\mu_{2p+1}^{(2j+1)} &= \frac{(-1)^p}{16^p\,(2p+1)!\,(j-p)!} \left.\frac{d^{j-p} f(z)}{dz^{j-p}}\right|_{z=0}, \\
&\qquad p = 0, 1, ..., j, j = 0, 1, ..., \\
\mu_0^{(2j)} &= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(-1)^p}{2^{6p+4}\,(2p+3)!\,(j-p-1)!} \left.\frac{d^{j-p-1} f(z)}{dz^{j-p-1}}\right|_{z=0}, \\
&\qquad j = 1, 2, ..., \\
\mu_{2p+2}^{(2j)} &= \frac{(-1)^{p+1}}{2^{4p+2}\,(2p+2)!\,(j-p-1)!} \left.\frac{d^{j-p-1} f(z)}{dz^{j-p-1}}\right|_{z=0}, \\
&\qquad p = 0, 1, ..., j-1, j = 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{47}$$

Із формул (42) і (43) відповідно отримуємо оцінки

$$\|t_{2j+1,2}\|_{\infty} \leq M_n^{2j+2} \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{p=0}^{j} \left|\mu_{2p}^{(2j)}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3} + \frac{7}{12} M_n \|t_{2j,2}\|_{\infty}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\|t_{2j,2}\|_{\infty} \quad \leq \quad & M_n^{2j+1} \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{p=0}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3} \left[\frac{7}{4}\left|\mu_{2p+1}^{(2j-1)}\right| + \left|\mu_{2p+2}^{(2j)}\right|\right] + \\
& + \frac{7}{12} M_n \|t_{2j-1,2}\|_{\infty},
\end{aligned} \tag{49}$$

де $M_n = \frac{a}{\pi n}$, $\|t_{2j,2}\|_{\infty} = \max\limits_{\xi_{2j} \in [0,1]} |t_{2j,2}(\xi_{2j})|$.

Використаємо запропоновану в роботі [4] техніку переходу від системи рекурентних нерівностей (48)-(49) до мажоруючої її зверху системи рівнянь. Розв'язавши цю систему, отримуємо оцінки

$$\|t_{2j+1,2}\|_\infty \le \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2j+2} \sum_{s=0}^{j} \left[\frac{7}{12}\right]^{2s} F_{j-s}, \tag{50}$$

$$\|t_{2j,2}\|_\infty \le \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2j+1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[\frac{7}{12}\right]^{2r} D_{j-r}, \tag{51}$$

де

$$F_j = \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\sum_{p=0}^{j}\left|\mu_{2p}^{(2j)}\right|\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3} + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{12}\sum_{p=0}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3}\left[\frac{7}{4}\left|\mu_{2p+1}^{(2j-1)}\right| + \left|\mu_{2p+2}^{(2j)}\right|\right]\right),$$

$$D_j = \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\frac{7}{12}\sum_{p=0}^{j-1}\left|\mu_{2p}^{(2j-2)}\right|\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3} + \right.$$
$$\left. + \sum_{p=0}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+3}\left[\frac{7}{4}\left|\mu_{2p+1}^{(2j-1)}\right| + \left|\mu_{2p+2}^{(2j)}\right|\right]\right).$$

За допомогою функції

$$\tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left|\mu_1^{(2j+1)}\right| = \frac{\frac{\sqrt{z}}{8}}{\sinh\left(\frac{\sqrt{z}}{8}\right)} \tag{52}$$

знаходимо оцінки для виразів F_j і D_j

$$|F_j| \le \frac{59\sqrt{2}}{3a\sinh 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{6j+1}, \quad |D_j| \le \frac{13\sqrt{2}}{3a\sinh 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{6j-3}. \tag{53}$$

Із (50), (51), (53) отримуємо

$$\|t_{2j+1,2}\|_\infty \le \frac{a^{2j+1}}{(\pi n)^{2j+2}}\frac{177\sqrt{2}}{187\sinh 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{6j+1}\left[\left(\frac{14}{3}\right)^{2j+2} - 1\right], \tag{54}$$

$$\|t_{2j,2}\|_\infty \leq \frac{a^{2j}}{(\pi n)^{2j+1}} \frac{39\sqrt{2}}{187\sinh 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{6j-3} \left[\left(\frac{14}{3}\right)^{2j} - 1\right]. \qquad (55)$$

Останній інтеграл, який обчислюємо в (41), є

$$G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right) = \int_0^1 u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) q(\xi_{2k+1}) t_{2k+1}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} =$$

$$= -a \int_0^{\frac{1}{2}} u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) t_{2k+1}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} = -a \int_0^{\frac{1}{2}} u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) \times$$

$$\times\, t_{2k+1,1}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} + \int_0^1 u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) q(\xi_{2k+1}) t_{2k+1,2}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1} =$$

$$= -\frac{a^{2k+2}}{4(n\pi)^{2k+2}} \sum_{p=0}^{k} \mu_{2p+1}^{(2k+1)} \left[(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+2} + \frac{2p+1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \xi_{2k+1}^{2p} \times\right.$$

$$\left.\times \cos(2n\pi\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1}\right] + \int_0^1 u_n^{(0)}(\xi_{2k+1}) q(\xi_{2k+1}) t_{2k+1,2}(\xi_{2k+1}) d\xi_{2k+1}.$$

Звідси, враховуючи (54) і використовуючи функцію (52), одержуємо оцінку

$$\left|G_{2k+1}\left(u_n^{(0)}\right)\right| \leq \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2} \cdot \beta_{2k}, k = 0, 1, ..., \qquad (56)$$

де

$$\beta_{2k} = \frac{1}{sh1} \left(\frac{1}{2}\right)^{6k+2} \left[\frac{1}{2} + \frac{177\sqrt{2}}{187} \left[\left(\frac{14}{3}\right)^{2k+2} - 1\right]\right].$$

З (40) і (56) маємо

$$\left|\lambda_n^{(2k+2)}\right| \leq \left(\frac{a}{\pi n}\right)^{2k+2} \left[\chi_1 \sum_{p=1}^{k} c_{2p} \left(\frac{7}{12}\right)^{2k-2p} + \beta_{2k}\right], \qquad (57)$$

звідки отримуємо

$$c_{2k+2} \leq \chi_1 \sum_{p=1}^{k} c_{2p} \left(\frac{7}{12}\right)^{2k-2p} + \beta_{2k}. \qquad (58)$$

Замість знаку нерівності в (58) поставимо знак рівності. Отримаємо мажоруюче рекурентне рівняння

$$C_{2k+2} = \chi_1 \sum_{p=1}^{k} C_{2p} \left(\frac{7}{12}\right)^{2k-2p} + \beta_{2k}, \quad k = 0, 1, ... \tag{59}$$

в тому розумінні, що

$$C_{2k+2} \geq c_{2k+2}, \quad k = 0, 1, ... \tag{60}$$

Тут

$$C_2 = c_2 = \beta_0 = \frac{1}{sh1}\left[\frac{1}{8} + \frac{59\sqrt{2}}{12}\right]. \tag{61}$$

Розв'язуючи рекурентне рівняння (59), отримаємо

$$C_{2k+2} = \chi_1 \sum_{p=0}^{k-1} \beta_{2p} \left(\chi_1 + \left(\frac{7}{12}\right)^2\right)^{k-1-p} + \beta_{2k}, \ k = 0, 1, ..., \tag{62}$$

звідки згідно (60) одержимо оцінку

$$c_{2k+2} \leq 6.1570 \cdot [0.4479]^k - 0.2 \cdot 10^{-8} \cdot [0.3403]^k - 0.1340 \cdot [0.0156]^k . \tag{63}$$

Із (57), (60)–(63) випливає справедливість співвідношень (29) і (31).

Теорема доведена.

4 $q(x)$ – неперервна кусково-гладка функція, $q(x) \in Q^1[0,1] \cap C[0,1]$

Нехай

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \tag{64}$$

тоді поправки до власних значень відносно номера n ведуть себе наступним чином:

$$\lambda_n^{(1)} = O(1), \lambda_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \lambda_{2\mu}^{(3)} = O\left(\frac{1}{(2\mu)^6}\right), n = 2\mu, \mu = 1, 2, ...,$$

$$\lambda_{2\mu-1}^{(3)} = O\left(\frac{1}{(2\mu-1)^4}\right), n = 2\mu - 1, \mu = 1, 2, ...,$$

$$\lambda_n^{(2j)} = O\left(\frac{1}{n^{2j+2}}\right), \ \lambda_n^{(2j+1)} = O\left(\frac{1}{n^{2j+2}}\right), j = 2, 3, ...$$

Розрахунки здійснені до 14-ї поправки. Для прикладу наведемо декілька перших:

$$\lambda_n^{(1)}=\frac{3}{8}+\frac{1-\cos(\pi n)}{4\pi^2 n^2},$$

$$\lambda_n^{(2)}=\frac{5}{768\pi^2 n^2}-\frac{3\cos(\pi n)+7}{64\pi^4 n^4}+\frac{5\left(\cos(\pi n)-1\right)}{32\pi^6 n^6},$$

$$\lambda_n^{(3)}=\frac{\cos(\pi n)-1}{2048\pi^4 n^4}+\frac{5\left(8+\cos(\pi n)\right)}{768\pi^6 n^6}+\frac{77\left(\cos(\pi n)-1\right)}{384\pi^8 n^8}-\frac{3\left(\cos(\pi n)-1\right)}{16\pi^{10} n^{10}},$$

$$\lambda_{2\mu-1}^{(3)}=-\frac{1}{1024\pi^4\left(2\mu-1\right)^4}+\frac{35}{768\pi^6\left(2\mu-1\right)^6}-\frac{77}{192\pi^8\left(2\mu-1\right)^8}+$$
$$+\frac{3}{8\pi^{10}\left(2\mu-1\right)^{10}}, n=2\mu-1,\ \lambda_{2\mu}^{(3)}=\frac{15}{256\pi^6\left(2\mu\right)^6}, n=2\mu, \mu=1,2,...,$$

$$\lambda_n^{(4)}=\frac{42\cos(\pi n)+43}{589824\pi^6 n^6}+\frac{47\cos(\pi n)-252}{12288\pi^8 n^8}+\frac{1274+761\cos(\pi n)}{4096\pi^{10} n^{10}}-$$
$$-\frac{913\left(\cos(\pi n)-1\right)}{1536\pi^{12} n^{12}}+\frac{143\left(\cos(\pi n)-1\right)}{512\pi^{14} n^{14}}.$$

Дві перші поправки до власних функцій мають вигляд:

$$u_n^{(1)}(x)=\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1}{\pi n}+\frac{2(\cos(\pi n)-1)}{\pi^3 n^3}\right)x\cos(\pi n x)+ \\ +\frac{\sqrt{2}}{32}\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}+\frac{6(\cos(\pi n)-1)}{\pi^4 n^4}\right)\sin(\pi n x), 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{4x-1}{\pi n}-\frac{2(\cos(\pi n)-1)}{\pi^3 n^3}\right)(x-1)\cos(\pi n x)- \\ -\frac{\sqrt{2}}{32}\left(\frac{8x-5}{\pi^2 n^2}-\frac{6(\cos(\pi n)-1)}{\pi^4 n^4}\right)\sin(\pi n x), \frac{1}{2}< x\le 1, \end{cases}$$

$$u_n^{(2)}(x)=\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{1536}\left(\frac{1}{\pi^3 n^3}+\frac{24(3\cos(\pi n)+2)}{\pi^5 n^5}-\frac{216(\cos(\pi n)-1)}{\pi^7 n^7}\right)x\cos(\pi n x)- \\ -\frac{\sqrt{2}}{61440}\left(\frac{120x^2-17}{\pi^2 n^2}+\frac{10\left(48(\cos(\pi n)-1)x^2-23\cos(\pi n)+9\right)}{\pi^4 n^4}-\right. \\ \left.-\frac{80\left(12(\cos(\pi n)-1)x^2+71\cos(\pi n)+67\right)}{\pi^6 n^6}+\frac{12960(\cos(\pi n)-1)}{\pi^8 n^8}\right)\times \\ \times\sin(\pi n x), 0\le x\le\frac{1}{2}, \\ -\frac{\sqrt{2}}{1536}\left(\frac{160x^2-140x+29}{\pi^3 n^3}+\frac{24(7(\cos(\pi n)-1)x-4\cos(\pi n)+9)}{\pi^5 n^5}-\right. \\ \left.-\frac{216(\cos(\pi n)-1)}{\pi^7 n^7}\right)(x-1)\cos(\pi n x)-\frac{\sqrt{2}}{61440}\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[1920x^4-\right.\right. \\ -4800x^3+3960x^2-1200x+103]-\frac{10}{\pi^4 n^4}[192(\cos(\pi n)-1)\times \\ \times x^3-48(9\cos(\pi n)-29)x^2+48(6\cos(\pi n)-31)x- \\ -73\cos(\pi n)+399]-\frac{80\left((\cos(\pi n)-1)\left(12x^2-108x\right)+65\cos(\pi n)-47\right)}{\pi^6 n^6}+ \\ \left.+\frac{12960(\cos(\pi n)-1)}{\pi^8 n^8}\right)\sin(\pi n x), \frac{1}{2}< x\le 1. \end{cases}$$

5 Функція $q(x)$ належить негативному простору Соболєва $H_2^{-1}(0,1)$

Нехай $q(x) = a\delta\left(x - 1/2\right)$, $a > 0$, $\delta\left(z\right)$ – дельта-функція Дірака. Як відомо, для будь-якої функції $f(x) \in C^1[0,1]$ виконується фільтруюча властивість

$$\int\limits_0^1 f(x)\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = f\left(\frac{1}{2}\right). \tag{65}$$

Тоді для всіх парних n отримуємо $u_n^{(j)}(x) = 0$, $\lambda_n^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, ...$ і FD-метод 0-го рангу дає точний розв'язок задачі (1) $\lambda_n = \lambda_n^{(0)} = (\pi n)^2$, $u_n(x) = u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$, а для непарних $n = 2\mu - 1, \mu = 1, 2, ...$ маємо $\lambda_n^{(2j)} = O\left(\frac{1}{n^{2j}}\right)$, $\lambda_n^{(2j-1)} = O\left(\frac{1}{n^{2j-2}}\right)$, $j = 1, 2, ...$. Наведемо для прикладу декілька перших поправок при $n = 2\mu - 1, \mu = 1, 2, ...$

$$\lambda_n^{(1)} = 2a,\ \lambda_n^{(2)} = -\frac{a^2}{\pi^2 n^2},\ \lambda_n^{(3)} = -\frac{a^3}{3\pi^2 n^2} + \frac{7a^3}{2\pi^4 n^4},$$

$$\lambda_n^{(4)} = \frac{19a^4}{24\pi^4 n^4} - \frac{31a^4}{4\pi^6 n^6},$$

$$\lambda_n^{(5)} = \frac{a^5}{15\pi^4 n^4} - \frac{31a^5}{12\pi^6 n^6} + \frac{38785a^5}{2048\pi^8 n^8} - \frac{93a^5}{16384\pi^{10} n^{10}}.$$

При непарних n поправки до власних функцій $u_n^{(j)}(x), j = 1, 2, ...$ є парними функціями на відрізку $[0, 1]$ відносно точки $\frac{1}{2}$ для будь-якого $j = 1, 2, ...$, тобто $u_n^{(j)}(x) = u_n^{(j)}(1 - x)$. Так, наприклад,

$$u_n^{(1)}(x) = a\sqrt{2}\,(-1)^{\mu+1} g_n\left(x, \frac{1}{2}\right),$$

$$u_n^{(2)}(x) = a^2\sqrt{2}\,(-1)^{\mu+1}\left[-2\int\limits_0^1 g_n\left(\xi, \frac{1}{2}\right) g_n\left(x, \xi\right) d\xi + \right.$$
$$\left. + g_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) g_n\left(x, \frac{1}{2}\right)\right].$$

Дослідимо збіжність FD-методу для даного випадку. Враховуючи властивості функції $q(x)$, з (5) і (11) отримуємо

$$\lambda_n^{(j+1)} = a\int\limits_0^1 \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x) = a\sqrt{2}\,(-1)^{\mu+1} u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$u_n^{(j+1)}(x) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\left[-\sum_{p=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(\xi) + a\delta\left(\xi - \frac{1}{2}\right)u_n^{(j)}(\xi)\right]d\xi =$$

$$= -\sum_{p=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}\int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\,u_n^{(p)}(\xi)d\xi + ag_n\left(x,\frac{1}{2}\right)u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| = a\sqrt{2}\left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \tag{66}$$

$$\left|u_n^{(j+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \sum_{p=1}^{j}\left|\lambda_n^{(j+1-p)}\right|\left|\int\limits_0^1 g_n\left(\frac{1}{2},\xi\right)u_n^{(p)}(\xi)\,d\xi\right| + \\ + a\left|g_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right|\left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \tag{67}$$

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_{L_2} \le \sum_{p=1}^{j}\left|\lambda_n^{(j+1-p)}\right|\left\|\int\limits_0^1 g_n(\cdot,\xi)\,u_n^{(p)}(\xi)d\xi\right\|_{L_2} + \\ + a\left\|g_n\left(\cdot,\frac{1}{2}\right)\right\|_{L_2}\left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|. \tag{68}$$

Тоді маємо оцінки

$$\left|u_n^{(j+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le a\sqrt{2}\sum_{p=1}^{j}\left|u_n^{(j-p)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|M_n\left\|u_n^{(p)}\right\|_{L_2} + a\left|g_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right|\times \\ \times\left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le a\sqrt{2}M_n\sum_{p=0}^{j}\left|u_n^{(j-p)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\left\|u_n^{(p)}\right\|_{L_2}, \tag{69}$$

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_{L_2} \le a\sqrt{2}M_n\sum_{p=0}^{j}\left|u_n^{(j-p)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\left\|u_n^{(p)}\right\|_{L_2}, \tag{70}$$

де

$$M_n = \max_{x,\xi\in[0,1]}|g_n(x,\xi)| \le \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2(n\pi)^2}. \tag{71}$$

Введемо позначення

$$
\begin{aligned}
v_{j+1} &= \left(a\sqrt{2}\, M_n\,\right)^{-j-1} \left| u_n^{(j+1)} \left(\frac{1}{2}\right) \right|, \\
V_{j+1} &= \left(a\sqrt{2}\, M_n\,\right)^{-j-1} \left\| u_n^{(j+1)} \right\|_{L_2}.
\end{aligned} \tag{72}
$$

Виконаємо заміни (72) в системі рекурентних нерівностей (69), (70). Одержимо

$$
v_{j+1} \le \sum_{p=0}^{j} v_{j-p} V_p, \quad V_{j+1} \le \sum_{p=0}^{j} v_{j-p} V_p. \tag{73}
$$

Замість знаку нерівності поставимо знак рівності. Отримаємо мажоруючу систему рекурентних рівнянь

$$
\omega_{j+1} = \sum_{p=0}^{j} \omega_{j-p} \Omega_p, \quad \Omega_{j+1} = \sum_{p=0}^{j} \omega_{j-p} \Omega_p, \quad j = 1, 2, ... \tag{74}
$$

в тому розумінні, що її розв'язок мажорує відповідний розв'язок системи нерівностей (73), тобто

$$
\Omega_j \ge V_j\,,\ \omega_j \ge v_j\,,\ j = 0, 1, ...\,. \tag{75}
$$

Тут

$$
v_0 = \omega_0 = \left| u_n^{(0)} \left(\frac{1}{2}\right) \right| = \sqrt{2}, \qquad V_0 = \Omega_0 = \left\| u_n^{(0)} \right\|_{L_2} = 1. \tag{76}
$$

Як бачимо,

$$
\omega_{j+1} = \sqrt{2}\Omega_{j+1}, \tag{77}
$$

тоді з (74), як наслідок, одержуємо систему рекурентних рівнянь

$$
\Omega_{j+1} = \sum_{p=0}^{j} \Omega_{j-p} \Omega_p, j = 0, 1, ...\,, \Omega_0 = 1, \tag{78}
$$

розв'язком якої згідно [8, с.210-212] буде вираз

$$
\Omega_j = 4^j 2 \frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!},\ \ j = 0, 1, ...\,. \tag{79}
$$

Враховуючи (66), (75), (77), (79), будемо мати

$$\left\|u_n^{(j)}\right\|_{L_2} \le 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(a4\sqrt{2}\,M_n\,\right)^j \le \frac{\left(a4\sqrt{2}\,M_n\right)^j}{(j+1)\sqrt{\pi j}}. \tag{80}$$

Остання частина нерівностей (80) була одержана за допомогою міркувань, пов'язаних з доведенням формули Валліса [9, с.344]. Враховуючи (76), (77), (80), одержуємо

$$\begin{aligned} \left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &\le 2^{\frac{3}{2}}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(a4\sqrt{2}\,M_n\right)^j \le \sqrt{2}\frac{\left(a4\sqrt{2}\,M_n\right)^j}{(j+1)\sqrt{\pi j}} \\ \left|\lambda_n^{(j+1)}\right| = \sqrt{2}\left|u_n^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &\le 4\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(a4\sqrt{2}\,M_n\right)^j \le \\ &\le 2\frac{\left(a4\sqrt{2}\,M_n\right)^j}{(j+1)\sqrt{\pi j}}. \end{aligned} \tag{81}$$

Із формул (80) і (81) випливає наступне твердження.

Теорема 5.1 *Нехай виконується умова*

$$r_n = a4\sqrt{2}M_n < 1, \tag{82}$$

тоді FD-метод для задачі Штурма-Ліувілля (1) з $q(x) = a\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *збігається суперекспоненціально і мають місце оцінки точності*

$$\left\|u_n - \overset{m}{u}_n\right\|_{L_2} = \left\|u_n - \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}\right\|_{L_2} \le \frac{r_n^{m+1}}{(m+2)\sqrt{\pi(m+1)}(1-r_n)}, \tag{83}$$

$$\left|\lambda_n - \overset{m}{\lambda}_n\right| = \left|\lambda_n - \sum_{j=0}^{m}\lambda_n^{(j)}\right| \le \frac{r_n^m}{(m+1)\sqrt{\pi m}(1-r_n)}. \tag{84}$$

Оцінки (81) для $\lambda_n^{(j+1)}$ у випадку непарного n за порядком є непокращуваними, про що свідчать наведені вище аналітичні розрахунки.

[1] *Adomian G.* Solving frontier problems of physics: The Decomposition method. — Dordrecht and Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994. — 352 p.

[2] *Макаров В.Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Доклады АН СССР. — 1991. — **1(320)**. — С. 34–39.

[3] *Макаров В.Л.* FD-метод – экспоненциальная скорость сходимости // Обчислювальна та прикладна математика. — 1997. — **82**. — С. 69–74.

[4] *Бандирський Б.Й., Макаров В.Л., Уханьов О.Л.* FD-метод для задач Штурма-Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності // Журнал обчисл. прикл. математики.— 2000.— **1(85)**.— С. 1–60.

[5] *Makarov V.L., Vinokur V.V.* The FD method for first-order linear hyperbolic differential equations with piecewise smooth coefficients // J. of Mathematical Sciences. — 1995. — **5(77)**. — С. 3399–3405.

[6] *Макаров В.Л., Романюк Н.М.* Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма-Ліувілля // Доповіді НАН України. — 2013 (прийнято до друку).

[7] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

[8] *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1968. — 328 с.

[9] *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1968. — Т. 1. — 328 с.