Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 178–190

УДК 531.36;531.011

Про деякі особливості симетричних рухів у задачі трьох тіл *

С.П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

Досліджується окремий випадок задачі трьох тіл, коли два з них мають однакові маси, що забезпечує існування многовиду симетричних рухів. Розглядаються інваріанти симетричних рухів, а також знаходяться умови обмеженості (стійкості за Лагранжем) цих рухів. Для аналізу стійкості ми істотно спираємося на структуру многовиду симетричних рухів, а також використовуємо інтеграли енергії та моменту кількостей руху.

We study a special case of the three-body problem where two of the bodies are of the same weight and there is a manifold of symmetrical motions. We consider invariants of the symmetrical motions and establish the boundedness conditions (of the Lagrange stability) of these motions. To analyze the stability, we substantially rely on the structure of the manifold of symmetric motions and use integrals of the energy and angular momentum.

1 Вступ

Відомо, що симетричні рухи у задачі трьох тіл зазвичай пов'язують з ім'ям Сітнікова [1], якому вдалося довести існування осцилюючих фінальних еволюцій якраз на прикладі цих рухів. З цього приводу див. також [2].

Нижче ми розглядатимемо деякі специфічні особливості симетричних рухів, а також зупинимося на умовах їх обмеженості. Для

* Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0112U001015

цього в подальшому скористаємось рівняннями руху задачі трьох тіл у формі рівнянь відстаней [3]:

$$
\begin{gathered}
{\rho_{12}^2}'' = 2E_{12} + \frac{2}{\rho_{12}} + \\
+\mu_3 \left\{ \frac{2}{\rho_{12}} + \frac{1}{\rho_{13}} \left(\frac{\rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2} - 1 \right) + \frac{1}{\rho_{23}} \left(\frac{\rho_{13}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{23}^2} - 1 \right) \right\}, \\
{\rho_{13}^2}'' = 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \\
+\mu_2 \left\{ \frac{2}{\rho_{13}} + \frac{1}{\rho_{12}} \left(\frac{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} - 1 \right) + \frac{1}{\rho_{23}} \left(\frac{\rho_{12}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1 \right) \right\}, \\
{\rho_{23}^2}'' = 2E_{23} + \frac{2}{\rho_{23}} + \\
+\mu_1 \left\{ \frac{2}{\rho_{23}} + \frac{1}{\rho_{12}} \left(\frac{\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{\rho_{12}^2} - 1 \right) + \frac{1}{\rho_{13}} \left(\frac{\rho_{12}^2 - \rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1 \right) \right\}, \\
E_{12}' = \mu_3 \left[{\rho_{12}^2}' \left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) + \right. \\
\left. + {\rho_{23}^2}' \left(\frac{1}{\rho_{13}^3} - \frac{1}{\rho_{23}^3} \right) + 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}' \left(\frac{1}{\rho_{23}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) \right], \\
E_{13}' = -\mu_2 \left[{\rho_{13}^2}' \left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) + 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}' \left(\frac{1}{\rho_{23}^3} - \frac{1}{\rho_{12}^3} \right) \right], \\
E_{23}' = \mu_1 \left[{\rho_{23}^2}' \left(\frac{1}{\rho_{23}^3} - \frac{1}{\rho_{12}^3} \right) + 2\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}' \left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) \right], \\
(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}')' = \frac{1}{2}(-E_{12} + E_{13} + E_{23}) + \left[-\frac{1}{\rho_{12}} + \frac{1}{\rho_{13}} + \frac{1}{\rho_{23}} - \right. \\
\left. - \frac{(\mu_1 + \mu_3)}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2} \right) + \frac{\mu_2}{2\rho_{12}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} \right) - \frac{\mu_2}{\rho_{23}} \right].
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Тут

$$
\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|, \quad v_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}'|, \quad E_{12} = v_{12}^2 - \frac{2}{\rho_{12}},
$$

$$
E_{13} = v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}}, \; E_{23} = v_{23}^2 - \frac{2}{\rho_{23}}.
$$

В порівнянні з [3] форму запису передостаннього рівняння системи ми замінили на еквівалентну, більш зручну для нашого дослідження.

Надалі ми істотно використовуватимемо властивість консервативності системи (1), тобто інтеграл енергії

$$\frac{1}{2}\sum_{i}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i'^2-\sum_{i<j}\frac{\mu_i\mu_j}{|\boldsymbol{\rho}_{ij}|}=h=\text{const},\tag{2}$$

а також векторний інтеграл моменту кількостей руху

$$\sum_{i}^{3}\mu_i(\boldsymbol{\rho}_i\times\boldsymbol{\rho}_i')=\mathbf{C},\tag{3}$$

вважаючи в подальшому, що $\mathbf{C}\neq\mathbf{0}$.

Означення 1. Фіксовану пару матеріальних точок $(\mu_i,\mu_j), i<j$ системи (1) згідно з [4] назвемо *стійкою за Хіллом*, якщо виконується нерівність

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)|<c_1\quad\forall\tau\in R,\ 0<c_1=\text{const}.\tag{4}$$

Означення 2. Рух $\boldsymbol{\rho}(\tau)=(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3)^T$ системи (1) назвемо *дистальним*, якщо виконується нерівність

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)|\geq c_2\quad\forall\tau\in R,\quad\forall i<j,\quad 0<c_2=\text{const}.\tag{5}$$

2 Про інваріанти симетричних рухів

Покладемо у системі (1) $\mu_1=\mu_2=\mu$. Тоді бачимо, що друге рівняння системи переходить у третє, якщо

$$\rho_{13}=\rho_{23},\quad E_{13}=E_{23}.\tag{6}$$

Разом з тим рівність $E_{13}=E_{23}$ на підставі п'ятого і шостого рівнянь системы (1) обумовлює виконання співвідношення

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'-\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}'=0,\tag{7}$$

і таким чином останнє є інваріантом симетричних рухів. Використовуючи тотожність

$$\boldsymbol{\rho}_{12}+\boldsymbol{\rho}_{23}-\boldsymbol{\rho}_{13}=\mathbf{0},$$

поряд з (7) отримуємо ще два інваріанти симетричних рухів

$$\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{12}'-\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_{13}'=0,\quad\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{12}'-\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_{23}'=0.\tag{8}$$

Отже, характерною ознакою симетричних рухів у задачі трьох тіл є існування інваріантів (7) і (8).

Беручи до уваги, що

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13})' = \boldsymbol{\rho}'_{13}\boldsymbol{\rho}_{23} + \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = \frac{1}{2}\left(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2\right)', \tag{9}$$

згідно з рівностями (7) і (9) маємо

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = \frac{1}{4}\left(-\rho_{12}^2 + 2\rho_{13}^2\right)'. \tag{10}$$

Аналогічно, враховуючи, що

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{12})' &= \frac{1}{2}\left(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2\right)',\\ (\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{12})' &= \frac{1}{2}\left(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2\right)',\end{aligned} \tag{11}$$

відповідно до рівностей (8), (11) отримуємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_{13} &= \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{12} = \frac{1}{4}\left(\rho_{12}^2\right)',\\ \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_{23} &= \boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{12} = \frac{1}{4}\left(-\rho_{12}^2\right)'.\end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, на підставі (6), (7), (10) рівняння (1) набувають вигляду

$$\begin{aligned}{\rho_{12}^2}'' &= 2E_{12} + (1+\mu_3)\frac{2}{\rho_{12}} - 2\mu_3\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3},\\ {\rho_{13}^2}'' &= 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\left(-\frac{1}{\rho_{12}} + \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\right),\\ E'_{12} &= \mu_3{\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right),\\ E'_{13} &= -\frac{\mu}{2}{\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Інтеграл енергії згідно з цими рівняннями має форму

$$\mu^2 E_{12} + 2\mu\mu_3 E_{13} = 2h. \tag{14}$$

Враховуючи, що

$$E_{12} = \boldsymbol{\rho}'^2_{12} - \frac{2}{\rho_{12}} = \rho'^2_{12} + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12}\times\boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho_{12}^2} - \frac{2}{\rho_{12}}, \tag{15}$$

а

$$\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12} = \mathbf{C}_1, \tag{16}$$

де $\mathbf{C}_1$ — сталий вектор, якісне дослідження системи (13) можемо звести до дослідження системи з двома ступенями вільності:

$$\begin{aligned} {\rho_{12}^2}'' &= 2\left(\frac{({\rho_{12}^2}')^2}{4\rho_{12}^2} + \frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}, \\ {\rho_{13}^2}'' &= \frac{2h}{\mu\mu_3} - \frac{\mu}{\mu_3}\left(\frac{({\rho_{12}^2}')^2}{4\rho_{12}^2} + \frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2}\right) + \frac{\mu(2-\mu_3)}{\mu_3\rho_{12}} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}. \end{aligned} \tag{17}$$

Характерними ознаками многовиду симетричних рухів (17) є стійкість за Хіллом пари матеріальних точок (μ, μ) при умові, що $h < 0$, а також дистальність руху при $|\mathbf{C}_1| \neq 0$, як наслідок рівності $|\boldsymbol{\rho}_{13}| = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$. Крім того, якщо рух на многовиді (17) є обмеженим, то ця обмеженість стосується як координат ρ_{12}, ρ_{13}, так і швидкостей v_{12}, v_{13}, тобто має місце стійкість за Лагранжем.

3 Про геометричну інтерпретацію симетричних рухів

Застосуємо для аналізу симетричних рухів встановлені автором раніше співвідношення [5], які зв'язують нарізно квадрати взаємних відстаней між тілами (матеріальними точками) і квадрати відстаней тіл до барицентра системи:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \mu_2(\mu_2+\mu_3)\rho_{12}^2 + \mu_3(\mu_2+\mu_3)\rho_{13}^2 - \mu_2\mu_3\rho_{23}^2, \\ \rho_2^2 &= \mu_1(\mu_1+\mu_3)\rho_{12}^2 - \mu_1\mu_3\rho_{13}^2 + \mu_3(\mu_1+\mu_3)\rho_{23}^2, \\ \rho_3^2 &= -\mu_1\mu_2\rho_{12}^2 + \mu_1(\mu_1+\mu_2)\rho_{13}^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{23}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

На многовиді симетричних рухів ці співвідношення набувають вигляду

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \mu(\mu+\mu_3)\rho_{12}^2 + \mu_3^2\rho_{13}^2, \\ \rho_3^2 &= -\mu^2\rho_{12}^2 + 4\mu^2\rho_{13}^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Оскільки, як це вже зазначалося вище, на многовиді (17) рух системи є дистальним, причому пара матеріальнх точок (μ, μ) стійка за Хіллом, то надалі кожну з рівностей (19) зручно зобразити відповідно у формах

$$\frac{1}{\mu(\mu+\mu_3)}u^2 - \frac{\mu_3^2}{\mu(\mu+\mu_3)}v^2 = 1, \tag{20}$$

$$4v^2 - \frac{1}{\mu^2}w^2 = 1, \tag{21}$$

де

$$\frac{\rho_1^2}{\rho_{12}^2} = u^2, \quad \frac{\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} = v^2, \quad \frac{\rho_3^2}{\rho_{12}^2} = w^2. \tag{22}$$

На підставі (20), (21) також маємо рівність

$$4u^2 - \frac{\mu_3^2}{\mu^2}w^2 = 1, \tag{23}$$

у якій фігурують лише квадрати відстаней тіл до барицентра системи і квадрат відстаней між тілами, що утворюють пару.

Таким чином, руху розглядуваної системи трьох матеріальнх точок на многовиді (17) можна поставити у відповідність рух зображуючої точки вздовж однієї з гіпербол (20), (21) або (23). Причому, оскільки ми оперуємо додатними величинами ρ_1/ρ_{12}, ρ_{13}/ρ_{12} і ρ_3/ρ_{12}, то цей рух зображуючої точки достатньо розглядати лише на додатних напіввітках (де $u > 0, v > 0$ і $w > 0$) згаданих гіпербол. Виходячи з властивостей гіперболи, можемо стверджувати, що не всі рухи системи на многовиді (17) будуть обмеженими навіть при від'ємному значенні сталої h інтеграла енргії. Отже, щоб довести обмеженість руху, потрібно визначити умови, які виключають рух зображуючої точки на додатній напіввітці однієї з гіпербол вище деякої межі. Для визначення цієї межі спробуємо використати інтеграл енергії, який запишемо у вигляді

$$2T - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h, \tag{24}$$

де

$$2T = \frac{\mu_3}{2\mu}\boldsymbol{\rho}_3'^2 + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{\rho}_{12}'^2.$$

Помножимо обидві частини рівності (24) на ρ_{12}. В результаті отримаємо

$$2T\rho_{12} = 2\mu^2 + \frac{4\mu\mu_3}{v} + 2h\rho_{12}. \tag{25}$$

Таким чином, ми отримали рівність, що містить змінну v, яка входить у рівняння гіпербол (20), (21) і (23). Використаємо цю рівність для визначення граничної точки на даних гіперболах, вище якої рух зображуючої точки на додатних напіввітках згаданих гіпербол неможливий, і тим самим симетричні рухи на многовиді (17) є обмеженими.

Оскільки $T \geq 0$ за визначенням, то на підставі (25) маємо

$$2\mu^2 + 2h\rho_{12} + \frac{4\mu\mu_3}{v} \geq 0, \tag{26}$$

звідки

$$v \leq 2\mu_3 \left(\frac{|h|\rho_{12}}{\mu} - \mu \right)^{-1}. \tag{27}$$

Таким чином, виходячи з того, що симетричні рухи є дистальними, на підставі (27) можемо стверджувати, що при достатньо малому значенні μ на гіперболах (20), (21) і (23) завжди існує межа, яку зображуюча точка не може перетнути, і тим самим відповідний симетричний рух є обмеженим.

4 Про стаціонарні симетричні рухи

Виходячи із структури многовиду симетричних рухів (17), бачимо, що стаціонарним симетричним рухам у задачі трьох тіл відповідають положення рівноваги системи (17). Для їх визначення розглянемо рівняння:

$$\begin{gathered} 2\left(\frac{({\rho_{12}^2}')^2}{4\rho_{12}^2} + \frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2} \right) - \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3 \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3} = 0, \\ \frac{2h}{\mu\mu_3} - \frac{\mu}{\mu_3}\left(\frac{({\rho_{12}^2}')^2}{4\rho_{12}^2} + \frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2} \right) + \frac{\mu(2-\mu_3)}{\mu_3\rho_{12}} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3} = 0, \end{gathered} \tag{28}$$

які з врахуванням того, що в положенні рівноваги ${\rho_{12}^2}' = 0$, далі зручно переписати у вигляді

$$\begin{gathered} 2\left(\frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^4} \right) - \frac{4\mu}{\rho_{12}^3} - 2\mu_3 \frac{1}{\rho_{13}^3} = 0, \\ \frac{2h}{\mu\mu_3}\frac{1}{\rho_{12}^2} - \frac{\mu}{\mu_3}\left(\frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^4} \right) + \frac{\mu(2-\mu_3)}{\mu_3}\frac{1}{\rho_{12}^3} + \frac{1}{\rho_{12}^2}\frac{2}{\rho_{13}} + \mu\frac{1}{\rho_{13}^3} = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Таким чином, маємо систему двох нелінійних рівнянь відносно змінних $1/\rho_{12}$ і $1/\rho_{13}$. Нам потрібно показати, що ця система рівнянь має принаймні один додатний розв'язок, оскільки $1/\rho_{12}$ і $1/\rho_{13}$ є додатними величинами.

Розв'язавши перше рівняння системи (29) відносно $1/\rho_{13}^3$ і підставивши отриманий вираз у друге рівняння даної системи, одержуємо

$$\frac{1}{\rho_{12}^2}\left[2\frac{h}{\mu\mu_3}+\frac{\mu}{\mu_3}\frac{1}{\rho_{12}}+\frac{2}{\rho_{13}}\right]=0. \tag{30}$$

Оскільки розглядуваний рух дистальний, то на підставі (30) маємо

$$\frac{1}{\rho_{13}}=-\frac{1}{\mu_3}\left[\frac{h}{\mu}+\frac{\mu}{2}\frac{1}{\rho_{12}}\right]. \tag{31}$$

Ліва частина рівності (31) додатна, отже права також повинна бути додатною, звідки отримуємо

$$\frac{1}{\rho_{12}}<-\frac{2h}{\mu^2}. \tag{32}$$

Разом з тим на підставі першого рівняння системи (29) маємо

$$\frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2}-\frac{4\mu}{\rho_{12}}>0, \tag{33}$$

звідки

$$\frac{1}{\rho_{12}}>\frac{2\mu}{c^2},\quad |\mathbf{C}_1|^2=c^2. \tag{34}$$

З умови сумісності нерівностей (32) і (34) отримуємо

$$hc^2+\mu^3<0. \tag{35}$$

Підставимо тепер значення $1/\rho_{13}$, що виражається правою частиною рівності (31) у перше рівняння системи (29). В результаті прийдемо до рівняння

$$8c^2\mu^3\mu_3^2x^4+\mu^4(\mu^2-16\mu_3^2)x^3+6\mu^4hx^2+12\mu^2h^2x+8h^3=0, \tag{36}$$

де $x=1/\rho_{12}$. Таким чином, питання існування додатного розв'язку системи (29) ми звели до аналогічного питання, але вже стосовно одного рівняння четвертого порядку (36).

Щоб з'ясувати, чи існує додатний розв'язок рівняння (36), розглянемо поліном

$$P_4(x) = 8c^2\mu^3\mu_3^2x^4 + \mu^4(\mu^2 - 16\mu_3^2)x^3 + 6\mu^4hx^2 + 12\mu^2h^2x + 8h^3. \quad (37)$$

Виходячи з того, що з (32) і (34) випливає нерівність

$$\frac{2\mu}{c^2} < x < -\frac{2h}{\mu^2}, \quad (38)$$

розглянемо значення $P_4(x)$ відповідно при $x = 2\mu/c^2$ і $x = -2h/\mu^2$. В результаті отримаємо

$$P_4(\frac{2\mu}{c^2}) = \frac{8}{c^6}(hc^2 + \mu^3)^3, \quad (39)$$

$$P_4(-\frac{2h}{\mu^2}) = 128\frac{\mu_3^2h^3}{\mu^5}(hc^2 + \mu^3). \quad (40)$$

Отже, при переході від значення $x = 2\mu/c^2$ до значення $x = -2h/\mu^2$ поліном $P_4(x)$, враховуючи нерівність (35), змінює знак, що свідчить про наявність додатного кореня рівняння (36), а отже, і про наявність додатного розв'язку системи (29). Таким чином, ми прийшли до такого

Твердження. *Необхідною і достатньою умовою існування симетричних стаціонарних рухів на многовиді* (17) *є виконання нерівності*

$$hc^2 + \mu^3 < 0.$$

Необхідність твердження, як ми могли переконатися вище, випливає з нерівностей (32) і (34), а достатність — з рівностей (39) і (40).

5 Про стійкість за Лагранжем симетричних рухів

Як вже зазначалося вище, будь-який обмежений симетричний рух у задачі трьох тіл є стійким за Лагранжем, а тому є сенс говорити саме про стійкі за Лагранжем рухи. У третьому параграфі за допомогою інтеграла енергії ми показали, що при достатньо малих масах тіл, що утворюють стійку за Хіллом пару, симетричний рух є обмеженим, а отже, стійким за Лагранжем. Разом з тим ми не вказали, наскільки ці маси повинні бути малими, щоб забезпечити стійкість. Це пояснюється відсутністю у наших міркуваннях оцінки для відстані ρ_{12}. Нижче ми отримаємо цю оцінку і, використавши рівняння многовиду симетричних рухів (17), визначимо умови існування стійких за Лагранжем рухів.

Теорема. *Нехай* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *– симетричний рух задачі трьох тіл, який належить множині від'ємних значень інтеграла енергії:*

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\}.$$

Тоді, якщо

$$|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}| = c > 0 \tag{41}$$

і виконується умова

$$\frac{2}{\mu\mu_3 c^2}[hc^2 + 4(1-\mu)\mu^3] + \frac{h}{\mu + 4\mu_3} < 0, \tag{42}$$

то розглядуваний симетричний рух стійкий за Лагранжем.

Доведення. Припустимо, що при виконанні умов теореми досліджуваний симетричний рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ є нестійким за Лагранжем. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{13}(\tau_k) = \infty, \quad \rho_{13}(\tau_k) = |\boldsymbol{\rho}_{13}(\tau_k)|. \tag{43}$$

Скористаємось рівністю (24), переписавши її у вигляді

$$\mu^2 \left[\frac{1}{2\mu}\left(\rho'^2_{12} + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho^2_{12}}\right) - \frac{2}{\rho_{12}}\right] + \frac{\mu_3}{2\mu}\boldsymbol{\rho}'^2_3 - 4\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h. \tag{44}$$

Згідно з припущенням про нестійкість в послідовності $\{\tau_k\}$ існує такий достатньо великий номер r, що при $k \geq r$ справедлива нерівність

$$\frac{1}{2\mu}\left(\rho'^2_{12} + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho^2_{12}}\right)\Big|_{\tau\in\{\tau_k\}} - \frac{2}{\rho_{12}(\tau_k)} \leq 0, \quad \forall k \geq r \tag{45}$$

і тим більше

$$\frac{1}{2\mu}\frac{c^2}{\rho^2_{12}(\tau_k)} - \frac{2}{\rho_{12}(\tau_k)} \leq 0, \quad \forall k \geq r,$$

звідки

$$\rho_{12}(\tau_k) \geq \frac{c^2}{4\mu}, \ \forall k \geq r. \tag{46}$$

Згідно з рівністю (24), враховуючи умову (41) теореми, маємо

$$\frac{\mu^2}{\rho_{12}} + \frac{2\mu\mu_3}{\rho_{13}} > -h, \tag{47}$$

а оскільки

$$\rho_{13} \geq \frac{\rho_{12}}{2},$$

то тим більше

$$\frac{\mu^2}{\rho_{12}} + \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{12}} > -h,$$

звідки

$$\rho_{12} < \frac{\mu(\mu + 4\mu_3)}{|h|}. \tag{48}$$

Згідно з рівняннями (17) отримуємо рівність

$${\rho_{13}^2}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}{\rho_{12}^2}'' = \frac{2h}{\mu\mu_3} + \frac{2\mu(1-\mu)}{\mu_3\rho_{12}} - \frac{\mu}{\rho_{12}} + \frac{2}{\rho_{13}}. \tag{49}$$

Беручи до уваги нерівність (48), на підставі (49) маємо нерівність

$${\rho_{13}^2}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}{\rho_{12}^2}'' < \frac{2h}{\mu\mu_3} + \frac{2\mu(1-\mu)}{\mu_3\rho_{12}} + \frac{h}{\mu + 4\mu_3} + \frac{2}{\rho_{13}}, \tag{50}$$

яку з врахуванням оцінки (46) переписуємо у вигляді

$$\begin{aligned}[{\rho_{13}^2}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}{\rho_{12}^2}'']\Big|_{\tau\in\{\tau_k\}} &< \frac{2}{\mu\mu_3 c^2}[hc^2 + 4(1-\mu)\mu^3] + \\ &+ \frac{h}{\mu + 4\mu_3} + \frac{2}{\rho_{13}(\tau_k)}, \ \forall k \geq r. \end{aligned}\tag{51}$$

У відповідності з умовою (42) теореми, а також рівністю (43) можемо стверджувати, що існує такий достатньо великий номер $s \geq r$, що при $k \geq s$ має місце нерівність

$$[{\rho_{13}^2}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}{\rho_{12}^2}'']\Big|_{\tau\in\{\tau_k\}} < -\delta, \quad \forall k \geq s, \tag{52}$$

$$0 < \delta = \text{const}, \ \delta < \left|\frac{2}{\mu\mu_3 c^2}[hc^2 + 4(1-\mu)\mu^3] + \frac{h}{\mu + 4\mu_3}\right|.$$

Оскільки пара матеріальних точок (μ, μ) стійка за Хіллом, а розглядуваний симетричний рух дистальний, то швидкості матеріальних точок на многовиді (17) обмежені. Звідси, враховуючи (43), робимо висновок, що існує послідовність зростаючих проміжків часу

$$\{T_j\} = [\tau_{s+j} - \tau_{n_j}],\ \tau_{s+j} \in \{\tau_k\},\ j = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\tau_{n_j} < \tau_{s+j},\quad n_1 < n_2 < n_3 \ldots, \tag{53}$$

на яких виконується нерівність

$$[\rho_{13}^2{}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}''] < -\delta,\ \ \forall\tau \in \{T_j\}. \tag{54}$$

Інтегруючи (54), отримуємо нерівність

$$[\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|_{\tau_1}^{\tau} < -\delta(\tau - \tau_1),\quad \tau > \tau_1,\quad [\tau_1, \tau] \subseteq \{T_j\}, \tag{55}$$

яку можемо переписати у вигляді

$$[\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|^{\tau} < [\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|_{\tau_1} - \delta(\tau - \tau_1). \tag{56}$$

Інтегруючи нерівність (56), одержуємо

$$[\rho_{13}^2 + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2] \,|_{\tau_1}^{\tau} < [\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|_{\tau_1} (\tau - \tau_1) - \frac{\delta}{2}(\tau - \tau_1)^2. \tag{57}$$

Покладемо в нерівності (57) $\tau_1 = \tau_{n_j}$, $\tau = \tau_{s+j}$ і перепишемо її у вигляді

$$[\rho_{13}^2 + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2] \,|_{\tau=\tau_{s+j}} - [\rho_{13}^2 + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2] \,|_{\tau=\tau_{n_j}} <$$
$$< (\tau_{s+j} - \tau_{n_j}) \left\{ [\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|_{\tau=\tau_{n_j}} - \frac{\delta}{2}(\tau_{s+j} - \tau_{n_j}) \right\} \tag{58}$$

Доданки

$$[\rho_{13}^2 + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2] \,|_{\tau=\tau_{n_j}},\ [\rho_{13}^2{}' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}'] \,|_{\tau=\tau_{n_j}} \tag{59}$$

в нерівності (58) відповідають таким скінченим моментам часу $\tau = \tau_{n_j}$, що величина $[\rho_{13}^2 + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2]$ досягає у них критичного значення, при якому

$$[\rho_{13}^2{}'' + \frac{\mu}{2\mu_3}\rho_{12}^2{}''] \,|_{\tau=\tau_{n_j}} < -\delta.$$

Отже, вибір величин (59) у нерівності (58) завжди можна здійснити таким чином, щоб вони були обмеженими.

Довжина проміжка $[\tau_{s+j} - \tau_{n_j}]$ при $j \to \infty$ відповідно до (43) і визначенням моментів часу τ_{n_j} прямує до нескінченності. Таким чином, права частина нерівності (58) прямує до мінус нескінченності. Навпаки, згідно з рівністю (43) ліва частина нерівності (58) при $j \to \infty$ прямує до плюс нескінченності. Приходимо до суперечності, яка дозволяє зробити висновок про справедливість теореми. $\square$

На завершення зазначимо, що умовами теореми ми окреслили множину тих початкових умов і параметрів системи, які виключають реалізацію осцилюючих фінальних еволюцій на многовиді симетричних рухів у задачі трьох тіл, що може мати деякий теоретичний інтерес.

[1] *Ситников К.А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // ДАН СССР. — 1960. — **133**, № 2. — С. 303–306.

[2] *Алексеев В.М.* Лекции по небесной механике. — Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2001. — 156 с.

[3] *Sosnitskiĭ S.P.* On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — **136**, No. 6. — P. 2533–2540.

[4] *Голубев В.Г., Гребенников Е.А.* Проблема трех тел в небесной механике. — М.: Изд–во МГУ, 1985. — 240 с.

[5] *Сосницький С.П.* Про стійкість руху за Лагранжем у задачі трьох тіл // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1137–1143.