

О колебаниях стержня с подвесным резервуаром при гармоническом возбуждении основания стержня *

Ю.В. Троценко

Інститут математики НАН України, Київ; trots@imath.kiev.ua

Запропоновано варіаційний метод побудови наближеного розв'язку задачі про вимушені коливання пружного стержня з підвісним резервуаром, який частково заповнений ідеальною рідиною, при гармонічному збуренні основи стержня. Наведено порівняння отриманих теоретичних результатів з існуючими експериментальними даними.

A variational method for constructing an approximate solution of the problem on forced motions of a beam with a reservoir partly filled by an ideal liquid is proposed. The forced motions are due to harmonic excitation of the beam end. A comparison with experimental model test is given.

Рассматривается осесимметричная конструкция, состоящая из вертикально расположенного тонкостенного стержня, к одной из параллелей которого прикреплен осесимметричный резервуар, частично заполненный идеальной жидкостью (рис. 1).

Предполагается, что основание стержня жестко закреплено на некоторой подвижной опоре, которая совершает заданные гармонические колебания в плоскости $O_1y_1z_1$ по следующему закону:

$$w(0, t) = H \sin pt, \quad H \ll 1, \quad (1)$$

где $w(z_1, t)$ — перемещение стержня в плоскости $O_1y_1z_1$.

Требуется определить движение стержня и жидкости в резервуаре, вызванные горизонтальными перемещениями основания стержня с амплитудой H и частотой p . Целесообразность представления движения основания стержня в виде гармонических колебаний (1) следует из того, что всякое движение основания может быть представлено в виде суперпозиции гармонических колебаний, поскольку любая

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

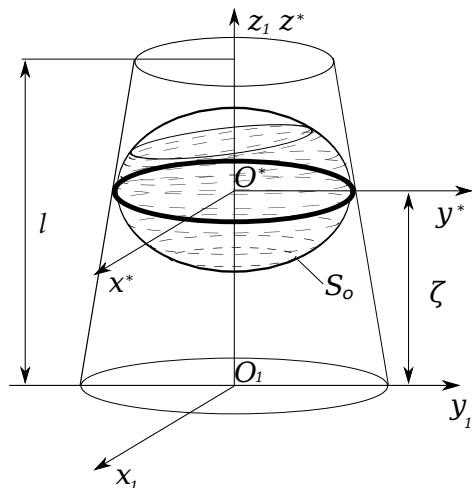


Рис. 1: Общий вид механической системы.

непрерывная функция $w(0, t)$ на конечном интервале времени может быть заменена соответствующим конечной суммой ряда Фурье.

В соответствии с работой [1] математическая постановка задачи, которая описывает взаимосвязанные колебания стержня и жидкости в резервуаре, прикрепленного в сечении $z_1 = \zeta$, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 L^{(i)}(w^{(i)}) &= 0 \quad \text{при} \quad z_1 \in G^{(i)}, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \\
 [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= - \left[m\ddot{w} + mz_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\
 [M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= - \left[I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + mz_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - gmz_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \\
 &\quad \left. - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \quad [w^{(1)} = w^{(2)} = w]_{z_1=\zeta}, \quad (2) \\
 \left[\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta}, \quad w^{(1)}|_{z_1=0} &= H \sin pt,
 \end{aligned}$$

где

$$L^{(i)}(w^{(i)}) = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \right) + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2},$$

$$Q^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right); \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2},$$

$$Q_*^{(i)} = Q^{(i)} + N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}, \quad (i = 1, 2).$$

Здесь рассматривается стержень с меняющейся площадью его поперечного сечения S , экваториальным моментом инерции J и модулем упругости при изгибе E . Плотность материала стержня ρ_1 также может быть переменной по его длине.

Область $G = [0, l]$ изменения координаты z_1 состоит из двух подобластей $G^{(1)} = [0, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, l]$. Прогибы стержня в этих подобластях обозначены соответственно через $w^{(1)}(z_1, t)$ и $w^{(2)}(z_1, t)$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать номер области, в которой эти функции определены. Кроме этого $I = I^{(0)} + I^{(w)}$ – момент инерции корпуса резервуара $I^{(0)}$ и подвижной жидкости $I^{(w)}$ относительно оси Ox ; $m = m^{(0)} + m^{(w)}$ – общая масса резервуара и жидкости; z_c – координата центра масс на оси Oz_1 системы "резервуар – жидкость"; g – ускорение сил тяжести; $N^{(i)}$ – сжимающие силы, действующие на стержень.

Система уравнений (2) не является замкнутой, поскольку она включает в себя заранее неизвестные обобщенные координаты $\beta_n(t)$, которые характеризуют волновые движения жидкости в резервуаре.

Система дифференциальных уравнений, связывающая обобщенные координаты $\beta_n(t)$ с прогибом стержня и его углом поворота в сечении $z_1 = \zeta$, имеет следующий вид [1]:

$$\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \left[\lambda_n \ddot{w} - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0, \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \dots, n_0,$$

Здесь μ_n , σ_n^2 , λ_n и λ_{0n} – гидродинамические коэффициенты, которые определяются по формулам, представленным в работе [2].

Далее будем рассматривать установившиеся вынужденные колебания механической системы под воздействием кинематического воз-

буждения (1) массовых и восстанавливающих сил. В этом случае перемещение стержня $w(z_1, t)$ в плоскости $O_1y_1z_1$ и обобщенные координаты $\beta_n(t)$, характеризующие волновые движения жидкости в подвижном резервуаре, можно представить в следующем виде:

$$w(z_1, t) = \eta(z_1) \sin pt, \quad \beta_n(t) = c_n \sin pt. \quad (4)$$

Математическую формулировку задачи для определения функции $\eta(z_1)$ и чисел c_n можно получить из уравнений (2) и (3). Будем иметь

$$\begin{aligned} L_1^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \frac{d^2}{dz_1^2} \left(E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \right) + \frac{d}{dz_1} \left(N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \right) - \\ &- p^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} = 0, \quad z_1 \in G^{(i)}, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \\ [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= p^2 D \left[m\eta + m z_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\ [M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= p^2 D \left[I \frac{d\eta}{dz_1} + m z_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right]_{z_1=\zeta} + \\ &+ D m z_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} + D \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n, \\ [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \quad &\left[\frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_n (\sigma_n^2 - p^2) c_n + \left[p^2 \left(\lambda_{0n} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n \eta \right) - \lambda_n \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} &= 0, \\ n = 1, 2, \dots, n_0. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом граничные условия жесткого крепления торца стержня к подвижной опоре примут вид

$$\eta(0) = H, \quad \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0. \quad (7)$$

Для построения приближенного аналитического решения сформулированной неоднородной краевой задачи используем ее вариационную формулировку и метод Ритца. В соответствии с работой [1] вари-

ационное уравнение для задачи (5)–(7) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - \right. \\ & \left. - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - p^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left[p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \frac{1}{2} \left[q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \left[\alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \alpha_2 \left(\frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p(\eta) = & -p^2 D \left[m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\ q(\eta) = & \left[-p^2 D \left(I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right) - \right. \\ & \left. - D \left(mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right) \right]_{z_1=\zeta}. \\ \alpha_1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{p(\eta^{(1)}) - p(\eta^{(2)})}{2} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\ \alpha_2 = & \frac{1}{2} \left[\frac{q(\eta^{(1)}) - q(\eta^{(2)})}{2} + M^{(2)}(\eta^{(2)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}. \end{aligned}$$

Вариационное уравнение (8) должно рассматриваться на классе функций, подчиненных граничным условиям (7). Остальные граничные условия для функций $\eta^{(i)}(z_1)$ являются естественными граничными условиями для функционала $F(\eta^{(i)})$.

В связи с этим представим искомые функции $\eta^{(1)}(z_1)$ и $\eta^{(2)}(z_1)$ в следующем виде:

$$\eta^{(1)}(z_1) = H + \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \quad \eta^{(2)}(z_1) = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1), \quad (9)$$

где a_j и b_j – подлежащие определению постоянные;

$$V_j^{(1)}(z_1) = z_1^2 P_j \left(\frac{2z_1}{\zeta} - 1 \right), \quad V_j^{(2)}(z_1) = P_j \left(\frac{2z_1}{l-\zeta} - \frac{l+\zeta}{l-\zeta} \right).$$

Здесь P_j – смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, преобразованными на интервалы $[0, \zeta]$ и $[\zeta, l]$ соответственно.

Первые $2m_0$ уравнений относительно постоянных $\{a_j\}_{j=1}^{m_0}$, $\{b_j\}_{j=1}^{m_0}$ и $\{c_j\}_{j=1}^{n_0}$ получим из вариационного уравнения (8) после подстановки в него выражений (9). Последние n_0 уравнений получим из уравнений (6) предварительно умножив их на D для симметрии общей системы уравнений и положив в них

$$\left[\eta = \frac{\eta^{(1)} + \eta^{(2)}}{2} \right]_{z_1=\zeta} \quad (10)$$

с учетом выражений (9) при $z_1 = \zeta$.

Тогда получим следующую неоднородную систему алгебраических уравнений

$$(A - p^2 B) \vec{X} = \vec{\Gamma}, \quad (11)$$

где вектор столбец \vec{X} имеет компоненты $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$.

Элементы матриц A и B определяются по формулам, аналогичным приведенным в работе [1]. Коэффициенты γ_i вектора-столбца $\vec{\Gamma}$ правой части уравнений (11) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= p^2 H D \int_{G^{(1)}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} dz_1 - \frac{H}{2} Q_i^{(1)} \Big|_{z_1=\zeta}, \\ \gamma_{i+m_0} &= \left\{ \frac{p^2 H D m}{2} \left(V_i^{(2)} + z_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right) - \frac{H}{2} Q_i^{(2)} \right\} \Big|_{z_1=\zeta}, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, m_0; \\ \gamma_{i+2m_0} &= p^2 H D \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_0, \end{aligned}$$

где

$$Q_i^{(k)} = Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, задача об определении вынужденных колебаний рассматриваемой механической системы при заданном горизонтальном гармоническом возбуждении основания стержня свелась к решению неоднородной алгебраической системы (11). Симметрия матриц A и B является математическим выражением консервативности механической системы.

Аналогичным образом может быть решена задача для случая, когда установившиеся вынужденные колебания системы вызываются заданным гармоническим вращением определенных поперечных сечений стержня.

Отметим также, что без существенных изменений предложенного алгоритма можно также рассчитывать вынужденные колебания конструкции для случая, когда резервуар с жидкостью прикреплен к верхнему торцу стержня.

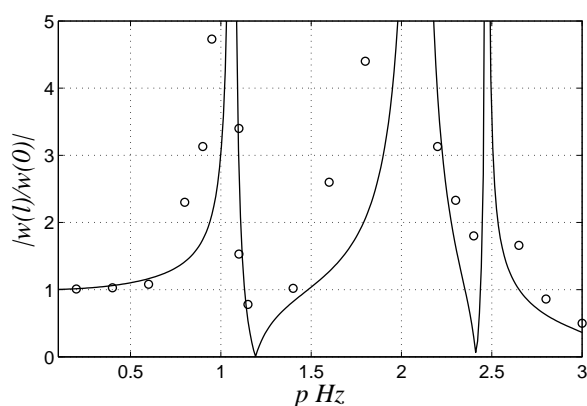


Рис. 2: Зависимость относительной амплитуды колебаний стержня от частоты возбуждения его основания (о — эксперимент, — — теория).

В работе [3] приведены экспериментальные данные исследования вынужденных колебаний стержня, к верхнему торцу которого прикреплен резервуар с жидкостью, при гармоническом возбуждении основания стержня. В качестве резервуара был выбран круговой цилиндр с соосной центральной вставкой малого радиуса r_0 . Заметим, что гидродинамические коэффициенты λ_i , λ_{0i} , μ_i , σ_i и $I^{(w)}$ для такого сосуда при $r_0/R_0 \leq 0.1$ (R_0 — радиус цилиндра) отличаются от гидродинамических коэффициентов для первой формы свободных ко-

лебаний жидкости в круговом цилиндре на 1 – 4 процента. Поэтому в расчетах по предложенному алгоритму будем пользоваться значениями λ_i , λ_{0i} , μ_i , σ_i и $I^{(w)}$ для сосуда в форме кругового цилиндра без центральной вставки.

Геометрические и физические параметры механической системы для которой проведен эксперимент имеют следующие значения: радиус бака $R_0 = 0.225$ м; расстояние до центра масс бака $z_{c_0} = 0.19$ м; масса бака $m_0 = 19$ кг; момент инерции бака $I^{(0)} = 0.5$ кгм²; площадь поперечного сечения балки $F = 3.14 \cdot 10^{-4}$ м²; длина балки $L = 1.2$ м; коэффициент жесткости балки $C_1 = 1/E_0 I_0 = 3.3 \cdot 10^{-4}$ 1/Нм²; глубина заполнения жидкостью бака $\frac{h}{R_0} = 0.5$ плотность материала бака (оргстекло) $\rho_0 = 1190$ кг/м³; плотность материала балки (сталь) $\rho_1 = 7800$ кг/м³; плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м³.

На рис. 2 приведена зависимость относительной амплитуды $|w(l)/w(0)|$ колебаний стержня от частоты возбуждения p его основания в области первых трех резонансных частот рассматриваемой механической системы. Кружочками обозначены экспериментальные данные работы [3].

Приведенный рисунок свидетельствует об удовлетворительном совпадении экспериментальных и теоретических данных в области небольших амплитуд связанных колебаний стержня и жидкости в резервуаре.

- [1] Троценко Ю.В. Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью // Проблеми динаміки та стійкості багатомірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — 8, № 2. — С. 258–275.
- [2] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью // Акустичний вісник. — 2010. — 13, № 3. — С. 51–67.
- [3] H.A. Dieterman An analytically derived lumped-impedance model for the dynamic behaviour of a watertower // Ingenieur-Archiv. — 1986. — 56. — P. 265–280.