Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 209–221

УДК 539.3

К вариационному методу решения задачи сопряжения о свободных колебаниях цилиндрической оболочки *

Ю.В. Троценко

Институт математики НАН Украины, Киев; trots@imath.kiev.ua

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі про вільні коливання кругової циліндричної оболонки, поставленої з позицій задач спряження. Побудовано узагальнений функціонал, для якого до числа природних граничних умов входять умови спряження розв'язків в підобластях. Для знаходження стаціонарних значень функціоналу використовується метод Рітца.

A domain decomposition variational method for getting anapproxsmate solution of a spectral problem on free oscillations of a circular cylindrical shell is developed. The method constructs and employs a new generalized functional for which the transmission conditions become natural ones. The Ritz method is used to compute the extrema points of the functional.

Рассмотрим тонкостенную круговую цилиндрическую оболочку радиуса R, длиной l и толщиной h. Введем цилиндрическую систему координат $Ozr\varphi$, ось Oz которой совпадает с осью симметрии оболочки, а начало координат расположено в плоскости ее торцевого сечения. Для определенности будем считать, что при $z = 0$ торец оболочки жестко закреплен, а при $z = l$ — свободен. В дальнейшем будем пользоваться основными положениями технической теории тонких упругих оболочек [1], которая является простой и позволяет проводить расчеты с удовлетворительной точностью. Тангенциальные перемещения точки срединной поверхности оболочки обозначим через

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

$u(z,\varphi,t)$ и $v(z,\varphi,t)$, а ее перемещения в направлении внешней нормали к оболочке — через $w(z,\varphi,t)$.

При установившихся гармонических колебаниях оболочки с частотой ω в случае неосесимметричной формы деформации ее срединной поверхности перемещения u, v и w можно искать в форме

$$
\begin{aligned}
&u(z,\varphi,t) = u(z)\cos n\,\varphi\, e^{i\omega t}, \;\; v(z,\varphi,t) = v(z)\sin n\,\varphi\, e^{i\omega t},\\
&w(z,\varphi,t) = w(z)\cos n\,\varphi\, e^{i\omega t}, \;\; n = 1,2,\ldots .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Введем безразмерные величины (обозначенные черточкой сверху), которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$
\{u,v,w\} = R\,\{\bar u,\bar v,\bar w\}\,; \;\; \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho R^2\omega^2}{E};
$$

$$
\{T_1,Q_1,S\} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\,\{\bar T_1,\bar Q_1,\bar S\}\,; \;\; M_1 = \frac{EhR}{(1-\nu^2)}\bar M_1; \;\; c^2 = \frac{h^2}{12R^2},
$$

где T_1 и S — меридиональная и сдвигающая силы, отнесенные к единице длины нормального сечения срединной поверхности оболочки; M_1 — погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости; Q_1 — погонная поперечная сила; E, ν и ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки. В дальнейшем для упрощения письма черточку над безразмерными величинами будем опускать.

Для определения частот и форм собственных колебаний оболочки имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
F_1(\vec u) &= L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) - \lambda^2 u = 0,\\
F_2(\vec u) &= L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) - \lambda^2 v = 0,\\
F_3(\vec u) &= L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) - \lambda^2 w = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где операторы $L_{ij}\;\;(i,j=1,2,3)$ имеют вид

$$
L_{11} = -\frac{d^2}{dz^2} + \nu_1 n^2; \;\; L_{12} = -n\nu_2\frac{d}{dz} = -L_{21}; \;\; L_{13} = -\nu\frac{d}{dz} = -L_{31};
$$

$$
L_{22} = n^2 - \nu_1\frac{d^2}{dz^2}; \;\; L_{23} = n = L_{32}; \;\; L_{33} = c^2\nabla^2\nabla^2 + 1.
$$

Здесь

$$\nu_1 = \frac{1-\nu}{2};\ \ \nu_2 = \frac{1+\nu}{2};\ \ \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - n^2;\ \ \vec{u} = \{u, v, w\}.$$

Решения системы уравнений (2) должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Для абсолютно жесткого закрепления края оболочки эти условия имеют вид

$$u = v = w = \frac{dw}{dz} = 0. \tag{3}$$

При свободном перемещении края оболочки имеют место следующие силовые граничные условия:

$$T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0, \tag{4}$$

где

$$T_1 = \frac{du}{dz} + \nu(nv + w);\ \ S = \nu_1\left(\frac{dv}{dz} - nu\right);$$

$$\tilde{Q}_1 = -c^2\left[\frac{d^3w}{dz^3} - n^2(2-\nu)\frac{dw}{dz}\right];\ \ M_1 = -c^2\left[\frac{d^2w}{dz^2} - \nu n^2 w\right].$$

В других случаях крепления края оболочки используются комбинации условий (3) и (4).

Точные решения системы уравнений (2) при различных граничных условиях получены в работах [2] и [3]. Результаты этих работ могут служить эталоном для оценки точности различных приближенных методов, которые позволяют получать необходимые результаты более простым способом, чем при непосредственном интегрировании исходных уравнений. Эффективный алгоритм расчета динамических характеристик оболочек вращения можно получить на основе эквивалентной вариационной формулировки исходной спектральной задачи [4] и [5]. Соответствующий функционал можно вывести из вариационного принципа возможных перемещений в сочетании с принципом Даламбера. При этом будем иметь [4]

$$I(\vec{u}) = \int_0^l \Phi(\vec{u})dz,$$

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + (w+nv)^2 + 2\nu\frac{du}{dz}(w+nv) + \nu_1\left(\frac{dv}{dz} - nu\right)^2\right] + \right.$$

$$+ c^2 \left[\left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 + n^4 w^2 - 2\nu n^2 \frac{d^2 w}{dz} w + 2n^2 (1-\nu) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right] - \qquad (5)$$
$$- \lambda^2 (u^2 + v^2 + w^2) \Big\} \, .$$

Стационарные значения функционала (5) следует находить на классе допустимых функций, которые подчинены граничным условиям (3) при $z = 0$. Силовые граничные условия (4) при $z = l$ являются естественными граничными условиями для этого функционала. Последнее обстоятельство существенно упрощает построение базисных функций в методе Ритца.

Во многих задачах для механических систем, в состав которых входят тонкостенные оболочки, возникает необходимость разбиения области интегрирования исходных уравнений на отдельные подобласти. В частности, такие задачи возникают при расчете динамических характеристик оболочек, находящихся под воздействием сосредоточенной или разрывной распределенной нагрузки. В связи с этим необходимо развивать методы решения граничных задач с позиций метода сопряжения решений.

Рассмотрим этот подход при вариационной формулировке исходной задачи. Разобъем область $G = [0, l]$ точкой $z = \zeta$ на две подобласти $G^{(1)} = [0, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, l]$. Обозначим решения исходной задачи в подобластях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ соответственно через $\vec{u}^{(1)}$ и $\vec{u}^{(2)}$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены. В соответствии с принятым закреплением торцов оболочки для функций $\vec{u}^{(1)}$ при $z = 0$ должны выполняться граничные условия (3), тогда как для функций $\vec{u}^{(2)}$ при $z = l$ — условия (4). Кроме того, в сечении $z = \zeta$ должны выполняться кинематические условия сопряжения

$$u^{(1)} = u^{(2)}; \;\; v^{(1)} = v^{(2)}; \;\; w^{(1)} = w^{(2)}; \;\; \frac{dw^{(1)}}{dz} = \frac{dw^{(2)}}{dz} \qquad (6)$$

и силовые условия сопряжения

$$T_1^{(1)} = T_2^{(2)}; \;\; S^{(1)} = S^{(2)}; \;\; M_1^{(1)} = M_1^{(2)}; \;\; \tilde{Q_1}^{(1)} = \tilde{Q_1}^{(2)}. \qquad (7)$$

Формулировка условий сопряжения (6) и (7) связана с методом решения исходной задачи. В результате условия сопряжения решений для подобластей фигурируют далее наравне с уравнениями и граничными условиями рассматриваемой задачи. Выполнение условий (6) и

(7) при построении решений в подобластях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ является основной проблемой для решения задачи методом разбиения области интегрирования уравнений на подобласти.

Для построения приближенного решения сформулированной задачи сопряжения будем использовать вариационный метод, который для одномерных задач применялся в работах [6] и [7]. Представим функционал (5) в следующем виде:

$$I = \int\limits_{G^{(1)}} \Phi(\vec{u}^{(1)})dz + \int\limits_{G^{(2)}} \Phi(\vec{u}^{(2)})dz. \tag{8}$$

Вычислим первую вариацию функционала (8), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции кроме условия (3) при $z = 0$. С учетом интегрирования по частям и принятых обозначений вариацию от функционала (8) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\delta I = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} [F_1(\vec{u}^{(k)})\delta u^{(k)} + F_2(\vec{u}^{(k)})\delta v^{(k)} + F_3(\vec{u}^{(k)})\delta w^{(k)}]dz + \\
+ \left(T_1^{(1)}\delta u^{(1)} + S^{(1)}\delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)}\delta w^{(1)} - M_1^{(1)}\frac{d\delta w^{(1)}}{dz}\right)_{z=\zeta} - \\
- \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{dz}\right)_{z=\zeta} + \\
+ \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{dz}\right)_{z=l}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Приравнивая выражение (9) к нулю, получим вариационное уравнение для определения функций $\vec{u}^{(k)}(z)$ и параметра λ^2. Из этого уравнения в силу произвольности варьирования функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $G^{(k)}$ и на границе при $z = l$ следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и граничные условия свободного опирания края оболочки при $z = l$.

Далее, если предположить, что класс допустимых функций при $z = \zeta$ подчинен условиям

$$u^{(1)} = u^{(2)};\;\; v^{(1)} = v^{(2)};\;\; w^{(1)} = w^{(2)};\;\; \frac{dw^{(1)}}{dz} = \frac{dw^{(2)}}{dz}, \tag{10}$$

то силовые условия сопряжения (7) будут естественными граничными условиями для функционала (8).

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $\vec{u}^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (10). В этом случае остальные граничные условия, кроме условий (3) при $z = 0$, будут естественными граничными условиями для функционала (8). Построение решений заведомо удовлетворяющих условиям (10) представляет собой достаточно трудную самостоятельную задачу. Обойти ее удается, если построить такой функционал Π_1, для которого все условия сопряжения (6) и (7) были бы естественными граничными условиями.

Граничные условия (10) при $z = \zeta$ можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу нахождения стационарного значения функционала $I(\vec{u})$. Исключить их из рассмотрения можно с помощью множителей Лагранжа. В соответствии с этим введем в рассмотрение новый функционал $\Pi_1(\vec{u}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, который имеет вид

$$\Pi_1(\vec{u}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{u}) + \Big[\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) +$$

$$+ \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{dz} - \frac{dw^{(2)}}{dz}\right)\Big]_{z=\zeta}, \quad (11)$$

где α_i — множители Лагранжа, подлежащие определению.

Следовательно, для нахождения решения рассматриваемой вариационной задачи нужно найти стационарное значение функционала (11) относительно вариаций по $\vec{u}$ и α_i на классе функций, удовлетворяющих лишь главным граничным условиям (3) при $z = 0$. Эту задачу можно существенно упростить, если найти явные выражения для множителей Лагранжа через сами решения $\vec{u}$. Для этого вычислим первую вариацию функционала (11) при свободном варьировании функций $\vec{u}$ и постоянных α_i. Из этой вариации выпишем только внеинтегральные члены при $z = \zeta$. При этом будем иметь

$$\Big[\delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) +$$

$$+\delta\alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{dz} - \frac{dw^{(2)}}{dz}\right) + (T_1^{(1)} + \alpha_1)\delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1)\delta u^{(2)} +$$

$$+(S^{(1)} + \alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2)\delta v^{(2)} + (\tilde{Q}_1^{(1)} + \alpha_3)\delta w^{(1)} -$$

$$- (\tilde{Q}_1^{(2)} + \alpha_3)\delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{dz} + (M_1^{(2)} - \alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{dz}\Bigg]_{z=\zeta}.$$

Если функционал (11) принимает стационарное значение для произвольных вариаций $\delta\vec{u}^{(i)}$, $\dfrac{d\delta w^{(i)}}{dz}$ и $\delta\alpha_i$, то из этого выражения следует, что в точке $z = \zeta$ будут выполняться кинематические условия сопряжения (6), а также соотношения

$$\alpha_1 = -T_1^{(1)};\ \ \alpha_1 = -T_1^{(2)};\ \ \alpha_2 = -S^{(1)};\ \ \alpha_2 = -S^{(2)};$$

$$\alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(1)};\ \ \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(2)};\ \ \alpha_4 = M_1^{(1)};\ \ \alpha_4 = M_1^{(2)}.$$

Отсюда следуют равенства правых частей в приведенных формулах, что свидетельствует о выполнении силовых условий сопряжения (7). Кроме этого, из этих формул можно найти явные выражения для множителей Лагранжа α_i $(i = 1, \ldots, 4)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}(T_1^{(1)} + T_1^{(2)})|_{z=\zeta};\ \ \alpha_2 = -\frac{1}{2}(S^{(1)} + S^{(2)})|_{z=\zeta};\\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2}(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)})|_{z=\zeta};\ \ \alpha_4 = \frac{1}{2}(M_1^{(1)} + M_2^{(2)})|_{z=\zeta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Полученные соотношения (12) позволяют теперь сформулировать обобщенный функционал $\Pi(\vec{u})$, заменив в функционале (11) значения множителей Лагранжа α_i $(i = 1, \ldots, 4)$ тождественно равными им величинами (12). Краевые условия (4), (6) и (7) теперь являются естественными краевыми условиями для него, так как они автоматически выполняются для функций, доставляющих функционалу $\Pi(\vec{u})$ стационарное значение. Это весьма важный момент в применении вариационного метода к решению рассматриваемой задачи, который фактически позволяет исключить из рассмотрения достаточно сложные условия сопряжения (6), (7) и граничные условия на свободном краю оболочки (4).

Полученные результаты позволяют перейти теперь к построению приближенного решения рассматриваемой спектральной задачи на основе метода Ритца.

В связи с этим представим функции $u^{(k)}(z)$, $v^{(k)}(z)$ и $w^{(k)}(z)$ $(k = 1, 2)$ в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$u^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} U_j^{(k)}(z);\ \ v^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{N} b_j^{(k)} V_j^{(k)}(z);$$

$$w^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(k)} W_j^{(k)}(z). \tag{13}$$

Здесь $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$, $c_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $\{U_j^{(k)}\}$, $\{V_j^{(k)}\}$, $\{W_j^{(k)}\}$ — системы координатных функций, которые определены соответственно в подобластях $G^{(k)}$.

Координатные функции выберем в виде:

$$\begin{aligned} &U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = zP_j(x);\;\; W_j^{(1)} = z^2 P_j(x);\;\; x = \frac{2z}{\zeta} - 1; \\ &U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y);\;\; y = \frac{2z}{l-\zeta} - \frac{l+\zeta}{l-\zeta}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, которые преобразуют интервалы $[0, \zeta]$ и $[\zeta, l]$ на интервал [-1, 1].

Вычисления многочленов Лежандра и их производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений [4]. Введенные базисные функции являются линейно независимыми и образуют полные системы в соответствующих подобластях. Такие координатные функции обеспечивают высокую устойчивость вычислительного процесса при большом числе членов N в разложениях (13). Системы координатных функций с верхним индексом, равным единице, подчинены граничным условиям (3) при $z = 0$.

Подставим разложения (13) в функционал $\Pi(\vec{u})$. Тогда этот функционал будет зависеть от $6N$ переменных. Из необходимых условий стационарности обобщенного функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0, \tag{15}$$

где вектор-столбец $\vec{X}$ имеет координаты $\vec{X} = \{a_1^{(1)} \dots a_N^{(1)}, b_1^{(1)} \dots b_N^{(1)}, c_1^{(1)} \dots c_N^{(1)}, a_1^{(2)} \dots a_N^{(2)}, b_1^{(2)} \dots b_N^{(2)}, c_1^{(2)} \dots c_N^{(2)}\}$.

Представим матрицу A в виде суммы двух матриц

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \tag{16}$$

где элементы матрицы $A^{(1)}$ образованы из необходимых условий экстремума функционала $I(\vec{u})$ (8), а элементы матрицы $A^{(2)}$ обусловлены наличием в обобщенном функционале добавки с установленными множителями Лагранжа.

Построение однородной линейной алгебраической системы (15) относительно вектора $\vec{X}$ требует проведения достаточно громоздких выкладок. Формирование алгебраических уравнений и их последующее программирование можно существенно упростить, если предварительно ввести к рассмотрению следующие дифференциальные выражения:

$$\Psi_{11}(p,q) = \frac{dp}{dz}\frac{dq}{dz} + \nu_1 n^2 pq; \;\; \Psi_{12}(p,q) = \nu np\frac{dq}{dz} - \nu_1 nq\frac{dp}{dz};$$

$$\Psi_{13}(p,q) = \nu p\frac{dq}{dz}; \;\; \Psi_{23}(p,q) = npq; \;\; \Psi_{22}(p,q) = n^2 pq + \nu_1\frac{dp}{dz}\frac{dq}{dz}; \quad (17)$$

$$\Psi_{33}(p,q) = pq + c^2\left[\left(\frac{d^2p}{dz^2} - \nu n^2 p\right)\frac{d^2q}{dz^2} + \left(n^4 p - \nu n^2\frac{d^2p}{dz^2}\right)q + \right.$$
$$\left. + 2(1-\nu)n^2\frac{dp}{dz}\frac{dq}{dz}\right].$$

Здесь $p(z)$ и $q(z)$ произвольные функции.

Тогда, используя эти операторы, вариацию функционала (5) можно представить в следующей форме:

$$\delta I = \int\limits_0^l \left[\Psi_{11}(u,\delta u) + \Psi_{12}(v,\delta u) + \Psi_{13}(w,\delta u) + \Psi_{12}(\delta v,u) + \right.$$
$$+\Psi_{22}(v,\delta v) + \Psi_{23}(w,\delta v) + \Psi_{13}(\delta w,u) + \Psi_{23}(\delta w,v) + \quad (18)$$
$$\left. + \Psi_{33}(w,\delta w)\right] dz - \lambda^2\int\limits_0^l (u\delta u + v\delta v + w\delta w)dz.$$

Вычисляя, например, частную производную $\dfrac{\partial I}{\partial a_i^{(1)}}$, положим в (18) $\delta u = U_i^{(1)}$, $\delta v = 0$, $\delta w = 0$. При этом получим первые N уравнений относительно вектора $\vec{X}$. Аналогично действуем и при вычислении частных производных от функционала I по другим переменным. При этом ненулевые элементы $\alpha_{ij}^{(1)}$ верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(1)}$ можно представить в виде:

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{11}(U_j^{(1)}, U_i^{(1)})dz; \;\; \alpha_{i,j+N}^{(1)} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)})dz;$$

$$\alpha^{(1)}_{i,j+2N} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{13}(W^{(1)}_j, U^{(1)}_i)dz,$$

$$\alpha^{(1)}_{i+N,j+N} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{22}(V^{(1)}_j, V^{(1)}_i)dz; \ \ \alpha_{i+N,j+2N} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{23}(W^{(1)}_j, V^{(1)}_i)dz;$$

$$\alpha_{i+2N,j+2N} = \int\limits_0^\zeta \Psi_{33}(W^{(1)}_j, W^{(1)}_i)dz. \tag{19}$$

Элементы $\alpha^{(1)}_{i+3N,j+3N}$, $\alpha^{(1)}_{i+3N,j+4N}$, $\alpha^{(1)}_{i+3N,j+5N}$, $\alpha^{(1)}_{i+4N,j+4N}$, $\alpha^{(1)}_{i+4N,j+5N}$, $\alpha^{(1)}_{i+5N,j+5N}$ матрицы $A^{(1)}$ можно получить из формул (19) после соответствующей замены в них нижних индексов, пределов интегрирования от ζ до l и верхних индексов при функциях на 2.

Коэффициенты $\alpha^{(2)}_{ij}$ верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде:

$$\alpha^{(2)}_{ij} = -\frac{1}{2}\left[T(U^{(1)}_i, 0, 0)U^{(1)}_j + T(U^{(1)}_j, 0, 0)U^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i,j+N} = -\frac{1}{2}\left[T(0, V^{(1)}_j, 0)U^{(1)}_i + S(U^{(1)}_i, 0)V^{(1)}_j\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i,j+2N} = -\frac{1}{2}\left[T(0, 0, W^{(1)}_j)U^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i,j+3N} = \frac{1}{2}\left[T(U^{(1)}_i, 0, 0)U^{(2)}_j - T(U^{(2)}_j, 0, 0)U^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i,j+4N} = \frac{1}{2}\left[S(U^{(1)}_i, 0), V^{(2)}_j - T(0, V^{(2)}_j, 0)U^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i,j+5N} = -\frac{1}{2}\left[T(0, 0, W^{(2)}_j)U^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+N,j+N} = -\frac{1}{2}\left[S(0, V^{(1)}_i)V^{(1)}_j + S(0, V^{(1)}_j)V^{(1)}_i\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+N,j+2N} = 0; \alpha^{(2)}_{i+N,j+3N} = -\frac{1}{2}\left[S(U^{(2)}_j, 0)V^{(1)}_i - T(0, V^{(1)}_i, 0)U^{(2)}_j\right]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+N,j+4N} = -\frac{1}{2}\left[S(0, V^{(2)}_j)V^{(1)}_i - S(0, V^{(1)}_i)V^{(2)}_j\right]_{z=\zeta}; \ \ \alpha_{i+N,j+5N} = 0;$$

$$\alpha^{(2)}_{i+2N,j+2N} = -\frac{1}{2}\Big[Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} + Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)} -$$

$$- M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{dz} - M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{dz}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+2N,j+3N} = \frac{1}{2}\Big[T(0,0,W_i^{(1)})U_j^{(2)}\Big]_{z=\zeta}; \;\; \alpha_{i+2N,j+4N} = 0; \tag{20}$$

$$\alpha^{(2)}_{i+2N,j+5N} = -\frac{1}{2}\Big[Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} +$$

$$+ M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{dz} - M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{dz}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+3N,j+3N} = \frac{1}{2}\Big[T(U_i^{(2)},0,0)U_j^{(2)} + T(U_j^{(2)},0,0)U_i^{(2)}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha^{(2)}_{i+3N,j+4N} = \frac{1}{2}\Big[T(0,V_j^{(2)},0)U_i^{(2)} + S(U_i^{(2)},0)V_j^{(2)}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha_{i+3N,j+5N} = \frac{1}{2}\Big[T(0,0,W_j^{(2)})U_i^{(2)}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha_{i+4N,j+4N} = \frac{1}{2}\Big[S(0,V_i^{(2)})V_j^{(2)} + S(0,V_j^{(2)})V_i^{(2)}\Big]_{z=\zeta};$$

$$\alpha_{i+4N,j+5N} = 0;$$

$$\alpha^{(2)}_{i+5N,j+5N} = -\frac{1}{2}\Big[M(W_i^{(2)})\frac{dW_j^{(2)}}{dz} + M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(2)}}{dz} -$$

$$- Q(W_i^{(2)})W_j^{(2)} - Q(W_j^{(2)})W_i^{(2)}\Big]_{z=\zeta},$$

где

$$T(p,q,r) = \frac{dp}{dz} + \nu nq + \nu r; \;\; S(p,q) = \nu_1\frac{dq}{dz} - n\nu_1 p;$$

$$M(r) = -c^2\left(\frac{d^2r}{dz^2} - \nu n^2 r\right); \;\; Q(r) = -c^2\left[\frac{d^3r}{dz^3} - n^2(2-\nu)\frac{dr}{dz}\right].$$

Если в функциях T и S один из аргументов полагается равным нулю, то подразумевается, что и соответствующие производные тождественно равны нулю.

Элементы b_{ij} симметричной матрицы B вычисляются по следующим формулам:

$$b_{ij} = \int_0^\zeta U_j^{(1)} U_i^{(1)} dz; \;\; b_{i+N,j+N} = \int_0^\zeta V_j^{(1)} V_i^{(1)} dz;$$

$$b_{i+2N,j+2N} = \int_0^\zeta W_i^{(1)} W_j^{(1)} dz; \;\; b_{i+3N,j+3N} = \int_\zeta^l U_j^{(2)} U_i^{(2)} dz;$$

$$b_{i+4N,j+4N} = \int_\zeta^l V_j^{(2)} V_i^{(2)} dz; \;\; b_{i+5N,j+5N} = \int_\zeta^l W_j^{(2)} W_i^{(2)} dz,$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Остальные элементы матрицы B равны нулю.

Таким образом, задача о нахождении частот и форм собственных колебаний рассматриваемой оболочки с использованием метода сопряжения решений сведена к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения (15). Подинтегральные функции в формулах (19) представляют собой многочлены определенного порядка. Поэтому для вычисления элементов $\alpha_{i,j}^{(1)}$ матрицы $A^{(1)}$ целесообразно использовать метод численного интегрирования Гаусса.

Знание частот и форм собственных колебаний необходимо для решения других задач динамики оболочек. Полученные динамические характеристики могут быть приняты в качестве парциальных при составлении динамической схемы упругой конструкции в целом. Кроме того, если алгоритм позволяет находить моменты и перерезывающие силы в оболочке (т.е. позволяет вычислять в точках срединной поверхности производные от решений вплоть до третьего порядка), то эти результаты могут быть использованы при расчете динамической прочности элементов конструкции.

[1] *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.–Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.

[2] *Швейко Ю.Ю., Гаврилов Ю.В., Брусиловский А.Д.* О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек // Докл. науч.-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1964–1965 гг. Секция энергомашиностроение. — М.: МЭИ, 1965. — С. 131–148.

[3] *Forsberg K.* Influence of boundary conditions of the modal characteristics on thin cylindrical shells // AIAA J. — 1964. — **2**, No. 12. — P. 55–76.

[4] *Троценко В.А., Троценко Ю.В.* Методы расчета собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 2. — С. 263–285.

[5] *Троценко В.А., Троценко Ю.В.* Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 415–432.

[6] *Троценко В.А., Троценко Ю.В.* Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 2. — С. 244–257.

[7] *Троценко Ю.В.* Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 2. — С. 258–277.