Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 235–241

УДК 519.2:518.5:518.61

# Селективне перехоплення динамічних інформативних повідомлень у багатоканальній системі зв'язку

***Л.М. Шлепаков***

*Інститут математики НАН України, Київ*

Для ряда марковских моделей движения информативных сообщений в многоканальной системе связи и одного поискового устройства, нацеленного на перехват сообщений определенного типа, введены коэффициенты эффективности функционирования системы поиска и обнаружения.

For a set of the Markov models of content-carrying messages in a multichannel communications system and a single search device aimed at intercepting certain type messages, the effectiveness coefficients of the system for the search and detection system are introduced.

У багатоканальній системі зв'язку по $N$ каналах передаються різного типу повідомлення. Є один пошуковий пристрій, налаштований на виявлення і перехоплення інформативних повідомлень певного обраного виду і змісту (типу).

Нехай по кожному $i$-му каналу ($i = \overline{1, N}$) переміщуються повідомлення тільки двох типів $e_0$ і $e_1$. Повідомлення типу $e_0$ не мають оперативного інтересу, а повідомлення $e_1$ — шукані інформативні повідомлення. Всі шукані повідомлення $e_1$ випадковим чином, незалежно одне від одного, з'являються в одному з $N$ каналів системи, не перетинаючись по часу між собою. Така ситуація стосовно повідомлення $e_1$ може бути змодельована як перехід $e_1$ з одного каналу в інший. Рух пошукового пристрою (ПП) по каналах системи зв'язку може бути випадковим або невипадковим. ПП підключається до одного з каналів та перебуває там певний час, необхідний для встановлення типу повідомлення. Ймовірність правильного розпізнавання повідомлень пошуковим пристроєм залежить від часу перебування ПП у даному каналі та часу перебування певного повідомлення в ньому. Причому, якщо пошуковий пристрій розпізнає повідомлення типу $e_0$, то він негайно закінчує пошук на цьому каналі та перемикається на інший, а якщо це повідомлення типу шуканого $e_1$, то ПП у режимі перехоплення супроводжує його до кінця перебування $e_1$ у даному каналі й лише після цього перемикається на інший канал.

Динаміку переміщення повідомлень можна описати нерозривним ланцюгом Маркова $S_0(t)$ з множиною станів $\{0, 1, ..., N-1\}$ та інфінітезимальною матрицею

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{ij}^{(0)}, i, j = \overline{0, N-1}\}.$$

Параметр $\lambda_i^0 = -\lambda_{ii}^{(0)}$ — параметр експоненційного розподілу часу перебування повідомлення в $i$-му каналі; для $i \neq j$ $(\lambda_{ij}^{(0)})/(\lambda_i^{(0)})$ — ймовірність того, що наступним після $i$-го буде $j$-й канал, у якому з'являться повідомлення.

Пошуковий пристрій (ПП) випадковим чином переходить з каналу в канал. Динаміку переміщення ПП описує ланцюг Маркова $S_1(t)$ з тим самим фазовим простором та твірною матрицею

$$\Lambda_1 = \{\lambda_{ij}^{(1)},\, i, j = \overline{0,\, N-1}\},$$

де $\lambda_i^1 = -\lambda_{ii}^{(1)}$ — параметр експоненційного розподілу часу перегляду $i$-го каналу пошуковим пристроєм (ПП); для $i \neq j$ відношення $(\lambda_{ij}^{(1)})/(\lambda_i^{(1)})$ — ймовірність вибору $j$-го каналу після перегляду $i$-го.

В даній роботі досліджено та обґрунтовано декілька підходів до оцінки ефективності виявлення та перехоплення ПП шуканих повідомлень $e_1$ за заданий оперативний час [1] (для марковської та напівмарковської моделей).

Для ймовірності $P^{(k)}(t, i, z) = P\{S_k(t) = z \,|\, S_k^0 = i\}$ справедливе рівняння марковського відновлення [2]

$$P^{(k)}(t, i, z) = \delta_{iz} e^{-\lambda_i^{(k)} t} + \sum_{m \neq i} \int_0^t du \lambda_{im}^{(k)} e^{-\lambda_i^{(k)}(t-u)} P^{(k)}(u, m, z), \quad (1)$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Динаміку процесу взаємодії багатоканальної системи і ПП опишемо співвідношенням

$$S(t) = \{S_0(t),\, S_1(t)\}$$

з фазовим простором

$$E = \{\overline{(0, N-1)},\, \overline{(0, N-1)}\}.$$

**Теорема 1.** *Якщо параметри* $\Lambda_1$ *пошукового пристрою (ПП) не залежать від параметрів* $\Lambda_0$*, то процес* $S(t)$ *є ланцюгом Маркова з інфінітезимальною матрицею розмірності* $N^2 \times N^2$

$$\Lambda = \{\lambda_{kk'} \,:\, k' = (i', j')\},$$

*де*

$$\lambda_{kk'} = \begin{cases} -\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}, & \textit{якщо} \quad i' = i, \quad j' = j; \\ \lambda_{ii'}^{(0)}, & \textit{якщо} \quad i' \neq i, \quad j' = j; \\ \lambda_{jj'}^{(0)}, & \textit{якщо} \quad i' = i, \quad j' \neq j; \\ 1, & \textit{якщо} \quad i' \neq i, \quad j' \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

***Доведення.*** $S_0^{(t)}$ та $S_1^{(t)}$ — незалежні ланцюги Маркова, отже, $S(t)$ також є ланцюгом Маркова.

Нехай $P(t, k, k') = P\{S_0(t) = i',\, S_1(t) = j' \,|\, S_0(0) = i,\, S_1(0) = j\}$, де $k = (i, j)$, $k' = (i', j')$.

Враховуючи ймовірнісну суть елементів інфінітезімальної матриці [3], а саме,

$$P^{(s)}(\Delta, r, r') = \lambda_{rr'}\Delta + o(\Delta),\ r' \neq r,$$

$$1 - P^{(s)}(\Delta, r, r) = -\lambda_{rr}\Delta + o(\Delta),\ \Delta > 0,\ s = 0,\, 1,$$

та з огляду на незалежність подій

$$P(t, k, k') = P^{(0)}(t, i, i') \cdot P^{(1)}(t, j, j'),$$

отримаємо для $\Delta > 0$

$$P(\Delta, k, k') = \begin{cases} o(\Delta), & \text{якщо} \quad i' \neq i, \quad j' \neq j; \\ \lambda_{ii'}\Delta + o(\Delta), & \text{якщо} \quad i' \neq i, \quad j' = j; \\ \lambda_{jj'}\Delta + o(\Delta), & \text{якщо} \quad i' = i, \quad j' \neq j; \end{cases}$$

та $1-P(\Delta,k,k')=\sum\limits_{k'\neq k}P(k,k')=\sum\limits_{i'\neq i}\Lambda^{(0)}_{ii'}\Delta+\sum\limits_{j'\neq j}\Lambda^{(1)}_{jj'}\Delta+o(\Delta)=$
$=(\lambda_i^{(0)}+\lambda_j^{(0)})\Delta+o(\Delta)$. Співвідношення (2) доведено.

Позначимо через $Z=\{(0,0),(1,1),\ldots,(N-1),(N-1)\}$ частину фазового простору $S(t)$, в якому повідомлення та ПП знаходяться в однаковому стані. Очевидно, що ПП може виявити інформативне повідомлення лише у випадку, коли $S(t)\in Z$. Отже, ймовірність

$$K_{ij}(t)=P\{S(t)\in Z\mid S_{(0)}=(i,j)\}$$

можна трактувати як коефіцієнт ефективності виявлення повідомлень ПП в каналах систем зв'язку.

Процеси $S_{(0)}(t)$ та $S_{(1)}(t)$ незалежні, тому

$$K_{ij}(t)=\sum_{x=0}^{N-1}P^{(0)}(t,i,x)\cdot P^{(1)}(t,j,x). \tag{3}$$

Нехай вкладені у $S_{(0)}$ та $S_{(1)}$ незвідні ланцюги Маркова з дискретним часом мають відповідні стаціонарні розподіли

$$\rho^{(0)}=(\rho_0^{(0)},\ldots,\rho_{N-1}^{(0)}),\quad \rho^{(1)}=(\rho_0^{(1)},\ldots,\rho_{N-1}^{(1)}).$$

Із співвідношення (3) і з того, що за даних умов

$$P_{(x)}^{(k)}=\lim_{t\longrightarrow\infty}P^{(k)}(t,i,x),$$

випливає, що завжди існує

$$P^{(k)}(x)=(\rho_x^{(k)}\frac{1}{\lambda_x^{(k)}})/\left(\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i^{(k)}\frac{1}{\lambda_i^{(k)}}\right).$$

Отже, тоді існує границя

$$K=\lim_{t\to\infty}K_{ij}(t)=\sum_{x=0}^{N-1}P^{(0)}(x)\cdot P^{(1)}(x)=$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i^{(0)}\rho_i^{(1)}\frac{1}{\lambda_i^{(0)}\lambda_i^{(1)}}\right)/\left(\sum_{i,j=0}^{N-1}\rho_i^{(0)}\rho_j^{(1)}\frac{1}{\lambda_i^{(0)}\lambda_j^{(1)}}\right). \tag{4}$$

Коефіцієнт $K$ можна трактувати як стаціонарний коефіцієнт виявлення інформативного повідомлення у багатоканальній системі зв'язку.

Процес оптимізації стаціонарного коефіцієнта $K$ зводиться до такої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} K = \sum_{x=0}^{N-1} P^{(0)}(x) \cdot P^{(1)}(x) \to \max, \\ P^{(1)}(x) \geqq 0, \quad x = \overline{0,\, N-1}, \\ \sum_{x=\overline{0,\, N-1}} P^{(1)}(x) = 1. \end{cases}$$

Зокрема, з (4) випливає, що у випадку, коли

$$P^{(0)}(i) = \frac{1}{N}, \quad i = \overline{0,\, N-1},$$

тобто, коли стаціонарні ймовірнісні перебування інформаційних повідомлень у каналах системи зв'язку рівні, то коефіцієнт $K = \dfrac{1}{N}$ для будь-якої стратегії поведінки ПП.

Залежно від поставленої задачі часто використовують такий коефіцієнт ефективності пошуку заданого інформативного повідомлення: $Q_{ij}^z(t) = P\{\tau_{ij} \le t\}$ — ймовірність першого виявлення повідомлення впродовж часу $t$ за умови, що повідомлення перебуває в $i$-му каналі, а ПП — в $j$-му.

Нехай $\tau_{ij} = \inf\{t \ge 0 \,:\, S(t) \in Z,\, S(0) = (i,\, j)\}$. Коефіцієнт ефективності пошуку $Q_{ij}^z(t)$ можна подати у вигляді

$$Q_{ij}^z(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \int q^z(s,\, (i,j),\, (n,n))ds,$$

де $q^z(t,\, (i,j),\, (n,n))dt = P\tau ij \in (t,\, t+dt),\, S(\tau_{ij} = (n,n))$.

Для знаходження функції $q^z$ скористаємося рівнянням марковського відновлення, яке має вигляд системи $N$ інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

$$h(t,\, (i,j),\, (n,n)) = q^z(t,\, (i,j),\, (n,n)) +$$

$$+ \int_0^t \sum_{m=0}^{N-1} q^z(s,\, (i_k,j),\, (m,m)) \cdot h(t-s,\, (m,m),\, (n,n))ds, \qquad (5)$$

де $n = \overline{0,\, N-1}$.

Щільність функції марковського відновлення $h$ процесу $S(t)$ визначається через уже відомі функції та початкові дані співвідношенням

$$h(t,\,(i,j),\,(n,n)) = P^{(0)}(t,i,n)\cdot\sum_{k\neq n}P^{(1)}(t,i,k)\Lambda^{(1)}_{kn}+$$

$$+P^{(1)}(t,j,n)\cdot\sum_{k\neq n}P^{(0)}(t,i,k)\Lambda^{(0)}_{kn};\qquad(6)$$

до того ж, існує границя $h_c(y) = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty} h(t,\,x,\,y), x\in E,\ y\in Z$, яка не залежить від $x$.

Розглянемо ще один варіант коефіцієнта ефективності виявлення інформативного повідомлення у багатоканальній системі зв'язку, а саме, $M_{ij}$ — математичне очікування моменту першого виявлення повідомлення при початковому перебуванні повідомлення в $i$-му каналі, а ПП — у $j$-му каналі.

Коефіцієнт $M_{ij}$ можна було б визначити через функцію $q^z$, але якщо вона невідома, то для знаходження $M_{ij}$ можна скористатись наслідком рівняння (5) [4].

Введемо такі позначення:

$$R^z(x,\,y) = \int_0^\infty q^z(t,\,x,\,y)\,dt,$$

$$M^z(x,\,y) = \int_0^\infty dt\int_0^\infty d\tau\, q^z(t+\tau,\,x,\,y),$$

$$U(x,\,y) = \int_0^\infty (h(t,\,x,\,y)-h_c(y))\,dt,\quad x\in E,\quad y\in Z.$$

Для коефіцієнта ефективності знаходимо $M_{ij} = \sum\limits_{z\in Z} M^z((i,j),z)$.

**Теорема 2.** *Якщо $U(x,y)$ існує, то справедливою є така система співвідношень:*

$$U(x,\,y) = R^z(x,\,y) + \sum_{z\in Z} R^z(x,\,z)U(z,\,y) - h_c(y)M_{ij},\qquad(7)$$

$$\sum_{z\in Z} R^z(x,\,z) = 1,\quad x\in E,\quad y\in Z.\qquad(8)$$

***Доведення.*** Віднімаючи від правої та лівої частин рівняння (5) величину $h_c(y)$ та враховуючи умову нормування

$$\int_0^\infty \sum_{z\in Z} q^z(s,\, x,\, z)\, ds = 1, \tag{9}$$

отримаємо

$$h(t,\, x,\, y) - h_c(y) = q^z(t,\, x,\, y) + \int_0^t q^z(s,\, x,\, z)\cdot(h(t-s,\, z,\, y)-$$

$$-h_c(y))\, ds - h_c(y)\int_t^\infty \sum_{z\in Z} q^z(s,\, x,\, z)\, ds. \tag{10}$$

Інтегруючи рівняння (10) за змінною $t$ та змінюючи порядок інтегрування згідно теореми Фубіні [5], отримаємо (7). Рівняння (8) є умовою нормування для (9). Співвідношення (1) та (6) використано для визначення $U(x, y)$ і $h_c(x)$. Система (7) – (8) при фіксованому $x \in E$ — це система $(N + 1)$ алгебраїчних рівнянь з $(N + 1)$ невідомими $R^z(x, y)$, $M_{ij}$.


[1] *Лопатин А.К., Шлепаков Л.Н., Вовкодав Н.Г.* О некоторых подходах к решению задач поиска сигналов в многоканальной системе // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 103–114.

[2] *Королюк В.С.* Стохастические модели систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.

[3] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985. — 640 с.

[4] *Бондаренко Г.І.* Про один ланцюг рівнянь для операторної функції марковського відновлення напівмарковського процесу // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2003. — № 3. — С. 15–22.

[5] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.