Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 8–19

УДК 532:595

Побудова розв'язків рівняння Лапласа, які задовольняють умову непротікання на сегменті сфери

М.Я. Барняк

Інститут математики НАН України, Київ; barnyak@imath.kiev.ua

В роботі побудована система розв'язків рівняння Лапласа, які задовольняють умову непротікання на сегменті сферичної поверхні. Такі функції можна використати в якості координатних функцій для побудови розв'язків крайових задач, що описують динаміку ідеальної рідини, яка частково заповнює сферичну порожнину. Одержані ці функції шляхом перетворення інверсії деяких допоміжних функцій, що задовольняють відповідну крайову умову на відрізку горизонтальної прямої. В роботі застосовано побудовану систему функцій для визначення частот власних коливань рідини в сферичній порожнині.

В работе построена система решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих условию непротекания на сегменте сферической поверхности. Такие функции можно использовать в качестве координатных функций для построения решений краевых задач, описывающих динамику идеальной жидкости, которая частично заполняет сферическую полость.Получены эти функции путем преобразования инверсии некоторых вспомогательных функций, удовлетворяющих соответствующее краевое условие на отрезке горизонтальной прямой. В работе использовано построенную систему функций для определения частот собственных колебаний жидкости в сферической полости.

A set of harmonic functions satisfying the non-slip condition on the spheric segment is constructed. These functions can be used as a functional basis for solving the boundary problem describing the dynamics of an ideal liquid partly filling a spherical cavity. The functions are obtained by using an inversion transformation of auxiliary functions which satisfy the corresponding boundary condition on an interval of the horizontal axis. The constructed functional basis is employed for approximating the natural sloshing frequencies in the spherical cavity.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

1 Вступ

В роботі [1] запропоновано спосіб побудови частинних розв'язків рівняння Лапласа, які задовольняють умову непротікання

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_0, \tag{1}$$

де S_0 — точки сферичної поверхні

$$r^2 + (z+1)^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

за виключенням точки верхнього полюса сфери з координатами $r_0 = 0$, $z_0 = 0$.

В роботі [2] продовжено побудову таких функцій та використано такі функції для побудови розв'язків крайових задач гідродинаміки ідеальної рідини в сферичній порожнині. Проте недоліком побудованих в цих роботах функцій, є те, що вони задовольняють умову (1) в усіх точках поверхні S_0.

В даній роботі побудовано такі розв'язки рівняння Лапласа, які задовольняють умову (1) тільки на частині області S_0, тобто на сегменті сферичної поверхні (2) при $z < h - 2$, де h приймає задане значення в межах $0 < h < 2$. Для цієї мети використано побудовані в роботі [3] спеціальні розв'язки рівняння Лапласа, що мають особливості в деякій точці області і задовольняють відповідну умову на відрізку горизонтальної прямої. За допомогою перетворення інверсії ці функції перетворюються в функції, які задовольняють умову (1) тільки на частині області S_0.

2 Перетворення інверсії в задачі про власні коливання ідеальної рідини в сферичній порожнині

Розглянемо крайову спектральну задачу з параметром в крайовій умові, яка описує власні коливання ідеальної рідини, що частково заповнює сферичну порожнину одиничного радіуса на висоту h,

$$\triangle \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_0, \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \text{ на } \Sigma, \tag{3}$$

де $\Omega : \{r^2 + (z+1)^2 - 1 < 0,\ z < h-2,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ — область, заповнена рідиною, $\Sigma : \{z = h-2,\ r < r_0 = \sqrt{2h - h^2},\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ — незбурена вільна поверхня рідини, $S : \{r^2 + z^2 + 2z = 0,\ z < h-2,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ —

змочена тверда стінка сферичної порожнини, (r, z, θ) — циліндрична система координат, початок якої вибрано у верхньому полюсі сфери.

В роботі [3] для побудови розв'язків задачі (3) використано перетворення інверсії області, при якому, як відомо [4], інверсовані функції задовольняють рівняння Лапласа. В даній роботі також буде використано це перетворення в дещо видозміненому вигляді. Розглянемо перетворення інверсії області Ω відносно сфери з центром в початку координат і радіусом

$$a = \sqrt{r_0^2 + (2-h)^2} = \sqrt{h(2-h) + (2-h)^2} = \sqrt{2(2-h)}. \qquad (4)$$

Покажемо, що при такому виборі радіуса інверсії лінія перетину поверхонь Σ і S перейде сама в себе, а поверхня Σ перейде в поверхню S і навпаки, поверхня S перейде в Σ.

Перетворення інверсії має вигляд

$$r = \frac{a^2\xi}{p^2}, \;\; z = \frac{a^2\eta}{p^2}, \;\; \text{де } p^2 = \xi^2 + \eta^2. \qquad (5)$$

Обернене перетворення має такий вигляд:

$$\xi = \frac{a^2 r}{R^2}, \;\; \eta = \frac{a^2 z}{R^2}, \;\; \text{де } R^2 = r^2 + z^2 = \frac{a^4}{p^2}. \qquad (6)$$

Отже, сфера, яка в циліндричних координатах задається рівнянням

$$r^2 + z^2 + 2z = 0,$$

перетворюється в площину $\dfrac{a^4}{p^2} + \dfrac{2a^2\eta}{p^2} = 0$, $\eta + \dfrac{a^2}{2} = 0$ або $\eta + 2 - h = 0$. Введемо позначення для віддалі від вільної поверхні рідини до центра інверсії

$$c = 2 - h.$$

Тепер розглянемо обернене перетворення інверсії площини

$$z + c = 0,$$

$$\frac{a^2\eta}{p^2} + (2-h) = 0, \;\; 2(2-h)\eta + (2-h)(\xi^2 + \eta^2) = 0, \;\; \xi^2 + \eta^2 + 2\eta = 0,$$

тобто площина інверсується в сферу.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 2.1 *Нехай функція* $\varphi(r,z,\theta)$ *задовольняє в області* Ω *рівняння Лапласа*

$$\triangle\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=0 \ \ (\textit{в}\ \Omega) \tag{7}$$

і крайові умови

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{1}{2}\varphi=\lambda\frac{c^2}{p^2}\varphi \ \ (\textit{на}\ S), \tag{8}$$

$$R^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}-c\varphi=0 \ \ \textit{при}\ \ z+c=0 \ \ (\textit{на}\ \Sigma). \tag{9}$$

Тоді функція

$$\psi(r,z,\theta)=\frac{c}{R}\varphi\left(\frac{c^2r}{R^2},\frac{c^2z}{R^2},\theta\right) \tag{10}$$

задовольняє в тій же області Ω *рівняння (7) і крайові умови*

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \ \ (\textit{на}\ S), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}-\lambda\psi=0 \ \ \textit{при}\ \ z+c=0 \ \ (\textit{на}\ \Sigma). \tag{12}$$

Доведення. Обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ на S на основі (10):

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{c}{R^3}(r\cdot\cos(n,r)+z\cos(n,z))\varphi+\frac{c}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial n}\right),$$

де $\cos(n,r)=r$, $\cos(n,z)=z+1$ направляючі косинуси зовнішньої нормалі до S

$$\frac{\partial\xi}{\partial n}=\frac{c^2}{R^4}(z^2-r^2)r-\frac{c^2}{R^4}2zr(z+1)=\frac{c^2}{R^4}(z^2r-r^3-2z^2r-2zr)=$$

$$=\frac{c^2}{R^4}(-r^3-z^2r-2zr)=-\frac{c^2r}{R^4}(r^2+z^2+2z)=0,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial n}=\frac{c^2}{R^4}(-2zr\cdot r)+\frac{c^2}{R^4}(r^2-z^2)(z+1)=\frac{c^2}{R^4}(-2zr^2+r^2z+r^2-z^3-z^2)=$$

$$=\frac{c^2}{R^4}(-zr^2-z^3-2z^2+r^2+z^2)=\frac{c^2}{R^2},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{c}{R^3}(r^2 + z(z+1))\varphi + \frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{cz}{R^3}\varphi + \frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} =$$

$$= \frac{\eta}{cR}\varphi + \frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{cR}\left(\eta\varphi + \frac{c^4}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) = \frac{1}{cR}\left(\eta\varphi + p^2\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) = 0.$$

Тепер обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \lambda\psi$ на Σ на основі умови (8):

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \lambda\psi = -\frac{c}{R^3}z\varphi + \frac{c}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{R}c\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\varphi + \frac{c}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{(-2c^2rz)}{R^4} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{c^2(r^2-z^2)}{R^4}\right] - \frac{\lambda c}{R}\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\varphi + \frac{1}{cR}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(-2\xi\eta) + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi^2 - \eta^2)\right] - \frac{\lambda c}{R}\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\varphi - \frac{2\eta}{cR}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\eta+1)\right] - \frac{\lambda c}{R}\varphi =$$

$$= -\frac{2\eta}{cR}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\lambda c^2}{2\eta}\varphi\right) = -\frac{2\eta}{cR}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\lambda c^2}{p^2}\varphi\right) = 0.$$

Отже, функція ψ задовольняє умову (12). Теорему 2.1 доведено.

Таким чином, для того, щоб побудувати функції $\varphi(r,z,\theta)$, які задовольняють умову (11), достатньо побудувати функції $\varphi(r,z,\theta)$, які задовольняють умову (9), і скористатися формулою (10).

Далі будемо розглядати розв'язки рівняння (7), які мають вигляд

$$\varphi(r,z,\theta) = \varphi^{(m)}(r,z)\cos m\theta,$$

де $\varphi^{(m)}(r,z)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\varphi^{(m)} = 0 \qquad (13)$$

в меридіальному перерізі області Ω, який позначимо через G, а L і Γ — меридіальні перерізи поверхонь S і Σ відповідно.

3 Розв'язки рівняння (13), які задовольняють умову (9) на всій площині $z + c = 0$, при $0 \leq r < \infty$

В роботах [1] і [2] побудовано розв'язки рівняння (13), які задовольняють умову (9) при $z = c = 1$. Для довільного значення c вони мають вигляд

$$\varphi_k^m(r,z) = c(2k-1)w_{m+2k-2}^{(m)}(r,z+c) + w_{m+2k-1}^{(m)}(r,z+c) -$$

$$-2\frac{m+k}{c}w_{m+2k}^{(m)}(r,z+c), \quad k = 1,2,\dots . \tag{14}$$

Тут $w_k^{(m)}(r,z)$ однорідні поліноміальні розв'язки рівняння (13), які визначаються за допомогою наступних рекурентних формул:

$$w_m^{(m)}(r,z) = r^m, \quad w_{m+1}^{(m)}(r,z) = zr^m,$$

$$(k+2m+1)w_{m+k+1}^{(m)}(r,z) = (2k+2m+1)zw_{m+k}^{(m)}(r,z) - \tag{15}$$

$$-k(r^2+z^2)w_{m+k-1}^{(m)}(r,z).$$

В роботі [2] показано, що виписані вище функції необхідно доповнити при кожному m функцією

$$\varphi_0^m(r,z) = \sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^m(r,z), \tag{16}$$

де функції w_k^m і коефіцієнти $b_k^{(m)}$ при $k \leq m$ визначаються наступним чином:

$$w_0^m(r,z) = -\left(-\frac{2\sqrt{r^2+z^2}+z}{r}\right)^m, \quad w_{-1}^{(m)}(r,z) = -\frac{w_0^{(m)}(r,z)}{R}, \tag{17}$$

$$(k+m+1)w_{k+1}^{(m)}(r,z) = (2k+1)zw_k^m - (k-m)(r^2+z^2)w_{k-1}^m,$$

$$k = 0,1,\dots,m-1,$$

$$b_m^m = 1, \ b_{m-1}^m = -\frac{1}{2m}, \ b_{k-1}^{(m)} = -\frac{2b_k(k+1)}{k+1}, \tag{18}$$

$$k = m-1, m-2, \dots, 0.$$

Функції, які задовольняють умову (11), мають вигляд

$$\psi_0^m(r,z) = \frac{c}{R}\sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{c}{R}\sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^{m}\left(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right). \tag{19}$$

Враховуючи, що $\frac{1}{R} w_k^m\left(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right) = w_{-k-1}^m(r,z)$, маємо

$$\psi_0^{(m)}(r,z) = \sum_{k=-m-1}^{0} b_{m-k}\, c^{m-k+1}\, w_k^{(m)}(r,z). \tag{20}$$

Функції $\psi_k^{(m)}(r,z)$ мають такий вигляд:

$$\psi_k^{(m)}(r,z) = \frac{c^2}{R}(2k+1) w_{m+2k-2}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2} + c\right) +$$

$$+\frac{c}{R} w_{m+2k-1}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2} + \ldots\right) - \frac{2c(m+k)}{R} w_{m+2k}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2} + c\right). \tag{21}$$

4 Функції, які задовольняють умову (11) на сегменті сфери

Перейдемо до побудови функцій, які задовольняють умову (9) на деякому відрізку $0 \le r < r_0$. Для цієї мети використаємо розв'язки рівняння (13), які побудовані в роботі [3] на основі їх представлення як дійсну та уявну частину функції

$$\varphi(r,z) = \int_0^{\pi} f(iz + r_0 + r\cos t)\, \cos mt\, dt, \tag{22}$$

де $r_0 > 0$ — віддаль від кутової точки області G до осі симетрії порожнини.

Для зручності введемо позначення

$$u = iz + r_0. \tag{23}$$

Вважаємо, що в формулі (22) функція $f(u + r\cos t)$ рівна $ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k$, та позначимо через $v_k^m(r,u)$ функцію

$$v_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k\, \cos mt\, dt, \tag{24}$$

а через $s_k^m(r,u)$ — функцію

$$s_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi (u + r\cos t)^k\, \cos mt\, dt. \tag{25}$$

Як випливає із інтегральних зображень цих функцій, для частинних похідних від цих функцій по змінних u та r мають місце наступні рекурентні формули:

$$\frac{\partial s_k^m}{\partial u} = k s_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial s_k^m}{\partial r} = k s_k^m - uk s_{k-1}^m, \tag{26}$$

$$\frac{\partial v_k^m}{\partial u} = k v_{k-1}^m + s_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial v_k^m}{\partial r} = k v_k^m - ku v_{k-1}^m + s_k^m - u s_{k-1}^m. \tag{27}$$

Диференціюючи одержані співвідношення по r і u, одержуємо рекурентні співвідношення для других похідних від цих функцій, а після підстановки їх в рівняння (13), яке задовольняють функції $v_k^m(r,u)$ і $s_k^m(r,u)$, одержуємо наступні рекурентні формули:

$$(k^2 - m^2)s_k^m - uk(2k-1)s_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)s_{k-2}^m = 0, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}(k^2 - m^2)v_k^m - uk(2k-1)v_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)v_{k-2}^m + 2ks_k^m - \\ -u(4k-1)s_{k-1}^m + (u^2 + r^2)(2k-1)s_{k-2}^2 = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Використовуючи формулу (28), рекурентну формулу (29) можна спростити і записати в такому вигляді:

$$\begin{gathered}[(k+2)^2 - m^2]v_{k+2}^m - u(k+2)(2k+3)v_{k+1}^m + (u^2 - r^2)(k+2)(k+1)v_k^m + \\ + \frac{m^2(2k+3) - (k+2)^2}{(k+1)(k+2)}s_{k+2}^m + \frac{k+2}{k+1}s_{k+1}^m = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Подамо функцію $\varphi_0^*(r,z)$ в такому вигляді:

$$\varphi_k^*(r,z) = d_0\, Re\, v_k^m(r,u) + d_1\, Re\, v_{k+1}^m(r,u) + d_2\, I_m\, v_{k+1}^m(r,u) +$$

$$+d_3\, Re\, v^m_{k+2}(r,u) + d_4\, Re\, s^m_{k+1}(r,u) +$$
$$+d_5\, I_m\, s^m_{k+1}(r,u) + d_6\, Re\, s^m_{k+2}(r,u), \qquad (31)$$

де $u = i(z+c)+r_0$, d_k — невідомі константи.

Якщо $z = -c$, тоді $u = r_0$, а функція $I_m\, v^m_k(r,r_0) = 0$ при $r < r_0$, оскільки в інтегральному представленні функції $v_k(r,r_0)$ підінтегральна функція при $r \le r_0$ і довільному значенні t приймає дійсні значення. Це ж можна сказати і про уявну частину функції $s^m_k(r,r_0)$, тобто $I_m\, s^m_k(r,r_0) = 0$ при $r \le r_0$.

Обчислимо частинні похідні від функцій $s_k(r, i(z+c)+r_0)$ і $v_k(r, i(z+c)+r_0)$ по змінній z при $z=-c$ та $r \le r_0$

$$\left.\frac{\partial s^m_k(r, i(z+c)+r_0)}{\partial z}\right|_{z=-c} = k s^m_{k-1}(r,r_0)\cdot i,$$

$$\left.\frac{\partial v^m_k(r, i(z+c)+r_0)}{\partial z}\right|_{z=-c} = (k v^m_{k-1}(r,r_0) + s^m_{k-1}(r,r_0))i.$$

Із виписаних вище формул випливає

$$\frac{\partial}{\partial z}(Re\, s^m_k)|_{z=-c} = -k\, I_m\,(s^m_k) = 0, \;\; \frac{\partial}{\partial z}(I_m\, s^m_k)|_{z=-c} = k\, Re\,(s^m_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(Re\, v_k)|_{z=-c} = -k\, I_m\, v^m_{k-1} - I_m\, s^m_{k-1} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(I_m\, v_k)|_{z=-c} = k\, Re\, v^m_{k-1} + Re\, s^m_{k-1}.$$

Підставимо функцію $\varphi^*_k(r,z)$ в крайову умову (9) із врахуванням виписаних вище співвідношень. Одержимо

$$c[d_0\, Re\, v^m_k(r,r_0) + d_1\, Re\, v^m_{k+1}(r,r_0) + d_3\, Re\, v_{k+2}(r,r_0) +$$
$$+d_4\, Re\, s_{k+1}(r,r_0) + d_6\, Re\, s_{k+2}(r,r_0)] - (c^2+r^2)[d_2(k+1)\, Re\, v_{k+1}(r,r_0) +$$
$$+d_2\, Re\, s^m_k + d_5(k+1)\, Re\, s^m_k(r,r_0)] = 0.$$

Оскільки $I_m\, s^m_k(r,r_0) = 0$ і $I_m\, v^m_k(r,r_0) = 0$ при $r \le r_0$, то можна записати одержане рівняння, після згрупування подібних членів, в такому вигляді:

$$[cd_0 - (c^2+r^2)d_2(k+1)]v^m_k(r,r_0) - (c^2+r^2)(d_2 + d_5(k+1))s^m_k(r,r_0) +$$
$$+cd_1 v^m_{k+1}(r,r_0) + cd_3 v_{k+2}(r,r_0) + cd_4 s^m_{k+1} + cd_6 s^m_{k+2}(r,r_0) = 0.$$

Порівняємо виписане рівняння із рекурентною формулою (29), яка при $u = r_0$ приймає такий вигляд:

$$[(k+2)^2 - m^2]v_{k+2}^m(r,r_0) - r_0(k+2)(2k+3)v_{k+1}^m(r,r_0)+$$

$$+(r_0^2 - r^2)(k+2)(k+1)v_k^m(r,r_0)+$$

$$+\frac{(2k+3)m^2 - (k+2)^2}{(k+1)(k+2)}s_{k+2}^m(r,r_0) + r_0\frac{k+2}{k+1}s_{k+1}^m = 0.$$

Відношення між коефіцієнтами при однакових функціях повинні бути однаковими. Отже,

$$\frac{d_3}{(k+2)^2 - m^2} = \frac{d_1}{-r_0(k+2)(2k+3)} = \frac{d_0 - c^2 d_2(k+1)}{r_0^2(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{d_2(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{d_4(k+1)}{-(k+2)r_0} = \frac{d_6(k+1)(k+2)}{(2k+3)m^2 - (k+2)^2},$$

$$d_2 + d_5(k+1) = 0,\ cd_0 - c^2 d_2(k+1) = r_0^2 d_2(k+1),\ d_0 = (c^2 + r_0^2)d_2(k+1).$$

Оскільки коефіцієнти d_k визначаються з точністю до постійного множника, то покладемо $d_0 = c^2 + r^2$; тоді

$$d_2 = \frac{c}{k+1},\ d_4 = \frac{r_0 d_2}{k+1} = \frac{r_0}{(k+1)^2},\ d_5 = -\frac{d_2}{k+1} = -\frac{c}{(k+1)^2},$$

$$d_1 = -\frac{r_0(2k+3)}{k+1},\ d_3 = \frac{(k+2)^2 - m^2}{(k+1)(k+2)},\ d_6 = \frac{(2k+3)m^2 - (k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}.$$

В результаті одержуємо

$$\varphi_k^*(r,z) = (c^2 + r_0^2)Re\, v_k^m(r,u) - \frac{r_0(2k+3)}{k+1}Re\, v_{k+1}^m(r,u)+$$

$$+\frac{c}{k+1}I_m\, v_{k+1}^m(r,u) + \frac{(k+2)^2 - m^2}{(k+1)(k+2)}Re\, v_{k+2}^m(r,u)+$$

$$+\frac{r_0}{(k+1)^2}Re\, s_{k+1}^m(r,u) + \frac{c}{(k+1)^2}I_m\, s_{k+1}+$$

$$+\frac{(2k+3)^2 m^2 - (k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}Re\, s_{k+2}(r,u),\ \text{де}\ u = i(z+c) + z_0.$$

Цю формулу можна переписати ще в такому вигляді:

$$\varphi_k^*(r,z) = Re\,[(c^2+r_0^2)v_k^m(r,u) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}v_{k+1}^m +$$

$$+\frac{(k+2)^2-m^2}{(k+1)(k+2)}v_{k+2}^m + \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}s_{k+1}^m(r,u)+$$

$$+\frac{(2k+3)m^2-(k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}s_{k+2}(r,u)], \text{ де } u = i(z+c)+r_0.$$

При $m=1$ ця функція має такий вигляд:

$$\varphi_k^*(r,z) = Re\,[(c^2+r_0^2)v_k^*(r,u) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}v_{k+1}^m +$$

$$+\frac{k+3}{k+2}v_{k+2}^m(r,u) + \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}s_{k+1}^m(r,u)-$$

$$-\frac{1}{(k+2)^2}s_{k+2}^m(r,u)], \text{ де } u = i(z+c)+r_0.$$

Функція $\psi_k^*(r,z)$, яка задовольняє умову (11) на S, має вигляд

$$\psi_k^*(r,z) = \frac{c}{R}Re\,[(c^2+r_0^2)v_k^*(\xi,u_1) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}v_{k+1}(\xi,u_1)+$$

$$+\frac{k+3}{k+2}v_{k+2}^m(\xi,u_1) + \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}s_{k+1}^m(\xi,u_1)-$$

$$-\frac{1}{(k+2)^2}s_{k+2}^m(\xi,u_1)], \text{ де } u_1 = i\left(\frac{c^2z}{R^2}+c\right)+r_0,\ \xi = \frac{c^2r}{R^2}.$$

Обчислимо похідну по z від функції $\psi_k^*(r,z)$

$$\frac{\partial\psi_k^*}{\partial z} = -\frac{z}{R^2}\psi_k^* + \frac{c}{R}\frac{\partial\psi_k^*}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{c}{R}\frac{\partial\psi_k}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial z} = -\frac{2c^2rz}{R^4},\ \ \frac{\partial u_1}{\partial\eta} = i,\ \ \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{c^2(r^2-z^2)}{R^4}.$$

Для обчислення похідних $\dfrac{\partial\psi_k^*}{\partial\xi}$ і $\dfrac{\partial\psi_k^*}{\partial u_1}$ використаємо рекурентні формули для похідних (26) і (27).

Функції $\varphi_k^*(r,z)$ в сукупності із функціями $\varphi_k^m(r,z)$ використані в якості координатних функцій при реалізації варіаційного методу розв'язування задачі. При врахуванні трьох функцій $\varphi_0^m(r,z)$ і від 4 до 10 функцій $\varphi_0^*(r,z)$ при $m=1$ одержано наступні величини для перших двох власних значень задачі (3):

Таблиця.

h	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	N	N_1
0,5	1,207717	5,496884	1,207717	5,496884	3	4
0,75	1,356965	5,257182	1,356965	5,257182	3	4
1,0	1,560157	5,275546	1,560157	5,275546	3	4
1,25	1,859132	5,583088	1,859132	5,583088	3	5
1,5	2,362244	6,373042	2,362244	6,373042	3	6
1,75	3,500317	8,531005	3,500317	8,530989	3	10

В четвертому і п'ятому стовпчиках наведено перші два значення задачі, одержані іншим методом в роботі [3]. Як видно із таблиці, ці значення майже всюди однакові, хоча в роботі [3] для цієї мети використано до 36 координатних функцій. В стовпчиках 6 і 7 наведена кількість врахованих функцій $\varphi_k^m(r,z)$ і $\varphi_k^*(r,z)$. Побудовані тут функції $\varphi_k^*(r,z)$ і $\psi_k^*(r,z)$ можна використати і при розв'язуванні інших задач динаміки рідини в сферичній порожнині, в тому числі і нелінійних задачах.

[1] *Барняк М.Я., Луковский И.А.* К решению задач динамики идеальной несжимаемой жидкости в сферической полости и в горизонтальном круговом канале // Мат. физика и нелинейная механика. — 1985. — Вып. 4 (38). — С. 66–71.

[2] *Барняк М.Я., Жавроцький Д.С., Луковський І.О.* Наближений метод побудови розв'язків крайових задач гідродинаміки ідеальної рідини в сферичній порожнині // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. —**2**, № 1. — С. 64–73.

[3] *Барняк М.Я.* Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 579–595.

[4] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.