Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 20–35

УДК 532:595

Визначення динамічних характеристик капілярної рідини в рухомому циліндрі при великих числах Бонда *

М.Я. Барняк, І.О. Луковський

Інститут математики НАН України, Київ;
barnyak@imath.kiev.ua, lykovsky@imath.kiev.ua

В роботі запропоновано метод побудови коефіцієнтів рівнянь руху капілярної рідини, яка частково заповнює рухому циліндричну посудину. Спочатку розв'язується задача про форму рівноваги вільної поверхні рідини при великих значеннях числа Бонда. Для побудови розв'язків спектральної крайової задачі, яка описує власні коливання капілярної рідини, застосовується варіаційний метод. Проведено чисельну реалізацію запропонованих методик дослідження для різних значень числа Бонда.

В работе предложен метод построения коэффициентов уравнений движения капиллярной жидкости, частично заполняющей подвижную цилиндрическую полость. Сначала решается задача о форме равновесия свободной поверхности жидкости при больших значениях числа Бонда. Для построения решений спектральной краевой задачи, описывающей собственные колебания капиллярной жидкости применяется вариационный метод. Проведена численная реализация предлагаемых методик исследования для различных значений числа Бонда.

A method for constructing the hydrodynamic coefficients of the equations of a capillary liquid partly filling a mobile cylindrical tank is proposed. First, the problem on the capillary meniscus is solved for large Bond number. For constructing a solution of the spectral boundary problem describing the natural sloshing modes and frequencies, a variational method is applied. A numerical realization of the method versus the Bond number is presented.

---

* Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0112U001015

1 Побудова форми вільної поверхні капілярної рідини в круговому вертикальному циліндрі

.

Під дією сили ваги і сили поверхневого натягу статична вільна поверхня рідини приймає криволінійну конфігурацію і, зокрема, у вертикальному круговому циліндрі вона має форму поверхні обертання відносно вертикальної осі z.

Як відомо із роботи [2], твірна осесиметричної вільної поверхні капілярної рідини описується диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{r\,r'}\left(\frac{rz'}{\sqrt{{r'}^2+{z'}^2}}\right)' = bz + c, \tag{1}$$

де $\left(' = \dfrac{d}{d\xi}\right)$, ξ — параметр, $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$ — параметричне рівняння твірної вільної поверхні рідини, $b = \dfrac{\rho\, g L^2}{\sigma}$ — число Бонда, ρ — густина рідини, g — прискорення сил земного тяжіння, L — характерний лінійний розмір посудини, в якості якого виберемо радіус циліндра, σ — коефіцієнт поверхневого натягу на межі розділу рідина–газ, c — константа що визначається в процесі побудови розв'язків задачі. Якщо в якості параметра ξ вибрати змінну r, тоді рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{1}{r}\left(\frac{rz'}{\sqrt{1+{z'}^2}}\right)' = bz + c. \tag{2}$$

Якщо в якості параметра ξ вибрати довжину дуги s, то одержимо таку систему рівнянь:

$$\frac{1}{r}(rz')' = bz + c, \;\; {r'}^2 + {z'}^2 = 1. \tag{3}$$

Оскільки константа c залишається невизначеною, то при $b \neq 0$ можна зробити заміну змінної z

$$z(r) = f(r) - \frac{c}{b} \tag{4}$$

і тоді рівняння (2) і (3) приймуть вигляд

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r\dfrac{df}{dr}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{df}{dr}\right)^2}}\right)=bfr, \tag{5}$$

$$(rz^{'})^{'}=bzc,\ \ r^{'2}+z^{'2}=1. \tag{6}$$

В точці перетину твірної вільної поверхні рідини з твердою стінкою виконується умова Дюпре–Юнга рівності кута змочування γ заданому

$$\sigma\cos\gamma=\sigma_1-\sigma_2,$$

де σ_1 і σ_2 — коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях розділу тверда стінка–газ і тверда стінка–рідина відповідно. Для циліндричної порожнини маємо крайову умову для рівняння (5)

$$\frac{df}{dr}=0 \text{ при } r=0,\ \ \frac{df}{dr}=\operatorname{ctg}\gamma \text{ при } r=1, \tag{7}$$

або крайові умови для системи рівнянь (6)

$$r(0)=0,\ z^{'}(0)=0,\ r^{'}(s_1)=\sin\gamma,\ r(s_1)=1, \tag{8}$$

де значення параметра s_1 визначається в процесі побудови розв'язків задачі.

Зауважимо, що задача (5), (7), як відомо із [2], має таке варіаційне формулювання, згідно якого функція $f(r)$ визначається як така, що надає мінімум функціоналу

$$F(f(r))=\int\limits_0^1 r\sqrt{1+\left(\frac{df}{dr}\right)^2}dr+\frac{b}{2}\int\limits_0^1 rf^2dr-\cos\gamma\cdot f(1) \tag{9}$$

на класі функцій інтегровних з квадратом разом з першою похідною.

Очевидно, що функція $f(r)$ та її похідна на відрізку [0;1] є монотонно зростаючими, причому $\dfrac{df}{dr}$ приймає всі значення від 0 до $\cos\gamma$ при $r=1$. При фіксованому значенні кута γ і величини ε існує таке значення $r = a$ $(0 < a < 1)$, що $\dfrac{df}{dr}(a) = \varepsilon$. Значення $f(r)$ на відрізку $[0; a]$ можна визначити як функцію, що надає мінімум функціоналу

$$F_1(a, f(r)) = \int\limits_0^a r\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2}\, dr + \frac{b}{2}\int\limits_0^a rf^2 dr - \frac{f(a)\cdot\varepsilon\cdot a}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \quad (10)$$

Якщо значення ε достатньо мале, то відповідно і значення функції $\dfrac{df}{dr}(r)$ на відрізку $[0; a]$ не перевищують ε і функціонал $F_1(a, f(r))$ з точністю до членів другого порядку малости можна замінити таким функціоналом:

$$F_2(a, f(r)) = \int\limits_0^a r\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right) dr + \frac{b}{2}\int\limits_0^a rf^2 dr - f(a)\cdot\varepsilon\cdot a. \quad (11)$$

Функція $f_0(r)$, яка надає мінімум цьому функціоналу, задовольняє рівнянню

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_0}{dr}\right) + brf_0 = 0$$

і крайові умови

$$\frac{df_0}{dr} = 0 \text{ при } r = 0, \quad \frac{df_0}{dr} = \varepsilon \text{ при } r = a.$$

Отже, $f_0(r) = cI_0(\sqrt{b}\, r)$, де

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{b}\, I_1(\sqrt{b}\, a)}. \quad (12)$$

Оцінимо похибку при заміні функціонала $F_1(a, f_0)$ функціоналом $F_2(a, f_0)$:

$$|F_1(a, f_0) - F_2(a, f_0)| = \Big|\int\limits_0^a \left(\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\right)^4}\right) r\, dr + \Big|\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Big|\, f(a) \le$$

$$\leq \int\limits_0^a \frac{1}{8}\left(\frac{df}{dr}\right)^4 r\,dr + \left|\varepsilon - \varepsilon\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right|\varepsilon < \frac{\varepsilon^4}{16} + \frac{\varepsilon^4}{2} = \frac{7}{16}\varepsilon^4. \qquad (13)$$

Таким чином, функція $f_0(r)$ мінімізує функціонал $F_1(a,f)$ на відрізку $[0;a]$ з точністю до $\dfrac{7}{16}\varepsilon^4$.

Для визначення форми вільної поверхні рідини при заданих значеннях числа Бонда, кута змочування γ і числа ε нам потрібно знати значення параметра a, щоб визначити функцію f_0. Нехай значення a задано. Тоді обчислимо значення похідних $\dfrac{dz}{ds}$ і $\dfrac{dr}{ds}$ в точці $r=a$:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{df_0}{dr}\frac{dr}{ds} = \varepsilon\cdot\cos\beta = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

де β — кут нахилу дотичної до твірної.

Маємо такі початкові умови:

$$r = r_0 = a,\ \ z = z_0 = \frac{\varepsilon I_0(\sqrt{b}\,a)}{\sqrt{b}\,I_1(\sqrt{b}\,a)},\ \ r^{'} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},\ \ z^{'} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \quad (14)$$

Довжина дуги кривої

$$s_0 = \int\limits_0^a \sqrt{1+\left(\frac{df}{dr}\right)^2}\,dr = \int\limits_0^a \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right) dr =$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^a \left(\frac{I_1(\sqrt{b}\,r)}{I_1(\sqrt{b}\,a)}\right)^2 dr = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{b}}\int\limits_0^{\sqrt{b}\,a}\left(\frac{I_1(t)}{I_1(\sqrt{b}\,a)}\right)^2 dt.$$

Далі апроксимуємо розв'язки задачі степеневими рядами

$$r = \sum_{k=0}^N a_{1,k}(s-s_0)^k, \quad z = \sum_{k=0}^N b_{1,k}(s-s_0)^k, \qquad (15)$$

де $a_{1,0} = a,\ a_{1,1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},\ b_{1,0} = z_0,\ b_{1,0} = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$

Рекурентні формули для обчислення коефіцієнтів $a_{1,k}$ і $b_{1,k}$ такі:

$$d_1 = 1,\ \ d_k = 0,\ \ k > 1;\ \ c_{m,k-1} = b\sum_{i=0}^{k-1} a_{m,i}b_{m,k-i+1},\ \ m = 1,$$

$$b_{m,k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{(k+1)a_{m,0}}\left(\frac{1}{k}a_{m,i+1}c_{m,k-i-1} - b_{m,i+1}a_{m,k-i}\right), \qquad (16)$$

$$a_{m,k+1} = \frac{d_k}{2a_{m,0}} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{(k+1)a_{m,0}}\left(\frac{1}{k}b_{m,i+1}c_{m,k-i-1} - a_{m,i+1}a_{m,k-i}\right).$$

При необхідності будуємо аналітичне продовження

$$r = \sum_{k=0}^{N} a_{m,k}(s - s_{m-1})^k,\ \ \ z = \sum_{k=0}^{N} b_{m,k}(s - s_{m-1})^k,\ \ m \geq 2. \qquad (17)$$

Коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$ визначаються по формулах (15). Перші два коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$ $(k = 0, 1)$ визначаються за допомогою формул (15) (при $m = 1$) і (17) (при $m \geq 2$) і значеннях $s = s_{m-1}$. Тут $s_{m-1} = \dfrac{1}{3}R_m$, де R_m — радіус збіжності рядів (15), або (17), який наближено можна визначити таким чином:

$$R_m = \frac{1}{6}\sum_{k=N-2}^{N}\left(|a_{m,k}|^{-\frac{1}{k}} + |b_{m,k}|^{-\frac{1}{k}}\right). \qquad (18)$$

Тепер на основі побудованих функцій $r(s)$ і $z(s)$ при заданому значенні a визначаємо таке найменше значення s^*, для якого $r^{'}(s^*) = \sin\gamma$. Тоді шляхом застосування методу хорд знаходимо значення параметра a, при якому

$$r(s^*) = 1.$$

Таким способом розв'язується задача гідростатики при великих значеннях числа Бонда.

2 Малі коливання капілярної рідини в циліндричній посудині

Розглянемо першу задачу динаміки системи тіло–рідина, яка полягає в наступному. Припустимо, що рух порожнини заданий; необхідно визначити рух рідини, яка частково заповнює порожнину, а також сили взаємодії між тілом і рідиною.

Рідину вважаємо ідеальною, а поле масових сил — потенціальним. Нехай посудина з рідиною здійснює поступальний рух в напрямку, перпендикулярному осі циліндра, по закону $u(t)$.

Розглянемо нерухому систему координат $Oxyz$ з потенціалом масових сил $\Pi = gz$, де g — прискорення сил земного тяжіння. Потенціал швидкостей рідини $\tilde{\Phi}(x, y, z, t)$ визначається як розв'язок задачі Неймана

$$\triangle\tilde{\Phi} = 0 \text{ в } \Omega, \ \ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\nu} = (\vec{v}, \vec{\nu}) \text{ на } S, \ \ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\nu} = (\vec{v}, \vec{\nu}) + u_\nu \text{ на } \Sigma_1. \tag{19}$$

Тут Ω — область заповнена рідиною, S — змочена поверхня порожнини, Σ_1 — збурена вільна поверхня рідини, $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до границі області Ω, u_ν — швидкість відносного руху рідини.

Крім рівняння і крайових умов (19), потенціал задовольняє також динамічну умову на вільній поверхні рідини, яку можна одержати із інтеграла Лагранжа–Коші [1]

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\Phi})^2 + gz^* + \frac{p}{\rho} = F(t), \tag{20}$$

де ρ — густина рідини, p — тиск на вільній поверхні рідини з боку рідини. Згідно формули Лапласа на поверхні розділу (рідина–повітря) тиск змінюється стрибком

$$p - p_0 = -\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

де p_0 — тиск в газі над Σ, R_1 і R_2 — головні радіуси кривизни (радіус вважається від'ємним, якщо центр кривизни лежить на стороні, позначеній нулем). Без додаткових обмежень в (20) можна покласти $F(t) = \dfrac{p_0}{\rho}$, і динамічна умова прийме вигляд

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\Phi})^2 + gz - \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0.$$

Рівняння збуреної вільної поверхні в циліндричній системі координат (z, r, θ) задамо у вигляді

$$z = f(r) + h(r, \theta, t). \tag{21}$$

Відносно функції $h(r,\theta,t)$ припустимо, що квадрати цієї функції та її похідних є величинами другого порядку малості. У відповідності з теорією малих коливань рідини всі граничні умови задачі зносимо на незбурену вільну поверхню Σ.

В даній роботі задачу розглянемо в лінійній постановці, коли функцію $\tilde{\Phi}$ подано у вигляді

$$\tilde{\Phi} = (\vec{v}, \vec{\Phi}_0) + \Phi, \tag{22}$$

де Φ_0 і Φ — гармонічні функції, які є розв'язками крайових задач

$$\triangle\vec{\Phi}_0 = 0 \;\text{ в }\Omega,\;\; \frac{\partial\vec{\Phi}_0}{\partial\nu} = \vec{\nu} \;\text{ на }\Sigma + S; \tag{23}$$

$$\triangle\Phi = 0 \;\text{ в }\Omega,\;\; \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{\partial N}{\partial t} \;\text{ на }\Sigma,\;\; \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \;\text{ на }S, \tag{24}$$

$N(s,\theta,t)$ — відхилення вільної поверхні по зовнішній нормалі до Σ. В лінійній постановці між функціями $N(s,\theta,t)$ і $h(r(s),\theta,t)$ справедливе співвідношення

$$N(s,\theta,t) = \frac{dr(s)}{ds}\, h(r(s),\theta,t). \tag{25}$$

Для зручності запису позначимо

$$d(s) = \frac{dr(s)}{ds} = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{df}{dr}\right)^2}}, \tag{26}$$

де β — кут між віссю r і дотичною до Γ.

Як показано в роботі [2], із врахуванням (25) з точністю до членів другого порядку малості маємо

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rd^3\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{d}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}.$$

З точністю до довільної сталої розв'язок задачі (23) має вигляд

$$\vec{\Phi}_0(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{27}$$

Якщо посудина здійснює поступальний рух в напрямку осі x із швидкістю $u(t)$, то тоді $(\vec{v},\vec{\Phi}_0) = u(t)x$ і динамічна умова приймає вигляд

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gh - \frac{\sigma}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rd^3\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{d}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}\right] + x\cdot u(t) = 0. \tag{28}$$

Крім того, функція $h(r,\theta,t)$ повинна задовольняти умову збереження кута змочування

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0 \ \text{ при } \ r = 1.$$

Зауважимо, що при нульовому куті змочування ($\gamma = 0$) або при $\gamma = \pi$ (рідина не змочує тверду стінку) $d(1) = \sin\gamma = 0$, рівняння (28) вироджується і на функцію h ніяких умов при $r = 1$ не накладається.

Рівняння руху рідини і кінематичні умови мають вигляд

$$\triangle\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = d\frac{\partial h}{\partial t} \ \text{ на } \Sigma, \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \ \text{ на } S. \tag{29}$$

Крім виписаних вище рівнянь руху в початковий момент часу, потрібно задати початкове збурення вільної поверхні $h_0(r,\theta)$ та вертикальну швидкість частинок вільної поверхні рідини $v_0(r,\theta) = \dfrac{\partial h}{\partial t}$ на Σ. По значенню $v_0(r,\theta)$ можна знайти розподіл швидкостей в початковий момент часу.

3 Власні коливання капілярної рідини в циліндрі

Для побудови розв'язків задачі Коші варто знати розв'язок задачі про власні коливання рідини в нерухомій посудині, тобто при $u(t) = 0$, коли функції $\Phi(z,r,\theta,t)$ і $h(r,\theta,t)$ мають вигляд

$$\Phi(z,r,\theta,t) = \cos\omega t\,\Phi(z,r)\cos m\theta, \ \ h(r,\theta,t) = \sin\omega t\,h(r)\cos m\theta. \tag{30}$$

Для визначення функцій $\Phi(z,r,\theta)$ і $h(r,\theta)$ одержуємо крайову спектральну задачу

$$\begin{gathered}\triangle_m\Phi = 0 \ \text{ в } G, \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } L, \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \varkappa dh \ \text{ на } \Gamma, \\ -\frac{1}{b}\left[\frac{d}{dr}\left(rd^3\frac{dh}{dr}\right) - \frac{m^2dh}{r}\right] + h = \varkappa\varphi, \ \ \frac{dh}{dr} = 0 \ \text{ при } \ r = 1,\end{gathered} \tag{31}$$

де $\varkappa = \dfrac{\omega L^{1/2}}{g^{1/2}}$, ω — частота власних коливань.

Задачу (31) можна записати в операторному вигляді. Для цього розглянемо оператор T, який діє на класі гармонічних функцій, що задовольняють умову $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на L, і ставить у відповідність значенню функції φ на Γ значення її нормальної похідної $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на Γ. Обернений оператор T^{-1} ставить у відповідність, (на цьому ж класі функцій) значенню нормальної похідної $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на Γ значення самої функції φ.

Крім того, розглянемо на Γ диференціальний оператор

$$Lh \equiv -\frac{1}{b}\left[\frac{d}{dr}\left(rd^3\frac{dh}{dr}\right) - \frac{m^2}{r}dh\right] + rh, \tag{32}$$

який діє на класі двічі неперервно диференційовних функцій на відрізку $[0;1]$, що задовольняють умову $\dfrac{dh}{dr} = 0$ при $r = 1$. У випадках, коли $\gamma = 0$ або $\gamma = \pi$, на функцію $h(r)$ при $r = 1$ накладається тільки умова $h(1) < \infty$. Тоді задача (31) приймає такий вигляд:

$$T\varphi = \varkappa\, d\, h, \quad Lh = \varkappa\, r\, \varphi. \tag{33}$$

Множимо перше рівняння на $r\varphi$ і інтегруємо по Γ:

$$\int\limits_\Gamma r\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds = \varkappa\int\limits_\Gamma rh\varphi d ds = \varkappa\int\limits_\Gamma rh\varphi\, dr.$$

Множимо друге рівняння на h і інтегруємо по r:

$$\int\limits_\Gamma Lh\, h\, dr = \varkappa\int\limits_\Gamma r\varphi h\, dr.$$

В результаті одержуємо

$$\varkappa = \frac{\int\limits_\Gamma r\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}ds + \int\limits_\Gamma Lh\, h\, dr}{2\int\limits_\Gamma r\varphi h\, dr}. \tag{34}$$

На основі представлення задачі у вигляді (33) можна записати її ще наступним чином:

$$T\varphi = \varkappa^2\, d\, L^{-1}(r\varphi), \tag{35}$$

$$Lh = \varkappa^2\, T^{-1}(dh). \tag{36}$$

Як показано в роботі [4], справедлива наступна теорема:

Теорема 3.1 *Найменше по модулю власне значення задачі (35) визначається як мінімум абсолютної величини функціоналу*

$$K(\varphi, h) = \frac{1}{2\int\limits_{\Gamma} r\varphi h\, dr}\left\{\int\limits_{G}\left[r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2\right] dG + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma}\frac{1}{b}\left[rd^3\left(\frac{dh}{dr}\right)^2 + \frac{m^2 d}{r}h^2 + rh^2\right] dr\right\} \qquad (37)$$

на класі функцій $\varphi \in W'_{2,r}(G)$ *і* $h \in W'_{2,r}(\Gamma)$, *які задовольняють умови*

$$\int\limits_{\Gamma} r\varphi\, dr = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} rh\, dr = 0. \qquad (38)$$

Наступне позитивне n*-е власне значення задачі (33) визначається як мінімум абсолютної величини функціоналу на класі означених вище функцій, які задовольняють умови ортогональності до перших* $n-1$ *власних функцій*

$$\int\limits_{\Gamma} r\varphi N_i\, dr = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} r\varphi_i N\, dr = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (39)$$

4 Метод Рітца

Для мінімізації функціоналу (37) подамо функції φ і h у вигляді скінчених сум

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=1}^{N} a_k w_k(z, r), \quad h(r) = \sum_{k=1}^{N} b_k p_k(r), \qquad (40)$$

де $\{w_k(z, r)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функцій, які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + r\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{m^2}{r}\varphi = 0,$$

$\{p_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функцій повна в просторі $L_2[0, 1]$. В якості функцій $p_k(r)$ вибиралися функції, які виражаються через многочлени Якобі і визначаються за допомогою наступних рекурентних формул:

$$p_0(r) = r^m, \quad p_1(r) = r^m((2m+3)r - 2m - 2),$$

$$p_{k+1}(r) = ((k+m+1)((2k+2m+1)(2k+2m+3)(2r-1)-(2m+1)^2)p_k-$$
$$-k(k+2m+1)(2k+2m+3)p_{k-1})/((k+1)(k+2m+2)(2k+2m+1)),$$
$$\frac{dp_{k+1}(r)}{dr} = ((k+m+1)((2k+2m+1)(2k+2m+3)(2r-1)-(2m+1)^2)\frac{dp_k}{dr}-$$
$$-k(k+2m+1)(2k+2m+3)\frac{dp_{k-1}}{dr} + (k+m+1)(2k+2m+1)\times$$
$$\times(2k+2m+3)2p_k)/((k+1)(k+2m+2)(2k+2m+1)).$$

Рекурентна формула для похідної $\dfrac{dp_k(r)}{dr}$ одержана шляхом диференціювання рекурентної формули для функції $p_{k+1}(r)$, причому

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = r^{m-1}\,m, \quad \frac{dp_1(r)}{dr} = (m+1)r^m(2m+3) - m(2m+2)r^{m-1}.$$

Для визначення коефіцієнтів a_i і b_i одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M}\alpha_{i,j}a_j \quad &- \quad \sqrt{\lambda}\sum_{j=1}^{M_1}\gamma_{i,j}b_j = 0,\ i=1,...,M,\\ \sum_{j=1}^{M}\gamma_{j,i}a_j \quad &- \quad \sqrt{\lambda}\sum_{j=1}^{M_1}\beta_{i,j}b_j = 0,\ i=1,...,M_1, \end{aligned} \tag{41}$$

де

$$\alpha_{i,j} = \int_{L+\Gamma} rw_i^m \frac{\partial w_j^m}{\partial \nu}dr, \quad \gamma_{i,j} = \int_{\Gamma} rw_i^m f_j dr,$$
$$\beta_{i,j} = \int_{\Gamma}\Big(\frac{rd^3}{b}\frac{df_i}{dr}\frac{df_j}{dr} + (\frac{m^2d}{br} + r)f_if_j\Big)dr + \frac{\mu}{b}r(s_1)f_i(s_1)f_j(s_1).$$

Вводячи наступні позначення для матриць коефіцієнтів:

$$A = (\alpha_{i,j}),\ B = (\beta_{i,j}),\ C = (\gamma_{i,j}),$$

запишемо задачу (41) у вигляді

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Тут: C^* — транспонована до C матриця, X і Y — вектор-стовпчики коефіцієнтів a_i і b_i.

При великих значеннях числа Бонда для обчислення коефіцієнтів матриць A, B і C використано метод Гауса. При цьому окремо вираховуються квадратури на ділянках, де вільна поверхня визначається асимптотичним виразом та за допомогою степеневих рядів.

В лініаризованій постановці динамічна умова на лінії Γ приймає вигляд

$$r\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{b}\left[\frac{d}{dr}\left(rd^3\frac{dh}{dr}\right) - \frac{m^2 d}{r}h\right] + rh + \frac{d^2u}{dt^2}r^2 = 0. \tag{43}$$

Функції $\Phi(z,r,t)$ і $h(r,t)$ подамо у вигляді

$$\Phi(z,r,t) = \sum_{n=1}^{N}\dot{p}_n(t)\varphi_n(z,r), \quad h(r,t) = \sum_{n=1}^{N}p_n(t)h_n(r). \tag{44}$$

Множимо рівняння (43) на функції $h_i(r)$ і після інтегрування по лінії Γ одержуємо наступні диференціальні рівняння для визначення функцій $p_n(t)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\ddot{p}_n(t)\int\limits_\Gamma r\varphi_n h_i\,dr + \int\limits_\Gamma\left[\left(\frac{1}{b}rd^3\frac{dh_n}{dr}\cdot\frac{dh_i}{dr} + \frac{m^2 d}{br}h_n\,h_i\right) + \right.$$

$$\left. + rh_n\,h_i\right]dh + \frac{d^2u}{dt^2}\int\limits_\Gamma r^2 h_i\,dr. \tag{45}$$

Враховуючи умови ортогональності

$$\int\limits_\Gamma r\,\varphi_n\,h_i\,dr = 0, \quad \text{якщо} \quad n \neq i, \tag{46}$$

$$\int\limits_\Gamma\left(\frac{rd^3}{b}\,\frac{dh_n}{dr}\,\frac{dh_i}{dr} + \frac{m^2 d}{br}h_n\,h_i + rh_n h_i\right)dr = 0, \quad \text{якщо} \quad n \neq i, \tag{47}$$

одержуємо наступну послідовність диференціальних рівнянь для визначення функцій $p_n(t)$:

$$\mu_n\ddot{p}_n + \gamma_n p_n + \chi_n\ddot{u} = 0, \tag{48}$$

де

$$\mu_n = \int\limits_\Gamma r\varphi_n h_n dr, \quad \chi_n = \int\limits_\Gamma r^2 h_n\,dr, \tag{49}$$

$$\gamma_n = \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{rd^3}{b} \left(\frac{dh_n}{dr} \right)^2 + \frac{m^2 d}{br} h_n^2 + r h_n^2 \right] dr, \quad m_n = \frac{\chi_n^2}{\mu_n}. \qquad (50)$$

В таблиці 1 подано результати обчислень власних значень задачі (41) при куті змочування $\gamma = \frac{\pi}{6}$, а також відповідні значення коефіцієнтів рівнянь (48), що визначаються формулами (49) і (50).

Таблиця 1

n	*bond*	λ_n	μ_n	γ_n	χ_n	m_n
1	20	1,866879	0,155129	0,289607	0,249239	0,400441
2	20	11,244140	0,033238	0,373733	0,007177	0,001550
3	20	33,098168	0,015335	0,507568	0,001028	0,000069
1	50	1,781466	0,149243	0,265871	0,248997	0,415427
2	50	7,763907	0,032546	0,252686	0,011482	0,004051
3	50	19,104692	0,015046	0,287441	0,000898	0,000054
1	100	1,761325	0,146213	0,257529	0,248756	0,423214
2	100	6,515615	0,032004	0,208527	0,014459	0,006533
3	100	13,938796	0,014801	0,206308	0,002334	0,000368
1	200	1,754445	0,144302	0,253171	0,248460	0,427798
2	200	5,895749	0,031482	0,185609	0,016891	0,009063
3	200	11,226169	0,014594	0,163839	0,003681	0,000928
1	300	1,752812	0,143575	0,251660	0,248288	0,429373
2	300	5,696974	0,031206	0,177779	0,017951	0,010326
3	300	10,309275	0,014491	0,149393	0,004392	0,001331
1	500	1,751789	0,142947	0,250413	0,248099	0,430602
2	500	5,544128	0,030909	0,171365	0,018901	0,011558
3	500	9,580005	0,014372	0,137688	0,005156	0,001850

Таблиця 2 містить у собі результати обчислень власних значень задачі та значень коефіцієнтів диференціальних рівнянь (48) для великих значень числа Бонда.

Як видно із таблиці 2, значення цих коефіцієнтів стабілізуються з ростом числа Бонда, тобто із зменшенням коефіцієнта поверхневого натягу при фіксованих значеннях розміру циліндра або із збільшенням розмірів циліндра при фіксованому значенні коефіцієнта поверхневого натягу.

Зауважимо, що при $b = \infty$, тобто при відсутності сил поверхневого натягу, маємо наступні величини власних значень задачі: $\lambda_1 = 1,750797574$, $\lambda_2 = 5,33119329$, $\lambda_3 = 8,53631571$.

Таблиця 2

n	$bond$	λ_n	μ_n	γ_n	χ_n	m_n
1	1000	1,751206	0,142441	0,249444	0,247909	0,431467
2	1000	5,434884	0,030608	0,166351	0,019648	0,012613
3	1000	9,045530	0,014232	0,128739	0,005900	0,002446
1	2000	1,750978	0,142173	0,248942	0,247788	0,431860
2	2000	5,382372	0,030417	0,163714	0,020009	0,013162
3	2000	8,786663	0,014121	0,124072	0,006328	0,002836
1	3000	1,750912	0,142081	0,248771	0,247742	0,431981
2	3000	5,365194	0,030344	0,162801	0,020121	0,013342
3	3000	8,702236	0,014072	0,122456	0,006474	0,002978
1	5000	1,750863	0,142006	0,248633	0,247703	0,432073
2	5000	5,351554	0,030282	0,162054	0,020206	0,013483
3	5000	8,635448	0,014026	0,121120	0,006588	0,003094
1	7000	1,750844	0,141973	0,248573	0,247685	0,432110
2	7000	5,345731	0,030254	0,161727	0,020240	0,013541
3	7000	8,607018	0,014004	0,120536	0,006635	0,003143
1	10000	1,750829	0,141948	0,248527	0,247672	0,432138
2	10000	5,341370	0,030232	0,161480	0,020265	0,013584
3	10000	8,585767	0,013987	0,120090	0,006669	0,003180

5 Висновки

Вивчення динаміки тіла з порожниною, частково заповненною рідиною, при врахуванні масових сил та сил поверхневого натягу зв'язано з розглядом спеціальних крайових задач математичної фізики, в тому числі і сингулярно збурених, з малим параметром при старшій похідній.

Для побудови розв'язків таких задач ефективним виявилося застосовування різних аналітичних методів, а саме: асимптотичних, методу степеневих рядів та варіаційних методів. Те, що обчислені власні значення задачі при збільшенні числа Бонда прямують до власних значень задачі про коливання рідини без поверхневого натягу, підтверджує правильність проведених досліджень.

На основі побудованих значень коефіцієнтів рівнянь руху можна визначити кількісно вплив поверхневого натягу на динаміку тіла з рідиною.

[1] *Луковский И.А.* Определение динамических характеристик жидкости в подвижном сосуде, находящемся в условиях слабого гравитационного поля, методом разложения по собственным функциям // Матем. физика. — Киев: 1972. — Вып. 11. — С. 57–64.

[2] *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

[3] *Барняк М.Я.* Вариационные формулировки задачи о малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Динамика и устойчивость управляемых систем: Сб. статей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 74–83.

[4] *Барняк М.Я., Луковський І.О.* Побудова розв'язків крайових задач статики і динаміки капілярної рідини в циліндричній посудині // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **12**, № 1. — С. 68–81.