Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 36–52

УДК 532:595

Статика і динаміка капілярної рідини в конічній порожнині

О.М. Барняк

Національний технічний університет України "КПІ", Київ

Розроблено алгоритми побудови аналітичних розв'язків задачі визначення осесиметричної форми рівноваги вільної поверхні рідини в конічній посудині з урахуванням сил ваги і сил поверхневого натягу. Розв'язки задачі подано у вигляді степеневих рядів, а також у вигляді комбінації точного аналітичного розв'язку лінеаризованої задачі і степеневих рядів. Для побудови розв'язку задачі про власні коливання капілярної рідини застосовується варіаційний метод.

Разработаны алгоритмы построения аналитических решений задачи определения осесимметричной формы равновесия свободной поверхности жидкости в коническом сосуде с учетом сил тяжести и сил поверхностного натяжения. Решения задачи подано в виде степенных рядов, а также в виде комбинации точного аналитического решения линеаризированной задачи и степенных рядов. Для построения решений задачи о свободных колебаниях капиллярной жидкости применяется вариационный метод.

An algorithm for constructing analytical solutions of the axisymmetric capillary meniscus problem on in a conical tank is developed. The solutions are presented by the power series as well as a combination of an exact solution of a linearized problem and the power series. A variational method is employed for constructing the corresponding natural sloshing modes.

1 Вступ

Дослідження динаміки капілярної рідини (тобто такої, на яку діють крім масових також сили поверхневого натягу), як правило, починається з побудови розв'язку задачі гідростатики рідини в нерухомій порожнині.

Задача гідростатики є базовою при постановці і побудові конкретних розв'язків задач динаміки обмеженого об'єму рідини, а тому коротко зупинимося на побудові її аналітичних розв'язків. В даній роботі розроблено методику побудови аналітичних розв'язків задачі про форму рівноваги вільної поверхні рідини в конічній посудині. На основі побудованих розв'язків задачі гідростатики ставиться задача про малі власні коливання рідини відносно її стійкої рівноважної форми. Для побудови розв'язків цієї задачі використовується варіаційний метод. Для реалізації методу Рітца мінімізації відповідного функціоналу у випадку конічної посудини в якості координатних функцій використано спеціальні розв'язки рівняння Лапласа.

2 Статична форма рівноваги вільної поверхні рідини

Нижче розглянемо задачу гідростатики про форму вільної поверхні рідини в конічній посудині. Як відомо [1], визначення параметрично заданого рівняння твірної $r = r(s),\ z = z(s)$ осесиметричної вільної поверхні рідини зводиться до знаходження розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z'' = r'\left(bz + c - \frac{z'}{r}\right),\ r'^2 + z'^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

при відповідних крайових умовах, де $b = \dfrac{\rho g L^2}{\sigma}$ — число Бонда, ρ — густина рідини, σ — коефіцієнт поверхневого натягу на поверхні розділу рідина — газ, L — характерний лінійний розмір порожнини, в якості якого зручно вибрати радіус сфери R_0, s — довжина дуги кривої, $(') = \dfrac{d}{ds}$, c — константа, значення якої визначається в процесі побудови розв'язків задачі.

Для однозв'язної симетричної вільної поверхні рідини при $s = 0$, тобто в точці на осі симетрії, повинні виконуватися крайові умови

$$r = 0,\ r' = 1 \text{ при } s = 0. \tag{2}$$

Оскільки константа c залишається поки невизначеною, то без обмеження при $b \neq 0$ можна покласти $z(0) = 0$. Зауважимо, що при виписаних початкових умовах

$$r = 0,\ r' = 1,\ z = 0 \text{ при } s = 0 \tag{3}$$

константа c рівна подвоєній середній кривизні осесиметричної рівноважної вільної поверхні рідини в точці її перетину з віссю симетрії.

В точці перетину твірної вільної поверхні рідини з твірною твердої стінки порожнини повинна виконуватися умова Дюпре–Юнга

$$\sigma \cos \gamma = \sigma_1 - \sigma_2, \tag{4}$$

з якої визначається величина кута змочування γ. Тут σ_1 і σ_2 — коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях розділу тверда стінка–газ і рідина–тверда стінка відповідно. Крім виписаних вище крайових умов повинна виконуватися умова рівності об'єму рідини заданому.

Розглянемо спочатку спосіб побудови аналітичних розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (1) при початкових умовах (3).

Згідно з [2] подамо розв'язок цієї задачі у вигляді степеневих рядів

$$r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^{2k+1},\ z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^{2k}. \tag{5}$$

Крім того, покладемо $b_0 = c/b$.

Коефіцієнти a_k і b_k визначаємо рекурентним способом після підстановки виписаних вище рядів та ряду

$$bzr = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{2k+1}$$

в початкові умови (3) та рівняння (1):

$$a_0 = 1,\ b_0 = \frac{c}{b},\ c_k = b\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i},\ b_k = \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\frac{(2i+1)a_i c_{k-i-1}}{4k^2} - \frac{i b_i a_{k-i}}{k}\Big),$$
$$a_k = -\sum_{i=1}^{k}\frac{4i(k-i+1)b_i b_{k-i+1}}{4k+2} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(2i+1)(2k-2i+1)a_i a_{k-i}}{4k+2}. \tag{6}$$

В [3] показано, що розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) мають особливості в комплексній площині такого типу:

$$r(s) = -\frac{3}{b(s-p_j)},\ z = \frac{\pm 3i}{b(s-p_j)}, \tag{7}$$

де i — комплексна одиниця, p_j — точка комплексної площини в якій функції $r(s)$ і $z(s)$ мають особливості типу простого полюса.

Завдяки наявності особливостей в функціях $r(s)$ і $z(s)$ степеневі ряди (5) матимуть скінчений радіус збіжності.

Визначаючи величини

$$|a_k|^{-\frac{1}{2k+1}} \text{ та } |b_k|^{-\frac{1}{2k}},$$

зауважено, що вони прямують з ростом k до деякої границі, рівній радіусу збіжності цих рядів, який наближено визначаємо за наступною формулою:

$$R = \frac{1}{6}\sum_{j=N-2}^{N}\left(|a_j|^{\frac{1}{2j+1}} + |b_j|^{\frac{1}{2j}}\right). \tag{8}$$

Враховуючи в формулах (5) по 30 членів рядів, можна на основі цих формул обчислити значення функцій $r(s)$ і $z(s)$ та їх похідних, при $s < 0,45R$, з точністю до 10^{-12}.

Для обчислення функцій $r(s)$ і $z(s)$ та їх похідних для більших значень s використовуємо аналітичне продовження рядів у вигляді

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}(s-s_i)^k,\ z = \sum_{k=0}^{\infty} b_{i,k}(s-s_i)^k,\ \ i = 1, 2, ..., \tag{9}$$

де $s_1 = 0,45R_i,\ s_{i+1} = s_i + 0,4R_i,\ i \geq 2$,
$R_i = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{j=N-2}^{N}\left(|a_j|^{\frac{1}{j}} + |b_j|^{\frac{1}{j}}\right),\ N \geq 40$ — наближене значення радіуса збіжності рядів (9).

Коефіцієнти $a_{i,k}$ і $b_{i,k}$ виписаних вище степеневих рядів обчислюються згідно наступних рекурентних формул:

$$a_{1,0} = \sum_{k=0}^{N} a_k s_1^{2k+1},\ b_{1,0} = \sum_{k=0}^{N} b_k {s_1}^{2k},\ a_{1,1} = \sum_{k=0}^{N} a_k(2k+1)s_1^{2k},$$

$$b_{1,1} = \sum_{k=1}^{N} 2kb_k s_1^{2k-1},\ a_{i,0} = \sum_{k=0}^{N_1} a_{i-1,k}s_i^k,\ N = 30,\ N_1 = 40, \tag{10}$$

$$b_{i,0} = \sum_{k=0}^{N_1} b_{i-1},ks_i^k,\ a_{i,1} = \sum_{k=1}^{N_1} ka_{i-1,k}s_1^{k-1},\ b_{i,1} = \sum_{k=1}^{N_1} kb_{i-1,k}s_1^{k-1}.$$

Наступні коефіцієнти $a_{i,k},\ b_{i,k}$ і $c_{i,k}$ в степеневому ряді

$$bzr = \sum_{k=0}^{N_1} c_{i,k}(s-s_i)^k$$

визначаються за допомогою рекурентних формул

$$d_1 = 1,\ d_k = 0\ (k>1),\ c_{m,k-1} = b\sum_{i=0}^{k-1} a_{m,i}b_{m,k-i-1},$$

$$b_{m,k+1} = \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\Big(\frac{a_{m,i+1}c_{m,k-i-1}}{k(k+1)a_{m,0}} - \frac{b_{m,i+1}a_{m,k-i}}{(k+1)a_{m,0}}\Big), \tag{11}$$

$$a_{m,k+1} = \frac{d_k}{2a_{m,0}} - \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\Big(\frac{b_{m,i+1}c_{m,k-i-1}}{k(k+1)a_{m,0}} + \frac{a_{m,i+1}a_{m,k-i}}{(k+1)a_{m,0}}\Big).$$

Швидкість збіжності рядів (5) і (8) залежить від величини числа Бонда та початкових значень z_0 в умові (4).

3 Побудова форми вільної поверхні рідини в порожнині конічної форми

Алгоритм побудови сім'ї рівноважних вільних поверхонь рідини в посудині конкретної геометричної форми зводиться до побудови сім'ї розв'язків задачі Коші та знаходження точки перетину побудованої кривої з твірною конкретної області, що має форму поверхні обертання.

Між сімейством вільних поверхонь для даної форми порожнини (при різних об'ємах заповнення її рідиною) і сімейством розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) при початкових умовах (3) та при різних значеннях константи c можна встановити (в загальному випадку неоднозначну) відповідність. Довільній осесиметричній вільній поверхні рідини буде відповідати деяке значення константи c, яке рівне подвоєній середній кривизні поверхні Σ в точці $(r=0,\ z=0)$. Обернене твердження може бути невірним.

Розглянемо таку задачу. Нехай рідина густини ρ частково, на висоту h, заповнює конічну порожнину, твірна якої задається рівнянням

$$z = h(\frac{r}{r_0} - 1).$$

Тут r_0 — радіус плоскої вільної поверхні рідини, яка встановилася б під дією сили земного тяжіння при відсутності сил поверхневого натягу. Її об'єм

$$V_0 = \frac{\pi h r_0^2}{3}. \tag{12}$$

Потрібно визначити форму вільної поверхні цього ж об'єму рідини, на яку діють визначені вище сили поверхневого натягу в цій самій конічній порожнині.

Зафіксуємо значення константи c та визначимо розв'язок $r(s),\ z(s)$ задачі Коші при початкових умовах (3). Функція $z(s)$ визначається з точністю до константи $z(s) = c_1 + z(s)$, тобто крива сімейства може бути перенесена вертикально, і цей перенос потрібно здійснити таким способом, щоб задана крива перетнулася з твірною конуса (тобто прямою) під заданим кутом γ. Знайдемо це значення параметра $s = s_1$, при якому відбудеться такий перетин.

Цю умову можна записати у вигляді

$$r'(s_1) = \cos\beta = \sin(\alpha + \gamma), \tag{13}$$

де $\alpha = \arctan\dfrac{r_0}{h}$ — кут розхилу конуса, β — кут нахилу дотичної до твірної Γ вільної поверхні Σ. Зокрема, при $\gamma = 0$ — це випадок, коли твірні L і Γ дотикаються. За допомогою будь-якого ітераційного методу знаходимо те значення дуги $s = s_1$, при якому (для заданного значення константи c) криві L і Γ перетнуться під заданим кутом γ.

Нехай $z'(s_1) > 0$, тобто вільна поверхня знаходиться під площиною $z = z(s_1)$. Знаходимо значення $r_1 = r(s_1)$. Тоді об'єм газу і рідини, які заповнюють конус під площиною $z = z(s_1)$, рівний

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 (h + z(s_1)).$$

Об'єм газу між площиною $z = z(s_1)$ і вільною поверхнею рідини рівний

$$V_2 = 2\pi \int_0^{s_1} r(z(s_1) - z(s))dr = -\frac{2\pi}{b}\int_0^{s_1} r(bz(s) + c)dr +$$
$$+\frac{2\pi}{b}\int_0^{s_1} r(s)r'(s)(bz(s_1) + c)ds =$$
$$= -\frac{2\pi}{b} r(s_1)z'(s_1) + \frac{\pi}{b}(bz(s_1) + \frac{c}{b})r(s_1)^2.$$

Таким чином, із рівності

$$V_0 = V_1 - V_2$$

одержимо рівняння для визначення шуканого значення константи c, а отже і форми рівноважної поверхні.

Якщо $z'(s_1) < 0$, тобто вільна поверхня знаходиться над площиною $z = z(s_1)$, тоді об'єм капілярної рідини, при $b \neq 0$, треба обчислювати наступним чином:

$$V_0 = V_1 + V_2,$$

де

$$V_2 = \frac{2\pi}{b} r(s_1) z'(s_1) - \frac{\pi}{b}(bz(s_1) + c) r(s_1)^2.$$

Підставляючи в праву частину виведених вище формул значення об'єму рідини (12), одержуємо рівняння для визначення значення константи c.

Зауважимо, що описаний вище спосіб побудови розв'язків задачі може бути успішно реалізований при не дуже великих значеннях числа Бонда. При $b > 500$ та при середніх значеннях висоти h значення кривизни вільної поверхні рідини в її центрі дуже мале, тобто $c < 10^{-20}$, при цьому вільна поверхня рідини має характер примежевого шару, а сама задача з малим параметром при старшій похідній належить до класу сингулярно-збурених задач.

Для побудови розв'язків задачі при $b > 500$ застосуємо наступний спосіб: кут між дотичною до твірної Γ і віссю r неперервно змінюється від нуля до деякої величини. При деякому значенні $r = r_\epsilon$ він приймає значення ϵ, тобто $\dfrac{dz}{dr} = \dfrac{z'}{r'} = \epsilon$ при $r = r_\epsilon$. Нехай значення ϵ достатньо мала величина, тоді на відрізку $[0, \epsilon]$ функцію $z = z(r)$ можна визначити на основі варіаційної постановки задачі в її лінійній постановці. Функція $z = z(r)$ надає мінімальне значення функціоналу

$$F(z) = \int_0^{r_\epsilon} r\sqrt{1 + (\frac{dz}{dr})^2} dr + \frac{b}{2}\int_0^{r_\epsilon} rz^2 dr + \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}} r_\epsilon z(r_\epsilon). \qquad (14)$$

Внаслідок малості значення ϵ, функціонал $F(z)$ можна подати наступним чином:

$$F_1(z) = \int_0^{r_\epsilon} r\Big(1 + \frac{1}{2}(\frac{dz}{dr})^2\Big) dr + \frac{b}{2}\int_0^{r_\epsilon} rz^2 dr + \epsilon r_\epsilon z(r_\epsilon). \qquad (15)$$

Оцінимо похибку при такій заміні функціоналу $F(z)$ на $F_1(z)$:

$$F_1(z)-F(z)=\int_0^{r_\epsilon} r\Big(\sqrt{\Big(1+\frac{1}{2}(\frac{dz}{dr})^2\Big)^2}-\sqrt{1+(\frac{dz}{dr})^2}\Big)dr=$$

$$=\int_0^{r_\epsilon}\frac{r\big(\frac{dz}{dr}\big)^4 dr}{4\Big(\sqrt{\Big(1+\frac{1}{2}(\frac{dz}{dr})^2\Big)^2}+\sqrt{1+(\frac{dz}{dr})^2}\Big)}<\frac{\epsilon^4 r_\epsilon^2}{16}.$$

Враховуючи, що $r_\epsilon<1$, маємо: при $\epsilon\le 10^{-3}$ похибка не перевищує 10^{-13}.

Мінімум функціонала $F_1(z)$ на класі інтегровних з квадратом на відрізку $[0,\epsilon]$ разом з першою похідною функцій, які задовольняють умову

$$\frac{dz}{dr}=\epsilon \text{ при } r=r_\epsilon, \tag{16}$$

надає функція

$$f(r)=\frac{\epsilon I_0(\sqrt{b}r)}{\sqrt{b}I_1(\sqrt{b}r_\epsilon)}.$$

Визначимо значення довжини дуги цього її відрізка

$$s_\epsilon=\int_0^{r_\epsilon}\sqrt{1+f'^2}dr=\epsilon\int_0^{r_\epsilon}\Big(1+\frac{1}{2}\Big(\frac{I_1(\sqrt{b}r}{I_1(\sqrt{b}r_\epsilon)}\Big)^2\Big)dr=$$

$$=\epsilon+\frac{1}{2\sqrt{b}}\int_0^{\sqrt{b}r_\epsilon}\Big(\frac{I_1(t)}{I_1(\sqrt{b}r_\epsilon)}\Big)^2dt. \tag{17}$$

Цікава сама по собі функція

$$\psi(t)=\int_0^t\Big(\frac{I_1(x)}{I_1(t)}\Big)^2dx.$$

Вона визначена для довільних дійсних значень t, зростає на інтервалі $(0;4{,}018)$, приймає максимальне значення при $t=4,018\,(\psi(4,018)=0,55051672)$, далі спадає, прямуючи до значення $\frac{1}{2}$ при $t\to\infty$ $\big(\lim_{t\to\infty}\psi(t)=\frac{1}{2}\big)$. При великих значеннях числа b другий доданок в (17) дуже малий і можна вважати, що $s_\epsilon=r_\epsilon$. Використання явного подання для твірної вільної поверхні на відрізку $[0,r_\epsilon]$ у вигляді

$z = z(r)$ і подання на відрізку $[r_\epsilon, 1]$ рівняння лінії Γ в параметричному вигляді роблять не суттєвим визначення початкового значення параметру, тобто не потрібно визначати довжини дуги s_ϵ.

Далі, задаючи початкові умови

$$r' = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, \quad z' = \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, \quad z = f(r_\epsilon), \quad r = r_\epsilon \text{ при } s = s_\epsilon, \tag{18}$$

використовуємо подання розв'язку задачі у вигляді (9). При цьому величини ϵ і r_ϵ виступають в якості визначальних параметрів відповідної вільної поверхні.

4 Власні коливання капілярної ідеальної рідини

Малі вільні коливання ідеальної нестисливої рідини, яка частково заповнює порожнину нерухомого твердого тіла, під дією сил ваги і сил поверхневого натягу, як відомо із [1], описуються наступною системою рівнянь і крайових умов:

$$\begin{gathered}\triangle\varphi = 0 \text{ в } \Omega,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ на } \Sigma, \\ BN \equiv g\big[\frac{1}{b}\big(k_1^2 + k_2^2 + \triangle_\Sigma\big) + \cos(n,z)\big]N + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + c = 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial N}{\partial\nu} + \mu N = 0 \text{ на } l,\ \int_\Sigma \varphi dS = 0, \int_\Sigma N dS = 0\end{gathered} \tag{19}$$

при початкових умовах $\varphi(z,r,\eta,0) = \varphi_0(z,r,\eta)$, $\quad N(s,\eta,0) = N_0(s,\eta)$, де (z,r,η) — циліндричні координати, звязані з віссю симетрії порожнини.

Тут Ω — область заповнена рідиною, S — тверда стінка порожнини, Σ — вільна поверхня рідини, n — зовнішня, по відношенню до Ω, нормаль до $S+\Sigma$, l — лінія перетину S і Σ, k_1 і k_2 —головні кривизни поверхні Σ, $\triangle_\Sigma N \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial s}\big(r\dfrac{\partial N}{\partial s}\big) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 N}{\partial s^2}$ — оператор Бельтрамі–Лапласа для поверхні Σ, який приймає таку форму для поверхні обертання відносно вертикальної осі, де $\mu = \dfrac{k_\sigma\cos(\gamma) - k_s}{\sin(\gamma)}$, k_s і k_σ — кривизни перерізів поверхонь S і Σ площиною, перпендикулярною до l в точці їхнього перетину, ν — зовнішня по відношенню до Σ нормаль до l в площині, дотичній до Σ, що в даному випадку співпадає з s, b — число Бонда.

Власні або нормальні коливання рідини описуються функціями $\varphi(r,z,\eta,t)$ і $N(s,\eta,t)$ наступного вигляду:

$$\varphi(r,z,\eta,t) = g^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} \widehat{\varphi}(r,z,\eta)\cos(\omega t), \quad N(s,\eta,t) = \widehat{N}(s,\eta)\sin(\omega t), \tag{20}$$

де ω — частота власних коливань рідини, L — характерний лінійний розмір області.

Тут $\widehat{\varphi}(r,z,\eta)$ і $\widehat{N}(s,\eta)$ безрозмірні функції, для визначення яких одержуємо наступну спектральну задачу:

$$\begin{gathered}
\triangle\varphi = 0 \text{ в } \Omega,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \kappa N \text{ на } \Sigma,\\
\big[-\frac{1}{b}\triangle_\Sigma + a\big]N + \frac{1}{mes\Sigma}\int_\Sigma \big(\frac{1}{b}\triangle_\Sigma - a\big)NdS = \kappa\varphi \text{ на } \Sigma,\\
\frac{\partial N}{\partial\nu} + \mu N = 0 \text{ на } l,\ \int_\Sigma \varphi dS = 0, \int_\Sigma NdS = 0,
\end{gathered} \tag{21}$$

де $a = -\dfrac{1}{b}(k_1^2 + k_2^2) + \cos(n,z)$.

Тут всі величини безрозмірні, геометричні лінійні розміри віднесені до характерного лінійного розміру L. При цьому позначку тильду для зручності запису опускаємо. Безрозмірний частотний параметр $\kappa = \omega L^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$.

Розглянемо на класі гармонічних в області Ω функцій, які задовольняють умову $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на S, оператор Неймана A, який ставить у відповідність значенню функції φ на Σ значення її нормальної похідної $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на Σ. Розглянемо також оператор B на Σ:

$$BN \equiv \big[-\frac{1}{b}\triangle_\Sigma + a\big]N + \frac{1}{mes\Sigma}\int_\Sigma \big(\frac{1}{b}\triangle_\Sigma - a\big)NdS, \tag{22}$$

який діє на класі двічі неперервно диференційованих функцій $N(s,\eta)$, що задовольняють умови

$$\frac{\partial N}{\partial\nu} + \mu N = 0 \text{ на } l,\ (N = 0 \text{ у випадку } \gamma = 0 \text{ або } \gamma = \pi), \int_\Sigma NdS = 0. \tag{23}$$

Припускаємо, що оператор B — додатно визначений, тобто статична вільна поверхня рідини стійка.

Тоді задача (22) приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ N \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ N \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Позначимо через Φ вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} \varphi \\ N \end{pmatrix}$, а симетричний додатно визначений оператор $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ через T, який є таким внаслідок того, що складові оператори A і B мають такі ж властивості. Оператор $C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ самоспряжений і унітарний. Тоді задача (24) запишеться у вигляді

$$T\Phi = \kappa C\Phi.$$

Зауважимо деякі очевидні властивості розв'язків задачі (24). Якщо вектор-функція $\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ N_i \end{pmatrix}$ і відповідне їй значення κ_i є розв'язком задачі (24), тоді вектор-функція $\Phi_i^- = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ -N_i \end{pmatrix}$ і відповідне їй значення $-\kappa_i$ також є розв'язком цієї ж задачі. Згідно формули (20) вектор-функції Φ_i і Φ_i^- породжують один і той самий розв'язок системи рівнянь і крайових умов (19).

Як показано в роботі [5], справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Найменше по модулю власне значення задачі (24) визначається як мінімум абсолютної величини функціоналу*

$$K(\Phi) = \frac{(T\Phi, \Phi^*)}{(C(\Phi, \Phi^*)} = K\begin{pmatrix} \varphi \\ N \end{pmatrix} = \frac{(A\varphi, \varphi) + (BN, N)}{2\int_\Sigma N\varphi dS} = \tag{25}$$

$$= \frac{\int_\Omega (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_\Sigma \big(\frac{1}{b}\nabla_\Sigma(N, N) + aN^2\big)dS + \frac{\mu}{b}\int_l N^2 dl}{2\int_\Sigma N\varphi dS}$$

на класі гармонічних в Ω функцій $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ і функцій $N \in W_2^1(\Sigma)$, які задовольняють умови

$$\int_\Sigma \varphi dS = 0, \int_\Sigma N dS = 0,$$

а у випадку рівності кута змочування γ величині 0 або π — також умову $N = 0$ на l.

Тут:

$$\nabla_\Sigma(N,N_1)\equiv\frac{\partial N}{\partial s}\frac{\partial N_1}{\partial s}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial N}{\partial \eta}\frac{\partial N_1}{\partial \eta},\ \Phi^*=(\varphi,N)$$

— вектор-рядок, $(u,v)=\int_\Sigma uvdS$. *Наступне додатне* n*-е власне значення задачі (24) визначається як мінімум абсолютної величини функціонала (25) на класі гармонічних в* Ω *функцій* $\varphi\in W_2^1(\Omega)$ *і функцій* $N\in W_2^1(\Sigma)$, *які задовольняють умови*

$$\int_\Sigma \varphi N_i dS=0,\int_\Sigma N\varphi_i dS=0,\ i=1,2,...,n-1.$$

Тут φ_i *і* N_i *— власні функції функції задачі (22).*

Для областей, які мають форму тіла обертання, функції $\varphi(r,z,\eta)$ і $N(s,\eta)$ можна подати у вигляді

$$\varphi(r,z,\eta)=\varphi_m(r,z)\cos(m\eta),\ N(s,\eta)=N_m(s)\sin(m\eta),\ m=0,1,\dots . \tag{26}$$

Функції $\varphi_m(r,z)$ і $N_m(s)$ є розв'язками наступних спектральних крайових задач в меридіанному перерізі G області Ω :

$$\begin{aligned}
A_m\varphi_m &\equiv -\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi_m}{\partial r})-r\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z^2}+\frac{m^2}{r}\varphi_m=0 \text{ в } G,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial n}=0 \text{ на } L,\\
B_mN_m &\equiv \frac{1}{b}\Big[-\frac{d}{ds}(r\frac{dN_m}{ds})+\Big(\frac{m^2}{r}-\frac{z'^2}{r}-r(r'')^2-r(z'')^2\Big)N_m\Big]+\\
+rr'N_m &= \sqrt{\lambda}r\varphi_m,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial n}=\sqrt{\lambda}N_m \text{ на } L\quad (m=1,2,...), \qquad (27)\\
A_0\varphi_0 &\equiv -\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi_0}{\partial r})-r\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}=0 \text{ в } G,\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=0 \text{ на } L,\\
B_0N_0 &\equiv \frac{1}{b}\Big[-\frac{d}{ds}(r\frac{dN_0}{ds})+\Big(-\frac{z'^2}{r}-r(r'')^2-r(z'')^2\Big)N_0\Big]+\\
+rr'N_0 &= \sqrt{\lambda}r\varphi_0+c,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial n}=\sqrt{\lambda}N_m \text{ на } L,\ \int_0^{s_1} rN_0ds=0.
\end{aligned}$$

Тут введено такі безрозмірні величини: $\lambda=\dfrac{\omega^2L}{g}$, $b=\dfrac{\rho gL^2}{\sigma}$. Лінійні розміри r,z,N_m віднесені до характерного лінійного розміру L. Для побудови розв'язків виписаних вище спектральних задач (27) застосуємо варіаційний метод, в основу якого покладено вище сформульовану теорему 1, яка тут формулюється наступним чином.

Теорема 2. *Найменше по модулю власне значення задачі (27) визначається як мінімальне значення абсолютної величини функціонала*

$$K_m(\varphi_m, N) = \tag{28}$$

$$= \frac{\int_{L+\Gamma} r\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds + \frac{1}{b} \int_0^{s_1} \Big(r\Big(\frac{dN}{ds}\Big)^2 + a_m(s) r N^2 \Big) ds + \frac{\mu}{b} r(s_1) N^2(s_1)}{2 \int_0^{s_1} r\varphi N ds,}$$

на класі інтегровних з квадратом разом з першими частинними похідними з вагою r *по області* G *функцій* $\varphi_m \in W^1_{2,r}(G)$, $N \in W^1_{2,r}(\Gamma)$, *які задовольняють рівняння* $A_m \varphi_m = 0$, *де* $a_m(s) = \dfrac{m^2}{r^2} - \dfrac{(z')^2}{r^2} - (r'')^2 - (z'')^2 + br'$.

Для мінімізації функціоналу застосуємо метод Рітца, згідно якого апроксимуємо шуканий розв'язок задачі скінченними сумами

$$\varphi(r,z) = \sum_{i=1}^{M}, a_i w_i^m(r,z), \quad N(s) = \sum_{i=1}^{M_1} f_i(s), \tag{29}$$

де $\Big\{ w_i^m(r,z) \Big\}_{i=1}^{\infty}$ — система функцій, які задовольняють рівняння $A_m \varphi_m = 0$ та володіють відповідними властивостями повноти в підпросторі розв'язків рівняння із $W^1_{2,r}(G)$. Відповідно $\Big\{ f_i(s) \Big\}_{i=1}^{\infty}$ - система функцій, повна в $W^1_{2,r}(\Gamma)$. В якості координатних функцій $w_i^m(r,z)$, при великих значеннях глибини рідини, вибиралися функції $w_i^{m,*}(r,z)$, взяті із [6].

Для визначення коефіцієнтів a_i і b_i одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{M} \alpha_{i,j} a_j - \sqrt{\lambda} \sum\limits_{j=1}^{M_1} \gamma_{i,j} b_j = 0, \ (i = 1, ..M), \\ \sum\limits_{j=1}^{M} \gamma_{j,i} a_j - \sqrt{\lambda} \sum\limits_{j=1}^{M_1} \beta_{i,j} b_j = 0, \ (i = 1, ..M_1), \end{array} \tag{30}$$

де

$$\alpha_{i,j} = \int_{L+\Gamma} r w_i^m \frac{\partial w_j^m}{\partial \nu} ds, \quad \gamma_{i,j} = \int_{\Gamma} r w_i^m f_j ds,$$

$$\beta_{i,j} = \int_{\Gamma} \frac{1}{b} \Big(r \frac{df_i}{ds} \frac{df_j}{ds} + r a_m f_i f_j \Big) ds + \frac{\mu}{b} r(s_1) f_i(s_1) f_j(s_1).$$

Вводячи позначення для матриць коефіцієнтів

$$A = (\alpha_{i,j}),\ B = (\beta_{i,j}),\ C = (\gamma_{i,j}),$$

запишемо задачу (30) у вигляді

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Тут C^* — транспонована до C матриця, X і Y — вектор-стовпчики коефіцієтів a_i і b_i.

В якості функцій $w_i^m(r,z)$ вибиралися гармонічні многочлени, а в якості функцій $f_i(s)$ вибиралися многочлени Якобі $f_i(s) = P_i(0, 2m + 1, 2\dfrac{r(s)}{r(s_1)} - 1)$. Внаслідок лінійної незалежності координатних функцій $w_i^m(r,z)$ і $f_i(s)$ матриці A і B невироджені, завдяки чому задачу (31) можна звести до одного з наступних видів:

$$(A - \lambda C B^{-1} C^*) X = 0, \tag{32}$$

або

$$(B - \lambda C^* A^{-1} C) Y = 0. \tag{33}$$

Власні коливання "важкої" рідини, тобто такої рідини, коли сили поверхневого натягу рівні нулю і вільна поверхня рідини плоска, описуються наступною спектральною задачею:

$$A_m \varphi_m = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = \lambda \varphi_m \text{ на } \Gamma. \tag{34}$$

Ця задача може бути одержана із задачі (27), якщо в останній покласти $b = \infty$, а $r' = 1$.

В таблиці 1 наведено результати розрахунку перших чотирьох власних значень виписаної вище задачі, при різних значеннях числа Бонда для конічної області з кутом розхилу $\alpha = \pi/6$. Кут змочування $\gamma = \pi/36$ в таблиці 1, $\gamma = \pi/18$ в таблиці 2, $\gamma = \pi/12$ в таблиці 3. В нижньому рядку наведені власні значення задачі, яка описує власні коливання "важкої" рідини. Розв'язок задачі гідростатики знайдено за допомогою методу спряження асимптотичного розв'язку задачі та степеневих рядів.

Таблиця 1 ($\gamma = 5$ градусів).

bond	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
20	0,609597	9,453403	36,151223	92,121326
50	0,691587	6,184431	19,041832	43,502817
100	0,782444	5,004812	13,067562	26,732191
200	0,883236	4,441610	10,069080	18,400322
300	0,942601	4,290944	9,081697	15,662940
500	1,014493	4,228407	8,315480	13,511227
1000	1,102167	4,300921	7,813216	11,954001
2000	1,173245	4,466621	7,685042	11,272604
3000	1,206618	4,580155	7,736180	11,118262
5000	1,239072	4,697760	7,835930	11,077958
7000	1,255444	4,758686	7,906370	11,109851
10000	1,269127	4,809606	7,974776	11,158030
∞	1,304395	4,922743	8,136619	11,309414

Таблиця 2 ($\gamma = 10$ градусів).

bond	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
20	0,750086	10,593463	39,356108	99,279423
50	0,812989	6,702616	20,107393	45,581673
100	0,890980	5,361693	13,605046	27,631981
200	0,975939	4,732558	10,403352	18,860608
300	1,024162	4,558633	9,361244	16,009265
500	1,080423	4,467525	8,556191	13,771830
1000	1,146096	4,487210	8,018322	12,152306
2000	1,198641	4,590438	7,854710	11,436287
3000	1,223453	4,661675	7,859229	11,256006
5000	1,248942	4,745667	7,918513	11,181177
7000	1,262320	4,791307	7,966320	11,183641
10000	1,273823	4,830629	8,014524	11,209056
∞	1,304395	4,922743	8,136619	11,309414

Таблиця 3 ($\gamma = 15$ градусів)

bond	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
20	0,884432	11,439296	41,488356	103,686546
50	0,923348	7,096036	20,824763	46,845736
100	0,985615	5,643458	13,990481	28,210852
200	1,053944	4,967793	10,664695	19,189441
300	1,091974	4,776073	9,589957	16,264052
500	1,135324	4,662145	8,761773	13,981707
1000	1,184445	4,642103	8,200731	12,342937
2000	1,222790	4,695323	8,000418	11,593253
3000	1,240918	4,737098	7,970740	11,167209
5000	1,260070	4,792196	7,994519	11,283047
7000	1,270568	4,825711	8,026074	11,265400
10000	1,279685	4,853778	8,055013	11,270566
∞	1,304395	4,922743	8,136619	11,309414

5 Висновки

Як видно із наведених вище числових результатів власні значення задачі при збільшенні числа Бонда збільшуються і прямують до власних значень задачі (34), хоча і не перевершують цих величин [7]. Це можна пояснити ефектом розтікання рідини по стінці конічної посудини і значним збільшенням площі вільної поверхні рідини при невеликих значеннях числа Бонда. Зауважимо, що наведині чисельні дані одержано при одному і тому самому об'ємі рідини.

[1] *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости.— М.: Наука, 1976. — 504 с.

[2] *Барняк М.Я.* Определение формы равновесия свободной поверхности жидкости в сосуде, находящемся в слабом гравитационном поле // Труды семинара по дифференциальным уравнениям. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. — С. 166–175.

[3] *Барняк М.Я., Тимоха А.Н.* О нахождении приближенно-аналитических решений плоской и осесимметричной односвязной капиллярных задач в виде рациональных функций // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 48–56.

[4] *Черноусько Ф.Л., Банничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.

[5] *Барняк М.Я.* Вариационные формулировки задачи о малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Динамика и устойчивость управляемых систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 74–83.

[6] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.

[7] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка, 2010.— 407 с.