Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 53–64

УДК 517.93

Перетворення неперервних та дискретних моделей лінійних динамічних систем *

М.О. Зінчук, В.В Новицький

Інститут математики НАН України, Київ; novyc@imath.kiev.ua

Для дискретної лінійної системи з дійсною матрицею коефіцієнтів, яка має непарну кількість елементарних дільників, що відповідають від'ємним характеристичним числам, отримано неперервний аналог з дійсною матрицею коефіцієнтів. Наведено приклад такого перетворення.

Для дискретной линейной системы с вещественной матрицей коэффициентов, которая имеет нечетное число элементарных делителей, отвечающих отрицательным характеристическим числам, получено непрерывный аналог с вещественной матрицей коэффициентов. Приведен пример такого преобразования.

For a discrete linear system with a real coefficients matrix which has an add number of elementary divisor responsible for negative characteristic numbers, a continuous analogy with a real matrix is obtained. An example of the corresponding transformation is given.

1 Вступ

В сучасній економіці виникає задача отримання з дискретних моделей неперервні, які дають можливість ефективніше досліджувати економічну динаміку [1]. Задача переходу від дискретного (різницевого) скалярного однорідного рівняння n-го порядку з дійсними коефіцієнтами, характеристичний многочлен якого має дійсні від'ємні корені,

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

до диференціального скалярного однорідного рівняння (неперервного аналога) з дійсними коефіцієнтами розв'язана в [2]. До цього вважалося [1, 3], що такий клас дискретних рівнянь не має неперервних аналогів.

Розкриємо суть задачі для однорідних рівнянь, яка тісно пов'язана із задачею для систем в матричному вигляді. З фундаментальних розв'язків обох рівнянь [4, 5] випливає, що для збігу розв'язків дискретного і диференціального скалярних однорідних рівнянь необхідно, щоб корені характеристичного многочлена другого рівняння були логарифмами коренів характеристичного многочлена першого рівняння. Взаємозв'язок між обома характеристичними многочленами наведено в [6].

Характеристичний многочлен різницевого рівняння з дійсними коефіцієнтами може мати дійсні і комплексно-спряжені корені. Якщо присутні дійсні від'ємні корені, то перехід до неперервного аналогу призводить до нескінченної множини однорідних диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами, оскільки логарифм від'ємного числа є комплекснозначна (багатозначна) функція [7]. Щоб позбутися множинності рівнянь, можна брати окремі гілки логарифмів від'ємних коренів, але і для них, на жаль, будуть відсутні комплексно-спряжені корені, що призведе до характеристичного многочлена з комплексними коефіцієнтами. Навіть, коли кожний від'ємний корінь повторюється парне число разів, ми не можемо замінити пари однакових від'ємних коренів комплексно-спряженими, оскільки цим зменшимо кратність відповідних коренів характеристичного многочлена однорідного диференціального рівняння, що випливає з представлення системи його фундаментальних роз'язків [5]. З іншого боку, якщо представити диференціальне рівняння в еквівалентній матричній формі Фробеніуса, то така заміна призведе до розщеплення відповідного елементарного дільника (матриця Фробеніуса на кожне власне значення має тільки один елементарний дільник [7]). Цього можна уникнути, якщо замінити кожний дійсний від'ємний корінь характеристичного многочлена однорідного дискретного рівняння двома комплексно-спряженими, перейшовши до однорідного диференціального рівняння вищого порядку [2]. Розв'язки обох рівнянь збігаються в дискректних точках $t = k = 0, 1, 2, \dots$.

Відзначимо, що в [8] доведена обернена до теореми з [2] теорема, тобто описано випадки зменшення розмірності системи при переході від диференціального однорідного рівняння з дійсними коефіцієнтами до дискретного однорідного рівняння з дійсними коефіцієнтами.

Для систем у матричному вигляді перехід від дискретної до неперервної системи потребує обчислення логарифма матриці [3]. Для дійсної невиродженої матриці існує дійсний логарифм тоді і тільки тоді, коли у вихідної матриці або зовсім немає елементарних дільників, що відповідають від'ємним характеристичним числам, або кожний такий елементарний дільник повторюється парне число разів [7]. Грунтуючись на цьому, у випадку отримання неперервної передаточної функції із дискретної системи, в [9] пропонується розглядати розширену матрицю $\bar{F} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$ і ставити у відповідність двом дійсним від'ємним кореням комплексно-спряжені. Тут F — матриця коефіцієнтів дискретної системи. При такому підході, очевидно, розмір системи зростає вдвічі.

Нижче буде показано, що достатньо збільшити розмір неперервної системи на суму степеней елементарних дільників (по одному дільнику на кожне характеристичне число) дискретної системи, які відповідають різним від'ємним характеристичним числам і повторюються непарне число разів. В цьому випадку вектор стану дискретної системи збігається з частиною вектору стану неперервної системи в дискретні моменти часу.

2 Формування розширеної матриці коефіцієнтів неперервної системи

Розглянемо лінійну дискретну систему

$$x(k+1) = Fx(k), \quad \mathrm{det}F \neq 0, \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots , \tag{1}$$

де $x = [x_1, \dots , x_n]^T \in \Re_n$ — вектор стану, а дійсна невироджена матриця коефіцієнтів $F \in \Re_{n\times n}$ має елементарні дільники, які повторюються непарне число разів і відповідають дійсним від'ємним характеристичним числам, x_0 — вектор початкового стану.

Також розглянемо неперервну систему

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = z_0, \quad m \geq n, \tag{2}$$

де $z = [z_1, \dots , z_m]^T \in \Re_m$ — вектор стану, z_0 — вектор початкового стану, а $A \in \Re_{m\times m}$ — дійсна матриця коефіцієнтів.

Необхідно знайти умови на матрицю A, при яких частина вектора стану $z(t)$ збігається з вектором $x(k)$ в дискретні моменти часу $t = k = 0, 1, 2, \dots$. Про можливість побудови такої неперервної системи (2) дає наступне твердження.

Теорема 2.1 *Нехай задана дискретна система* (1) *з матрицею коефіцієнтів, що має r елементарних дільників*

$$(\mu - \mu_{i_1})^{p_{i_1}}, (\mu - \mu_{i_2})^{p_{i_2}}, \dots, (\mu - \mu_{i_r})^{p_{i_r}}, \quad \mu_j \neq \mu_l,\ j \neq l, \qquad (3)$$

кожний з яких повторюється непарне число разів і відповідає дійсному від'ємному характеристичному числу.

Тоді можна побудувати неперервну систему (2) *з матрицею коефіцієнтів $A \in \Re_{m\times m}$, $m = n + \sum_{j=1}^{r} p_{i_j}$ і вектором стану $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $z_1 \in \Re_{m-n}$, $z_2 \in \Re_n$ з початковими умовами: $z_1(0)$ — довільний вектор, $z_2(0) = x(0)$, таку, що виконується тотожність $z_2(k) \equiv x(k)$, $k = 1, 2, \dots$.*

Доведення. При доведенні теореми будемо спиратися на підхід отримання дійсного логарифма матриці, яка має елементарні дільники, що повторюються парне число разів і відповідають від'ємним характеристичним числам [7].

Нехай невироджена матриця F має елементарні дільники

$$\begin{gathered}(\mu - \mu_1)^{p_1}, (\mu - \mu_2)^{p_2}, \dots, (\mu - \mu_s)^{p_s}, \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_s = n.\end{gathered} \qquad (4)$$

Вважаємо, що елементарні дільники в (4) впорядковані наступним чином. Спочатку йдуть дільники (3), потім парні дільники, що відповідають кожному від'ємному характеристичному числу, потім пари елементарних дільників, які відповідають комплексно-спряженим характеристичним числам і дільники, яким відповідають дійсні додатні характеристичні числа.

З послідовності (4) випливає, що матриці F відповідає така нормальна жорданова форма [7]

$$F = TJT^{-1} = T\mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \mu_2 I_{p_2} + H_{p_2}, \dots, \mu_s I_{p_s} + H_{p_s}\}T^{-1}, \quad (5)$$

де T — деяка невироджена матриця, а J має блочну діагональну форму з жордановими клітками на діагоналі розміру $p_i \times p_i$

$$\mu_i I_{p_i} + H_{p_i} = \begin{bmatrix} \mu_i & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_i \end{bmatrix}.$$

Тут $I_{p_i} \in \mathfrak{R}_{p_i \times p_i}$ — одинична матриця, а матриця $H_{p_i} \in \mathfrak{R}_{p_i \times p_i}$ містить тільки одиничну наддіагональ. В матриці J жорданові клітки йдуть в порядку, описаному вище. Необхідний порядок можна завжди забезпечити за допомогою перестановок.

Розширимо матрицю J на r жорданових кліток, яким відповідають елементарні дільники (3)

$$\hat{J} = \operatorname{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}, \mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \\ \mu_2 I_{p_2} + H_{p_2}, \ldots, \mu_s I_{p_s} + H_{p_s}\}. \tag{6}$$

Далі замінимо від'ємні характеристичні числа комплексними вигляду $|\mu_j| e^{\pm i\pi}$. Причому характеристичні числа в перших r клітках замінимо на $|\mu_j| e^{+i\pi}$, а в наступних r клітках — на $|\mu_j| e^{-i\pi}$, $j = \overline{1, r}$. Потім кожну пару кліток з від'ємними характеристичними числами заміняємо комплексно-спряженими числами розглянутого вигляду, а інші характеристичні числа залишаємо без змін і знаходимо логарифм сформованої матриці

$$A_1 = \operatorname{diag}\{\ln(\hat{\mu}_1 I_{p_1} + H_{p_1}), \ldots, \ln(\hat{\mu}_r I_{p_r} + H_{p_r}), \\ \ln(\hat{\mu}_1 I_{p_1} + H_{p_1}), \ln(\hat{\mu}_2 I_{p_2} + H_{p_2}), \ldots, \ln(\hat{\mu}_s I_{p_s} + H_{p_s})\}. \tag{7}$$

Тут введено нові позначення для характеристичних чисел $\hat{\mu}_i$. Як отримати логарифм жорданової клітки, розглянуто в [7]. Зазначимо, що логарифм не розщеплює елементарних дільників в скінченній області (відповідні похідні не дорівнюють нулю). При обчисленні логарифма жорданової клітки і відповідних похідних використовується скінченне число раціональних операцій $(+, -, \times, /)$, тому логарифми кліток з комплексно-спряженими характеристичними числами будуть комплексно-спряжені [10, § 3, приклад 18], що важливо для отримання дійсної матриці.

В [7] показано, що матриця вигляду $D = \operatorname{diag}\{U + iV, U - iV\}$, $U, V \in \mathfrak{R}_{d \times d}$ подібна дійсній матриці з матрицею перетворення
$S = \begin{bmatrix} I_d & iI_d \\ I_d & -iI_d \end{bmatrix}$: $S^{-1} D S = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}$.

Аналогічно, для отримання дійсної матриці, подібної до A_1, сформуємо матрицю перетворення

$$P = \mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} I_q & iI_q \\ I_q & -iI_q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{p_{r+1}} & iI_{p_{r+1}} \\ I_{p_{r+1}} & -iI_{p_{r+1}} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} I_{p_{s-v}} & iI_{p_{s-v}} \\ I_{p_{s-v}} & -iI_{p_{s-v}} \end{bmatrix}, I_u\right\}, \tag{8}$$

де $q = p_1 + \ldots + p_r,\ u = p_s + p_{s-1} + \ldots + p_{s-v+1},\ v$ — число елементарних дільників, що відповідають додатнім характеристичним числам. Застосовуючи (8) до (7), отримаємо дійсну матрицю

$$\hat{A}_1 = P^{-1} A_1 P. \tag{9}$$

Тепер знайдемо дійсну експоненту дійсної матриці $\hat{A}_1$

$$\hat{F}_1 = e^{\hat{A}_1} = e^{P^{-1} A_1 P} = P^{-1} e^{A_1} P = P^{-1} \hat{J} P. \tag{10}$$

При переході від матриці $\hat{A}_1$ до матриці $\hat{F}_1$ елементарні дільники також не розщеплюються.

Далі розширимо матрицю коефіцієнтів дискретної системи (1) на жорданові клітки, яким відповідають елементарні дільники (3),

$$\hat{F} = \mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}, F\}, \quad \det\hat{F} \neq 0. \tag{11}$$

В матриці $\hat{F}$ всі елементарні дільники, що відповідають від'ємним характеристичним числам, повторюються парне число разів. Тому для неї існує дійсний логарифм $A = \ln(\hat{F})$ [7], який знайдемо наступним чином. Матриці $\hat{F}, \hat{F}_1$ подібні жордановій матриці $\hat{J}$, тому вони подібні між собою. Існує така дійсна невироджена матриця U, що виконується рівність

$$\hat{F} = e^{A} = U \hat{F}_1 U^{-1} = U e^{\hat{A}_1} U^{-1} = e^{U \hat{A}_1 U^{-1}}, \quad A = U \hat{A}_1 U^{-1}. \tag{12}$$

Отже, ми отримали дійний логарифм A розширеної дійсної матриці $\hat{F}$. Тепер розглянемо розв'язки дискретної та неперервної систем. Розв'язок системи (1) має вигляд

$$x(k) = F^k x(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

а розв'язок неперервної системи (2) в дискретні моменти часу $t = k$ такий [1]:

$$\begin{aligned} z(k) &= e^{Ak} z(0) = \hat{F}^k z(0) = \\ &= \mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}, F\}^k z(0) = \\ &= \mathrm{diag}\{\mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}\}^k z_1(0), F^k z_2(0)\}, \\ &\qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{14}$$

Оскільки $x(0) = z_2(0)$, то розв'язки $x(k),\ z_2(k)$ відповідно дискретної (1) та неперервної (2) систем збігаються в дискретні моменти часу $k = 1, 2, \dots$.

Теорема доведена.

Зазначимо, що при довільному кроці дискретизації h матриці коефіцієнтів дискретної та неперервної систем пов'язані рівністю [3] $A = [\ln\hat{F}]/h$.

В теоремі 2.1 побудована еквівалентна дискретній системі (1) неперервна система (2) мінімального порядку. Щоб отримати еквівалентну систему більшого порядку необхідно розширити матрицю $\hat{J}$ додатковими жордановими клітками. Це можуть бути жорданові клітки, які відповідають елементарним дільникам (3), але мають повторюватися парне число разів. Коли додаткових жорданових кліток $2rl$, де l деяке ціле число, то в перших $(l+1)r$ клітках заміняємо від'ємні характеристичні числа μ_i на комплексні $|\mu_j|e^{i\pi}$, а в наступних $(l+1)r$ на комплексно-спряжені $|\mu_j|e^{-i\pi}$. В цьому випадку перша матриця (8) матиме вигляд $\begin{bmatrix} I_{lr+r} & iI_{lr+r} \\ I_{lr+r} & -iI_{lr+r} \end{bmatrix}$.

Можна також розширити матрицю $\hat{J}$ парними жордановими клітками, що відповідають комплексно-спряженим парам елементарних дільників з J (структура матриць перетворення для них є в (8)). На інших варіантах зупинятися не будемо. Далі матриця A будується за алгоритмом, наведеним в теоремі; при цьому матриця $\hat{F}$ також розширюється на число розглянутих жорданових кліток. Розмірність вектора z_2 залишається незмінною, а розмірність вектора z_1 збільшується на суму розмірів жорданових кліток, які відповідають цим елементарним дільникам. Розв'язки сформованих розширених систем будуються аналогічно (13), (14). Причому, $z_2(0) = x(0),\ z_1(0)$ — довільний вектор і виконується $x(k) = z_2(k),\ k = 1, 2, \dots$.

Слід відзначити, що в загальному випадку для однієї матриці A_1 (формула (7)) може бути побудовано декілька матриць перетворення (8). Нехай, наприклад, розширена матриця початкової системи така: $\hat{F} = \hat{J} = \mathrm{diag}\{-1, -1, -1, -1, \}$. Тоді, сформувавши матрицю A_1 у вигляді $\mathrm{diag}\{-i\pi, i\pi, i\pi, -i\pi, \}$, можна за допомогою двох матриць перетворення

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix},$$

отримати (формула (9)) два дійсні логарифми матриці $\hat{J}$ ($\hat{F}$)

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 & 0 \\ -\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \\ -\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут матриця P_1 будувалася відносно пар кліток (характеристичних чисел) (μ_1, μ_2), (μ_3, μ_4), а матриця P_2 — відносно (μ_1, μ_3), (μ_2, μ_4). Отже, ми обчислили два різні дійсні матричні логарифми, для яких виконується $\hat{F} = e^{\hat{A}_1} = e^{\hat{A}_2}$.

3 Приклад побудови дійсної матриці коефіцієнтів еквівалентної неперервної системи

Приклад 3.1 Розглянемо дискретну систему (1) з матрицею коефіцієнтів

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Необхідно знайти неперервний аналог в дійсній області.

Всі наведені нижче обчислення були виконані за допомогою комп'ютерної системи *Maple* [11]. Характеристичними числами матриці F є $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2 - i3$, $\mu_3 = 2 + i3$ з кратністю 2 кожне. Оскільки $\operatorname{rang}(F - \mu_1 I) = \operatorname{rang}(F - \mu_2 I) = \operatorname{rang}(F - \mu_3 I) = 5$, то матриця F має нелінійні елементарні дільники $(\mu - \mu_1)^2$, $(\mu - \mu_2)^2$, $(\mu - \mu_3)^2$.

Отже, матриця F має непарне число елементарних дільників, що відповідають від'ємному характеристичному числу $\mu_1 = -1$, тому для отримання неперервного аналогу з дійсною матрицею коефіцієнтів необхідно збільшити розмір системи на два. Нормальна жорданова форма матриці F має вигляд

$$J = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 - i3 & 1 \\ 0 & 2 - i3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 + i3 & 1 \\ 0 & 2 + i3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Розширимо матрицю J на жорданову клітку, що відповідає елементарному дільнику $(\mu-\mu_1)^2$,

$$J_1 = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2-i3 & 1\\ 0 & 2-i3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2+i3 & 1\\ 0 & 2+i3\end{bmatrix}\right\} \tag{16}$$

і знайдемо її логарифм, попередньо замінивши в першій клітці характеристичне число -1 на $e^{-i\pi}$, а в другій — на $e^{i\pi}$:

$$\begin{aligned}\hat{J}_1 = \operatorname{diag}\Bigg\{&\begin{bmatrix}-i\,\pi & -1\\ 0 & -i\,\pi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\,\pi & -1\\ 0 & i\,\pi\end{bmatrix},\\ &\begin{bmatrix}1/2\ln(13)-i\operatorname{arctg}(3/2) & 2/13+i\,3/13\\ 0 & 1/2\ln(13)-i\operatorname{arctg}(3/2)\end{bmatrix},\\ &\begin{bmatrix}1/2\ln(13)+i\operatorname{arctg}(3/2) & 2/13-i\,3/13\\ 0 & 1/2\ln(13)+i\operatorname{arctg}(3/2)\end{bmatrix}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Тут $\ln\left(\begin{bmatrix}\mu & 1\\ 0 & \mu\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\ln(\mu) & 1/\mu\\ 0 & \ln(\mu)\end{bmatrix}$.

Тепер за допомогою невиродженої матриці

$$T_1 = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}I_2 & iI_2\\ I_2 & -iI_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}I_2 & iI_2\\ I_2 & -iI_2\end{bmatrix}\right\}$$

отримуємо дійсну матрицю для жорданової форми (17):

$$A_1 = T_1^{-1}\hat{J}_1T_1 = \operatorname{diag}\{A_{11}, A_{22}\}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix}0 & -1 & \pi & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pi\\ -\pi & 0 & 0 & -1\\ 0 & -\pi & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix}1/2\ln(13) & 2/13 & \operatorname{arctg}(3/2) & -3/13\\ 0 & 1/2\ln(13) & 0 & \operatorname{arctg}(3/2)\\ -\operatorname{arctg}(3/2) & 3/13 & 1/2\ln(13) & 2/13\\ 0 & -\operatorname{arctg}(3/2) & 0 & 1/2\ln(13)\end{bmatrix}.$$

Розширимо матрицю F жордановою кліткою $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ так, щоб новий розв'язок $z(k)$ розширеної системи можна було представити у вигляді $z(k) = \begin{bmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{bmatrix}$, $z_1 \in \mathfrak{R}_2$, $z_2 \in \mathfrak{R}_6$ і $z_2(k)$ не залежало б від

$z_1(k)$. Маємо

$$\hat{F} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, F \right\}, \tag{18}$$

причому $z_2(0) = x(0)$, а $z_1(0)$ — довільний вектор. Тепер розширена дійсна матриця з (18) має дійсний логарифм ($\hat{F} = e^A$).

Побудуємо подібну (18) матрицю, як експоненту дійсної матриці A_1 або дійсну матрицю жорданової форми (16) (при переході від матриці A_1 до F_1 елементарні дільники не розщеплюються [7])

$$F_1 = e^{A_1} = T_1^{-1} J_1 T_1 =$$
$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Подібні дійсні матриці $\hat{F}, F_1$ (вони подібні одній і тій же жордановій формі (16)) пов'язані рівністю $\hat{F} = UF_1U^{-1}$, де U — деяка дійсна невироджена матриця. Невідому матрицю знаходимо з рівняння $\hat{F}U = UF_1$,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подібні матриці $\hat{F}, F_1$ мають подібні матричні логарифми

$$\hat{F} = e^A = UF_1U^{-1} = Ue^{A_1}U^{-1} = e^{UA_1U^{-1}}.$$

Таким чином, остаточно отримуємо дійсну матрицю коефіцієнтів неперервного аналога $A = UA_1U^{-1}$ і наводимо її в розгорнутому вигляді

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi & -\pi & -\pi & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\,\pi & -\pi & \pi & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & -1 & a_{37} & -3/13 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & 2/13 & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & 2/13 \\ 0 & -\pi & 0 & \ln(13) & a_{65} & 0 & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{54} & 0 & a_{54} & 1/2\ln(13) \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}
&a_{34} = 2 + 1/2\ln(13),\\
&a_{35} = 11/13 + 1/2\ln(13) + \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{37} = -11/13 - 1/2\ln(13),\\
&a_{44} = 1/2\ln(13),\\
&a_{45} = -2/13 + \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{48} = -3/13 + \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{54} = -\operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{55} = -3/13 - \operatorname{arctg}(3/2) + 1/2\ln(13),\\
&a_{57} = 3/13 + \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{65} = -4/13 + 1/2\ln(13) + 2\operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{67} = 4/13 - 1/2\ln(13),\\
&a_{68} = -6/13 + \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{75} = -3/13 - \operatorname{arctg}(3/2),\\
&a_{77} = 3/13 + \arctan(3/2) + 1/2\ln(13),\\
&a_{78} = 2/13 + \operatorname{arctg}(3/2).
\end{aligned}$$

Матриця A має характеристичні числа кратності 2

$$\lambda_1 = i\pi, \quad \lambda_2 = -i\pi, \quad \lambda_3 = 1/2\ln(13) + i\operatorname{arctg}(3/2),$$
$$\lambda_4 = 1/2\ln(13) - i\operatorname{arctg}(3/2),$$

причому $e^{\lambda_1} = e^{\lambda_2} = \mu_1,\ e^{\lambda_3} = \mu_2,\ e^{\lambda_4} = \mu_3$.

Оскільки $\operatorname{rang}(A - \lambda_i I) = 7,\ i = \overline{1,4}$, то матриця A має нелінійні елементарні дільники

$$(\lambda - \lambda_1)^2, \quad (\lambda - \lambda_2)^2, \quad (\lambda - \lambda_3)^2, \quad (\lambda - \lambda_4)^2.$$

Частина розв'язків отриманої дісної неперервної системи в дискретні моменти часу збігається з розв'язком вихідної дискретної системи. Дійсно, розв'язок дискретної системи запишеться так:

$$x(k) = F^k x(0),$$

а розв'язок неперервної системи в дискретні моменти часу має вигляд

$$z(k) = e^{Ak} z(0) = \hat{F}^k z(0) =$$
$$= \mathrm{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, F \right\}^k z(0) = \mathrm{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k z_1(0), F^k z_2(0) \right\},$$

тобто $x(k) \equiv z_2(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

[1] *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

[2] *Зинчук Н.А.* Взаимное преобразование непрерывных и дискретных моделей линейных динамических систем. Ч.4. Устранение неоднозначности обратного преобразования // Автоматика. — 1989. — №4. — С. 10–18.

[3] *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

[4] *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. — 454 с.

[5] *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновеннные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М.: Наука, 1986. — 260 с.

[6] *Зинчук Н.А.* Взаимные преобразования непрерывных и дискретных моделей управляемых систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Киев, 1990. — 16 с.

[7] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[8] *Зінчук М.О., Новицький В.В.* Взаємне перетворення лінійних однорідних диференціальних та різницевих систем // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, №1. — С. 146–163.

[9] *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. — М.: Наука, 1985. — 296 с.

[10] *Соминский И.С.* Метод математической индукции. — М.: Наука, 1961. — 52 с.

[11] *Матросов А.В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ-Петербург, 2001. — 528 с.