Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 65–70

УДК 531.383:62.50

Спостережники зниженого порядку для майже консервативних динамічних систем *

О.П. Коломійчук

Інститут математики НАН України, Київ; kolomithyk@rambler.ru

Побудовано фільтр Луінбергера для майже консервативної динамічної системи. Показано, що задача побудови фільтра значно спрощується порівняно з загальним випадком завдяки спеціальній формі Коші, притаманній майже консервативним моделям.

Luenbeger filter is constructed for an almost conservative dynamic system. It is shown that the problem becomes simpler than in the general case due to a special Cauchy form which is typical for almost conservative models.

Розглянемо задачу синтезу спостережника зниженого порядку (фільтра Луінбергера) для майже консервативної динамічної системи (МКДС). Цей фільтр дає можливість оцінити лише неспостережні координати вектора стану z і має розмір, що менший за порядок спостережуваної системи.

Нехай маємо спостережну стаціонарну майже консервативну динамічну систему вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{z} = (F_0 + \varepsilon F_1)z + Du, \quad z(t_0) = z_0, \\ &Y = \varepsilon G z, \end{aligned} \tag{1}$$

де t_0 — початковий момент часу, $z(t) \in \Re_{2n}$ — вектор стану, $F_0 = -F_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця, $F_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ — матриця-збурення, $u \in \Re_m$ — вектор керування, $D \in \Re_{2n\times m}$ — матриця при керуванні, $Y \in \Re_l$ — вихідний сигнал об'єкта ($l < 2n$), $G \in \Re_{l\times 2n}$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

Застосовуючи ортогональне перетворення вектора стану

$$x = T_1^T z \in \Re_{2n}, \quad T_1 T_1^T = I, \tag{2}$$

та перетворення вектора виходу системи (1)

$$y = T_2 Y \in \Re_l, \tag{3}$$

матимемо

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \\ &y = \varepsilon C x, \end{aligned} \tag{4}$$

де $A_0 = T_1^T F_0 T_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $A_1 = T_1^T F_1 T_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $B = T_1^T D \in \Re_{2n\times m}$.

Матриці T_1 та T_2 виберемо таким чином, щоб виконувалося співвідношення [1–3]

$$C = T_2 G T_1 = [I_l; 0] \in \Re_{l\times 2n}, \tag{5}$$

де $I_l \in \Re_{l\times l}$ — одинична матриця. Матриця перетворення T_1 будується за допомогою алгоритма Гаусголдера і є симетричною ($T_1 = T_1^T$).

Покажемо, що матриця A_0 є кососиметричною:

$$A_0 = T_1 F_0 T_1 = -T_1 F_0^T T_1 = -(T_1 F_0 T_1)^T = -A_0^T. \tag{6}$$

З (6) і (2) випливає майже консервативність динамічної системи (4).

Наведемо коротко результати досліджень [4, 11], модифікуючи їх для розглядуваної проблеми побудови спостерігача зниженого порядку для МКДС.

Поєднавши ідеї, викладені в [4, 9, 11], побудуємо для системи (4) оцінюючий пристрій зниженого порядку (фільтр Луінбергера), за допомогою якого отримується оцінка $\hat{z}$ вектора стану z досліджуваної системи (1) із співвідношення

$$\hat{z} = T_1 \hat{x}. \tag{7}$$

Вихідним сигналом об'єкта є вектор y розмірності l. Оскільки друге рівняння (4) дає l лінійно незалежних рівнянь ($\operatorname{rank} C = l$) для невідомого стану x, то необхідно відновити $2n - l$ лінійних комбінацій компонент стану. Цей підхід був вперше розглянутий в [8].

Матриця C має ранг $l < 2n$; це легко бачити з (5). Введемо матрицю $M \in \Re_{2n-l\times 2n}$ і вектор

$$p = \varepsilon M x \in \Re_{2n-l} \tag{8}$$

такі, щоб матриця

$$\begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix} \tag{9}$$

була невиродженою. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon C x, \\ p &= \varepsilon M x. \end{aligned} \tag{10}$$

З (10) випливає

$$x = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ p \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Виберемо матрицю M такої структури:

$$M = \left[0, I_{2n-l}\right]. \tag{12}$$

Враховуючи (12) та (5), зручно записати

$$\begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix}^{-1} = \left[L_1, L_2\right], \quad L_1 = \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2n-l} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Якщо відновити вектор p і позначити відновлену зміну через $\hat{p}$, то отримаємо відновлений вектор стану у вигляді

$$\hat{x} = \frac{1}{\varepsilon}(L_1 y + L_2 \hat{p}), \tag{14}$$

або

$$\begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{p} \end{bmatrix} \right), \tag{15}$$

де $\hat{x_1} \in \Re_l$.

Введений вектор p задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{p} = \varepsilon M(A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon M B u. \tag{16}$$

Якщо подати матриці $A_0 + \varepsilon A_1$ та B у такому блочному вигляді

$$\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

де $A_0^{11}, \quad A_1^{11} \in \Re_{l \times l}, \quad B_1 \in \Re_{l \times m}$, то (16) з урахуванням (12), (13) набуде наступного вигляду:

$$\dot{p} = (A_{22}^0 + \varepsilon A_{22}^1)p + (A_{21}^0 + \varepsilon A_{21}^1)y + \varepsilon B_2 u. \tag{18}$$

Як було показано в [4], визначивши похідну y,

$$\dot{y} = (A^0_{12} + \varepsilon A^1_{12})p + (A^0_{11} + \varepsilon A^1_{11})y + \varepsilon B_1 u, \tag{19}$$

з рівнянь (18), (19) утворюється спостережник

$$\dot{\hat{p}} = (A^0_{22} + \varepsilon A^1_{22})\hat{p} + (A^0_{21} + \varepsilon A^1_{21})y + \varepsilon B_2 u +$$

$$+K[\dot{y} - (A^0_{11} + \varepsilon A^1_{11})y - \varepsilon B_1 u - (A^0_{12} + \varepsilon A^1_{12})\hat{p}], \tag{20}$$

де $K \in \Re_{2n-l\times l}$.

За рахунок вибору матриці підсилення будується спостережник з певними властивостями; крім цього, є можливість впливати на швидкість збіжності помилки відновлення $e = p - \hat{p}$. Реальні об'єкти майже завжди знаходяться під впливом різноманітних збурень. В моделі (1) не враховується шумовий вплив на систему та спостереження. Обираючи матрицю K так, щоб забезпечити більш швидку збіжність помилки відновлення до нуля, збільшується шумовий вплив на оцінку відновлення. Разом з цим спостережник втрачає властивості, притаманні майже консервативним динамічним системам, що ускладнює пошук матриці підсилення спостережника.

Оберемо матрицю підсилення у вигляді εK. Далі покажемо, що такий вибір при парному розмірі вихідного сигналу об'єкта зберігає в спостережника властивості майже консервативної динамічної системи і дає змогу застосувати методи, наведені в [5–7] для знаходження матриці підсилення.

Щоб побудувати спостережник, не обов'язково знаходити похідну $\dot{y}$. Поклавши

$$q = \hat{p} - \varepsilon K y, \tag{21}$$

матимемо

$$\dot{q} = \Big[(A^0_{22} + \varepsilon A^1_{22}) - \varepsilon K(A^0_{12} + \varepsilon A^1_{12})\Big]q + \Big[\varepsilon(A^0_{22} + \varepsilon A^1_{22})K - (A^0_{21} + \varepsilon A^1_{21}) -$$

$$\varepsilon K(A^0_{11} + \varepsilon A^1_{11}) - \varepsilon^2 K(A^0_{12} + \varepsilon A^1_{12})K\Big]y + \Big[\varepsilon B_2 + \varepsilon^2 K B_1\Big]u. \tag{22}$$

Відновлений вектор стану $\hat{x}$ отримується із співвідношення

$$\hat{x} = L_2 q + (L_1 + L_2 k)y. \tag{23}$$

Рівняння (22) та (23) описують спостережник.

Оскільки досліджувана система (1) спостережна то, шляхом відповідного вибору матриці K можливо розташувати полюси спостережника довільно [10]. При цьому забезпечується асимптотична стійкість спостережника (22) вибором власних значень матриці $(A_{22}^0+\varepsilon A_{22}^1)-\varepsilon K(A_{12}^0+\varepsilon A_{12}^1)$.

Застосуємо алгоритм з [7] для знаходження матриці підсилення K. Матричне рівняння Ляпунова для помилки відновлення спостережника зниженого порядку (22)

$$e = x_2 - \hat{x}_2, \tag{24}$$

яка задовольняє рівняння

$$\dot{e} = \Big[(A_{22}^0+\varepsilon A_{22}^1)-\varepsilon K(A_{12}^0+\varepsilon A_{12}^1)\Big]e, \tag{25}$$

матиме вигляд

$$\Big[(A_{22}^0+\varepsilon A_{22}^1)-\varepsilon K(A_{12}^0+\varepsilon A_{12}^1)\Big]^T P+$$

$$+P\Big[(A_{22}^0+\varepsilon A_{22}^1)-\varepsilon K(A_{12}^0+\varepsilon A_{12}^1)\Big] = -2Q, \tag{26}$$

де $P\in\Re_{2n-l\times 2n-l}>0$ і $Q\in\Re_{2n-l\times 2n-l}\geq 0$ треба знайти разом з матрицею підсилення K.

Позначивши через $\widetilde{A}_0 = A_{22}^0$ та $\widetilde{A}_1 = A_{22}^1 - K(A_{12}^0+\varepsilon A_{12}^1)$, отримаємо

$$(\widetilde{A}_0+\varepsilon\widetilde{A}_1)^T P + P(\widetilde{A}_0+\varepsilon\widetilde{A}_1) = -2Q. \tag{27}$$

Із аналізу останнього рівняння стає зрозуміло, що кількість лінійно незалежних спостережень визначає його порядок. Невідомі матриці P і Q в (27) можуть бути як парного, так і непарного порядку. В зв'язку з цим слід ці два випадки досліджувати окремо і для кожного з них розробити процедуру вибору матриці K. Цьому питанню будуть присвячені майбутні дослідження.

[1] *Пейтел Р.В.* Алгоритмы размещения собственных значений в многосвязанных системах // Автоматизированое проектирование систем управления. — М.: Машиностроение, 1989. — С. 280–309.

[2] *Жуковська О.А.* Нестаціонарна ортогональна декомпозиція економічних моделей // Збірник наук. праць викладачів і аспірантів факультету менеджменту та маркетингу. — Київ: ІВЦ Видавництво "Політехніка" , 2002. — С. 214–217.

[3] *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с.

[4] *Квакернак Х.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

[5] *Новицький В.В.* Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **78**. — 124 с.

[6] *Новицький В.В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах // Праці Ін-ту математики НАН України, 2008. — **77**. — 252 с.

[7] *Новицький В.В.* Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. — Київ, 2004. — 33 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 2004.7)

[8] *Luinberger D.G.* Observing for multivariable systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1966. — **11**. — P. 190–197.

[9] *Cumming S.D.* Design of observers of reduced dunamics // Electron. Letters. — 1969. — **5**, 10. — P. 213–214.

[10] *Wonham W.M.* Dynamic observers-Geometric theory // IEEE Trans. Autom. Control. — 1970. — **2**, 15. — P. 258–259.

[11] *Мороз А.И.* Курс теории систем. — М.: Высш. шк., 1987. — 304 с.