Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 401–411

УДК 517.54

А. К. Бахтин, И. В. Денега

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Об одной проблеме В. Н. Дубинина

alexander.bahtin@yandex.ru, iradenega@yandex.ru

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Досліджуються екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язані з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей. Основна увага приділяється дослідженню відомої проблеми В. М. Дубініна.

Paper is devoted to extremal problems of geometric function theory that are associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains. A focus of investigation is well-known V. N. Dubinin's problem.

В настоящее время задачи об экстремальном разбиении занимают значительное место в геометрической теории функций комплексной переменной и имеют богатую историю (см., например, [1 — 13]). Большой интерес вызывают экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. В 1994 году в работе [5] была сформулирована одна открытая экстремальная проблема о неналегающих областях со свободными полюсами (формулировка этой проблемы приведена ниже). Эта задача вызвала большой интерес и изучалась во многих работах (см., например, [4, 6 — 8, 11 — 13]). В данный момент по этой проблеме известны только частичные результаты, в целом она не решена. Основной результат работы обобщает большинство известных результатов, полученных ранее в этой проблеме.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ =$

$= (0,\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ — функция Жуковского. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [2, 5, 7]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} :\ k = \overline{1,n}\right\}$ назовем ***n*-лучевой**, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

В данной работе исследуется функционал следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей (то есть $B_p \cap B_j = \emptyset$ при $p \neq j$) таких, что $a_k \in B_k$ при $k = \overline{0,n}$.

В работе [5, С. 68] сформулирована следующая экстремальная задача: доказать, что максимум функционала (1), где B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ и $\gamma \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации областей, которые имеют n-кратную симметрию.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,38}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где D_k, d_k ($d_0 = 0$) при $k = \overline{0,n}$ — соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{2}$$

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,38}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $|a_k| = 1$ при $k = \overline{1,n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, выполняется неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства здесь достигается в случае, когда a_k и B_k при $k = \overline{0,n}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (2).

Доказательство теоремы 1. Справедливость данной теоремы при $\gamma \in (0,1]$ следует из работ [4, теорема 4], [6], при $\gamma \in (0, \sqrt[4]{n}]$ — из работы [12], при $\gamma \in (0, \sqrt[3]{n}]$ — из работы [8]. Л. В. Ковалев [6] доказал гипотезу В. Н. Дубинина при $n \geqslant 5$ и $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leqslant 2$, $k = \overline{1,n}$. Для того, чтобы провести дальнейшие рассуждения, нужно исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$.

Рассмотрим сначала случай $\gamma = n^{0,38}$. Используем метод, предложенный при доказательстве теоремы 5.2.3 работы [7]. Согласно ему имеем

$$J_n(\gamma) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0,0)r(B_k,a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Из теоремы М. А. Лаврентьева [1] (см. также [4, 7]) следует неравенство

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k) \leqslant |a_k|^2.$$

По теореме 5.1.1 [7] имеет место оценка

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\, \mathcal{L}^{(0)}(A_n).$$

Из условия $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ следует, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$. Отсюда, учитывая условия теоремы 1, получаем соотношение

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{3}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, то с учетом неравенства Коши приходим к выводу, что

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \prod_{k=1,k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq k_0}^{n} \alpha_k}{n-1}\right)^{n-1} = \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1},$$

где $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$. Таким образом, из неравенства (3) получаем следующее соотношение для функционала (1):

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}, \tag{4}$$

где $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$, причем $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma} \geqslant 2/n$. С другой стороны, из результатов работ [6], [7, С. 257], и свойств разделяющего преобразования, получаем

$$J_n^0(\gamma) = r^\gamma (D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{5}$$

Рассмотрим величину

$$O_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)} \tag{6}$$

и с учетом (6) получим оценку

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}},$$

где $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma} > 2/n$.

Рассмотрим полином

$$T_n(x) = x(2-x)^{n-1}, \quad x\in(0,2]\,,$$

который монотонно возрастает на промежутке $\left(0,\frac{2}{n}\right)$ от значения $T_n(0)=0$ до $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ и монотонно убывает на отрезке $\left(\frac{2}{n},2\right)$ от значения $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ до $T_n(2) = 0$. Таким образом, $T_n(x)$ имеет единственный максимум в точке $x=\frac{2}{n}$ на промежутке $(0,2)$. Тогда совершенно ясно, что на отрезке $\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \leqslant x \leqslant 2$ $(\gamma\in(1,n^{0,38}))$ выполняется неравенство

$$x(2-x)^{n-1} \leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \tag{7}$$

на множестве $x\geqslant 2/\sqrt{\gamma} > 2/n$, $\gamma\in(1,n^{0,38}\,]$. Учитывая соотношения (4) — (7), получаем

$$O_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

При оценке значения $O_n(\gamma)$ используем метод работы [7, С. 255 — 259]. Рассмотрим сначала величину $O_n(\gamma)$ для значения $\gamma=n^{0,38}$. В этом случае получаем

$$O_n(n^{0,38}) \leqslant \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

где

$$y_1(n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{n^{0,38}+1}\left(1-n^{-0,19}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,62}}}, \quad y_2(n) = \left(n^{0,62}\right)^{n^{-0,62}},$$

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,62}\right)^{n+n^{-0,62}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,81}}{1-n^{-0,81}}\right)^{2n^{0,19}},$$

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,19}}\right)^{1-n^{-0,62}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,62}}}.$$

Оценим каждый из множителей $y_k(n)$, $k = \overline{1,6}$. Для функции $y_1(n)$ справедливо равенство

$$\ln y_1(n) = (n^{0,38}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) + \left(n - 1 - \frac{n-1}{n^{0,62}}\right)\ln\left(1 - n^{-0,19}\right).$$

Так как $\ln\left(\frac{n}{4}\right) \leqslant 1,05\sqrt[4]{n}$ при $n \in \mathbb{N}$, то

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{0,38}+1\right)1,05\sqrt[4]{n} + \left(n - 1 - \frac{n-1}{n^{0,62}}\right)\ln\left(1 - n^{-0,19}\right).$$

При $0 < x < 1$ справедливо неравенство

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots <$$

$$< -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}.$$

Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{0,38}+1\right)1,05\sqrt[4]{n} + \left(n - 1 - n^{0,38} + n^{-0,62}\right) \times$$

$$\times \left(-n^{-0,19} - \frac{n^{-0,38}}{2} - \frac{n^{-0,57}}{3} - \frac{n^{-0,76}}{4} - \frac{n^{-0,95}}{5}\right) =$$

$$= \left(n^{0,38}+1\right)1,05\sqrt[4]{n} + n(1 - n^{-1} - n^{-0,62} + n^{-1,62})\times$$

$$\times \left(-n^{-0,19}\right)\left(1 + \frac{n^{-0,19}}{2} + \frac{n^{-0,38}}{3} + \frac{n^{-0,57}}{4} + \frac{n^{-0,76}}{5}\right)$$

и, таким образом,

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{0,38}+1\right)1,05\sqrt[4]{n} - n^{0,81}(q(n))\times$$

$$\times \left(1 + \frac{n^{-0,19}}{2} + \frac{n^{-0,38}}{3} + \frac{n^{-0,57}}{4} + \frac{n^{-0,76}}{5}\right),$$

где $q(n) = 1 - n^{-1} - n^{-0,62} + n^{-1,62}$. Покажем, что функция

$$\varphi(x) = \left(x^{0,38} + 1\right) 1,05\sqrt[4]{x} - x^{0,81}\left(1 - x^{-1} - x^{-0,62} + x^{-1,62}\right)$$

убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$. Для этого $\varphi(x)$ представим в виде

$$\varphi(x) = 1,05x^{0,63} + 1,05x^{0,25} - x^{0,81} + x^{-0,19} + x^{0,19} - x^{-0,81}.$$

Производная функции $\varphi(x)$ равна

$$\varphi'(x) = 0,6615x^{-0,37} + 0,2625x^{-0,75} -$$

$$-0,81x^{-0,19} - 0,19x^{-1,19} + 0,19x^{-0,81} + 0,81x^{-1,81} = -0,81x^{-0,19} \times$$

$$\times \left(1 + 0,2346x^{-1} - 0,8167x^{-0,18} - 0,3241x^{-0,56} - 0,2346x^{-0,62} - x^{-1,62}\right).$$

Так как при $x \in [10, \infty)$

$$1 + 0,2346x^{-1} \geqslant 0,8167x^{-0,18} + 0,3241x^{-0,56} + 0,2346x^{-0,62} + x^{-1,62},$$

то $\varphi'(x) < 0$ при всех x из указанного промежутка. Таким образом, $\varphi(x)$ монотонно убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$. Далее ясно, что функция $\ln y_1(n)$ также убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$, то есть $y_1(n) < y_1(17) \approx 0,048075$, $n \geqslant 17$.

Для функции $y_2(x) = \left(x^{0,62}\right)^{x^{-0,62}}$ аналогично убеждаемся, что она убывает на промежутке $x \in [6, \infty)$. Таким образом, $y_2(x) < 1,444668$, $x \geqslant 6$. Отсюда приходим к выводу, что $y_2(n) < 1,444668$, $n \geqslant 6$. Очевидно также, что $y_3(n) = \left(1 - n^{-1,62}\right)^{n+n^{-0,62}} < 1$, $n \geqslant 2$.

Функцию $y_4(n)$ представим в виде

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,81}\right)^{n^{0,81} n^{-0,81} 2n^{0,19}} \left(1 - n^{-0,81}\right)^{(-n^{0,81})(n^{-0,81}) 2n^{0,19}}.$$

Поскольку $\left(1 + n^{-0,81}\right)^{n^{0,81}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\left(1 - n^{-0,81}\right)^{-n^{0,81}} < 3$ при $n \geqslant 10$, то

$$y_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,62}}, \quad n \geqslant 10.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и $y_4(n) < y_4(17) \approx 2,061682$, $n \geqslant 17$.

Исследуя функцию $y_5(x) = \left(\dfrac{4}{x^{0,19}}\right)^{1-x^{-0,62}}$ по стандартной схеме, приходим к выводу, что она убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$. Таким образом, $y_5(n) < y_5(17) \approx 2,016966$, $n \geqslant 17$.

Для функции $y_6(n)$ справедливы следующие соотношения:

$$y_6(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,62}}}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e,\quad n\geqslant 10.$$

Следствием полученных неравенств является следующая оценка:

$$O_n(n^{0,38})\leqslant\prod_{k=1}^{6}y_k(n)\leqslant$$

$$\leqslant 0,048075\cdot 1,444668\cdot 1\cdot 2,061682\cdot 2,016966\cdot e\leqslant 0,782667<1,$$

то есть

$$O_n\left(n^{0,38}\right)<1\quad \text{для}\, n\geqslant 17.$$

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что $O_n\left(n^{0,38}\right)<1$ для $n=\overline{5,16}$. Пусть теперь $\gamma\in(1;n^{0,38}]$. Учитывая, что функция $\left[2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$ монотонно возрастает по γ при фиксированном n на промежутке $(1;n^{0,38}]$, а функция $J_n^0(\gamma)$, определяемая формулой (5), монотонно убывает по γ при фиксированном n на том же промежутке, делаем заключение, что

$$O_n(\gamma)=\frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)}<\frac{J_n(n^{0,38})}{J_n^0(n^{0,38})}=O_n(n^{0,38})<1,\quad \gamma\in(1,n^{0,38}].$$

Таким образом,

$$J_n(\gamma)<J_n^0(\gamma)$$

при $\gamma\in(1,n^{0,38}]$, $\alpha_0\sqrt{\gamma}\geqslant 2$, $n\geqslant 5$. Это означает, что при указанных значениях параметров нет экстремальных конфигураций. Остается исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma}<2$.

Следуя работам [4, 6], введем в рассмотрение функцию

$$S(x)=2^{x^2+6}\,x^{x^2}\,(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\,(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in[0,2],$$

и, используя результаты работ [7, 8, 12], получим соотношения

$$J_n(\gamma)\leqslant\gamma^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}=\gamma^{-\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad (8)$$

где

$$P(x) = 2^{x^2+6}\, x^{x^2+2}\, (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\, (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2].$$

Далее используем метод, предложенный в работах [4, 6]. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k < 2.$$

Пусть $\Psi(x) = \ln(P(x))$ и $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — произвольный экстремальный набор точек этой задачи. Обозначим при этом

$$Z(X^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n} \Psi(x_k^{(0)})$$

и, повторив рассуждения работы [6], установим, что если $0 < x_k^{(0)} < < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то справедливы равенства

$$\Psi'(x_k^{(0)}) = \Psi'(x_j^{(0)}), \tag{9}$$

где $k, j = \overline{1,n}$, $k \neq j$,

$$\Psi'(x) = 2x \ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}\,.$$

Теперь покажем, что если функция $Z(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Psi(x_k)$ достигает максимума в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ при условиях $0 < x_k^{(0)} < 2$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{\gamma}$ ($n \geqslant 5$, $0 < \gamma \leqslant n^{0{,}38}$), то

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Положим $\sigma_1 := \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}$, $\sigma_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1,n}$. Функция

$$\Psi''(x) = \ln\left(\frac{4x^2}{4-x^2}\right) - \frac{2}{x^2}$$

строго возрастает на промежутке $(0,2)$ и существует x_0, $x_0 \approx 1,324661$, такое, что $\operatorname{sign}\Psi''(x) \equiv \operatorname{sign}(x-x_0)$.

При $\sigma_0 \leqslant x_0$ в силу строгой монотонности $\Psi'(x)$ на $[0,\, x_0]$ из условия задачи получаем, что $x_1^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Пусть $x_0 < \sigma_0 < 2$. Тогда в силу возрастания $\Psi'(x)$ на $[x_0, 2]$ имеем

$$\Psi'(\sigma_0) < \Psi'(2) = 1.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{\gamma}$, получаем

$$\sigma_1 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma}-\sigma_0}{n-1} < \frac{2n^{0,19}-\sigma_0}{n-1}\,.$$

Функция $\phi(x) = \frac{2x^{0,19}-b}{x-1}$, $b < 2$, убывает при $x > 1$, поскольку для всех $x > 1$

$$\phi'(x) = -(1,62x^{0,19} + 0,38x^{-0,81} - b)/(x-1)^2 < 0\,.$$

Тогда для всех $n \geqslant 5$, $\gamma \in (1, n^{0,38}\,]$,

$$\sigma_1 < \tau_0 = (n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = (2\sqrt{\gamma}-\sigma_0)/(n-1) \leqslant$$

$$\leqslant (2\sqrt{n^{0,38}} - x_0)/(n-1) \leqslant (2\cdot 5^{0,19} - 1,324661)/4 < 0,347686,$$

отсюда $\sigma_1 < 0,347686$. В силу убывания $\Psi'(x)$ на $(0,\, x_0)$, имеем

$$\Psi'(\sigma_1) > \Psi'(0,347686) = 4,325849 > \Psi'(2).$$

Таким образом, для произвольного расположения точек $x_k^{(0)}$, $k=\overline{1,n}$, соотношение (9) не имеет места. Отсюда получаем противоречие с экстремальностью набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$, если $\sigma_0 \in (x_0;\, 2]\,$.

Из всего сказанного выше следует, что для экстремального набора $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}$ возможен только случай $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k=\overline{1,n}$ и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)}$. Отсюда получаем утверждение теоремы 1.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159—245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[4] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48—66.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3—76.

[6] Ковалев Л. В. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96—98.

[7] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — 308 с.

[8] Денега И. В. *Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях* // Доп. НАН України. — 2012. — № 4. — С. 15—19.

[9] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Подвисоцкий Р. В. *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей* // Доп. НАН України. — 2009. — № 9. — С. 7—11.

[10] Дубинин В. Н., Кириллова Д. А. *Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций* // Дальвост. мат. журн. — 2010. — **10**, № 2. — С. 130—152.

[11] Бахтин А. К., Подвысоцкий Р. В. *Квадратичные дифференциалы и экстремальные задачи о неналегающих областях* // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 1. — С. 439—442.

[12] Заболотний Я. В. *Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області* // Доп. НАН України. — 2011. — № 4. — С. 20—23.

[13] Заболотний Я. В. *Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області* // Доп. НАН України. — 2011. — № 9. — С. 11—14.