Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 412–423

УДК 517.538.7

О. А. Боженко, К. Г. Малютин

(Сумской государственный университет, Сумы)

Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка

ksu21021012@mail.ru
malyutinkg@yahoo.com

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Встановлено два критерії розв'язності задачі вільної інтерпорляції у класі цілих функцій нульового порядку. У формулюванні першого критерію використовується канонічний добуток, який породжується вузлами інтерполяції, у формулюванні другого — міра, яка породжується цими вузлами. У попередніх роботах А. Ф. Леонтьєва, Г. П. Лапіна, К. Г. Малютіна подібна задача розглядалася у класі цілих функцій ненульового порядку.

We establish two criteria of resolvability of a problem of simple free interpolation in a class of entire functions of zero order. In the formulation of the first criterion, the canonical product defined by interpolation knots is used. In the formulation of the second, we use the measure which is defined by these knots. In A. F. Leontyev, G. P. Lapin, K. G. Malyutin previous papers a similar problem was considered in a class of entire functions of non-zero order.

1. Введение. Пусть $f(z)$ — целая функция и $M(f,r) = \max\limits_{\varphi}|f(re^{i\varphi})|$. Через $[\rho,\infty]$ обозначим класс целых функций, порядок которых не превышает ρ, $\rho \geqslant 0$, т.е. таких, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+ M(f,r)}{\ln r} \leqslant \rho\,.$$

В частности, через $\mathcal{E}_0$ обозначим класс целых функций нулевого порядка ($\rho = 0$).

Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a. Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — дивизор, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$. По заданному дивизору D определим меру: $n_D(G) = \sum_{a_n \in G} q_n$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс D будем опускать. Дивизор корней произвольной функции f будем обозначать через D_f. Обозначим через $n_f = n_{D_f}$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a,r))$, $n_{D,a}(r) = n_D(C(a,r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_D(r) = n_{D,0}(r)$.

Из формулы Коши для производных нетрудно получить утверждение: если функция $f \in [\rho, \infty]$, то неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)| \leqslant (k-1)! \exp[|z|^{\rho+\varepsilon}], \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

выполняется при фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших z, $|z| > r_\varepsilon$. Это неравенство является обоснованием целесообразности введения следующего определения.

Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *интерполяционным* в классе $[\rho, \infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1 \leq k\ \ leq q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} \leqslant \rho\,, \tag{1}$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$ со свойством

$$F(a_n)^{(k-1)} = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, q_n,\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Задача (2) в классе $[\rho, \infty]$ в случае, когда $q_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\rho > 0$ впервые рассматривалась А. Ф. Леонтьевым [1]. Им были найдены критерии ее разрешимости в терминах канонических произведений, определяемых дивизором D. Случай кратной интерполяции был рассмотрен Г. П. Лапиным [2], который также рассматривал только случай $\rho > 0$ и получил критерии разрешимости задачи (2) в терминах канонических произведений. Заметим, однако, что в работе [2] задача (2) рассматривалась при следующих ограничениях на значения в узлах интерполяции:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \sup\limits_{1\leq k \leq q_n} |b_{n,k}|}{\ln|a_n|} \leqslant \rho\,,$$

то есть в такой постановке задача не является задачей свободной интерполяции. Позднее К. Г. Малютин [3], исходя из результатов А. Ф. Леонтьева, нашел критерии разрешимости задачи (2) в терминах меры, определяемой дивизором D. Работ, в которых рассматривалась бы интерполяционная задача в классе $\mathcal{E}_0$, в наше поле зрения не попало. В данной работе мы рассматриваем задачу свободной интерполяции и находим критерии разрешимости задачи (2) в классе $\mathcal{E}_0$ как в терминах канонических произведений, определяемых дивизором D, так и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу работы мы делаем замечание, что дивизоры D и $D \cup \{0, q\}$ являются одновременно интерполяционными.

По заданному дивизору D определим семейство функций $\Phi_D^*(z, \alpha) = (n_D(C(z, \alpha|z|)) - q(z))^+$, где $q(z)$ — кратность точки дивизора D, ближайшей к z (если таких несколько, то выбираем любую из них).

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции v и круга $B(z, R)$, на которую будем ссылаться в нашей работе:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi})\, d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\, dt\,. \tag{3}$$

Здесь μ_v — риссова мера функции v.

В случае, если $f(z)$ — целая функция, a — корень функции f кратности q, $v(z) = \ln \left| \dfrac{f(z)}{(z-a)^q} \right|$, то формула Пуассона (3) для круга $B(a, R)$ приобретает вид:

$$\ln \frac{|f^{(q)}(a)|}{q!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a+Re^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^R \frac{n_f(B(a,t)) - q}{t}\, dt - q \ln R\,. \tag{4}$$

Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольный дивизор. Обозначим

$$E_D(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{q_n}.$$

Функция $E_D(z)$ называется канонической функцией дивизора D.

Основным результатом нашей статьи является следующая теорема. Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1| > 0$. Кроме того, как обычно, $b^+ = \max\{b; 0\}$.

Теорема 1. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *дивизор D является интерполяционным в классе $\mathcal{E}_0$;*
2) *для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty \tag{5}$$

и каноническая функция $E_D(z)$ дивизора D удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{q_n!}{|E_D^{(q_n)}(a_n)|} \leqslant 0\,; \tag{6}$$

3) *выполняется соотношение* (5) *и*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln|z|} \ln^+ \int_0^1 \frac{\Phi_D^*(z,\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0\,, \tag{7}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{\ln|a_n|} = 0\,. \tag{8}$$

Докажем вспомогательные утверждения.

Теорема 2. *Пусть D — интерполяционный дивизор в классе $\mathcal{E}_0$. Тогда выполняется соотношение* (5).

Доказательство. Пусть f — целая функция класса $\mathcal{E}_0$, решающая интерполяционную задачу: $f(a_1) = 1$, $f^{(j-1)}(a_1) = 0$, $j = 2, \ldots, q_1$, $f^{(j-1)}(a_n) = 0$, $j = 1, \ldots, q_n$, при $n \geqslant 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Запишем формулу (3) для функции $v(z) = \ln|f(z)|$ и круга $B(a_1, R)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(a_1 + Re^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\, dt\,.$$

Далее устанавливается, что неравенство

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \int_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\, dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon\,, \quad K_\varepsilon > 0\,,$$

выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех $R > R_\varepsilon$.

Отсюда следует неравенство:

$$n(R) \leqslant \int_R^{eR} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon. \qquad (9)$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, то из него следует равенство

$$\lim_{R\to\infty} \frac{n(R)}{R^\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0\,. \qquad (10)$$

Тогда, используя неравенство (9) с $\varepsilon/2$ и равенство (10), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{|a_n|^\varepsilon} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\varepsilon} = \varepsilon \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{1+\varepsilon}}\, dt \leqslant \varepsilon K_\varepsilon \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}} < \infty\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть D — интерполяционный дивизор в классе $\mathcal{E}_0$. Тогда каноническая функция $E_D(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_0$.*

Доказательство. Пусть D — интерполяционный дивизор в классе $\mathcal{E}_0$, а $E(z)$ — его каноническая функция. Из равенства (10) следует, что $E(z)$ — целая функция. Кроме того, справедливо неравенство

$$\ln|E(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right)^{q_n} = \int_0^\infty \ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\, dn(t) = \int_0^\infty \frac{rn(t)}{(t+r)t}\, dt\,,$$

из которого следует, что $E \in \mathcal{E}_0$ (здесь и далее используется обозначение $|z| = r$). Теорема доказана.

2. Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 3)**.** Импликация 1) $\Rightarrow$ (5) доказана в теореме 2. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ (8). Пусть $f(z)$ — функция из класса $\mathcal{E}_0$, решающая интерполяционную задачу $f^{(j-1)}(a_n) = 0$, $j = 1, \ldots, q_n - 1$, $f^{(q_n-1)}(a_n) = (q_n - 1)!$, $n = 1, 2, \ldots$. По условию теоремы такая функция существует. Запишем формулу (4) для функции $f(z)$ при $a = a_n$ и $R = |a_n|$:

$$(q_n - 1)\ln|a_n| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(a_n + |a_n|e^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^{|a_n|} \frac{n_f(B(a_n,t)) - q_n + 1}{t}\, dt\,.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, неотрицателен. Так как $f(z)$ — функция из класса $\mathcal{E}_0$, то отсюда следует равенство (8).

Докажем теперь импликацию 1) $\Rightarrow$ (7). Докажем вначале, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \int\limits_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n,t)) - q_n)^+}{t}\, dt = 0\,. \qquad (11)$$

Если это не так, то существуют последовательность $n_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $k = 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln |a_{n_k}|} \ln^+ \int\limits_0^{|a_n|/2} \frac{(n(B(a_{n_k},t)) - q_{n_k})^+}{t}\, dt \geqslant \varepsilon_0\,. \qquad (12)$$

Дополнительно можно считать, что при $k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $|a_{n_{k+1}}| > 4|a_{n_k}|$.

Пусть $f(z)$ — функция из класса $\mathcal{E}_0$, которая решает интерполяционную задачу $f(a_{n_k}) = 1$, $f^{(j-1)}(a_{n_k}) = 0$, $j = 2, \ldots, q_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $f^{(j-1)}(a_n) = 0$, $j = 1, \ldots, q_n$, если $n \neq n_k$. По условию теоремы такая функция существует.

Запишем формулу (3) для функции $v(z) = \ln |f(z)|$ и круга $B(a_{n_k}, |a_{n_k}|/2)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}| e^{i\varphi} \right) \right| d\varphi - \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k},t))}{t}\, dt\,.$$

Поскольку при $t \in [0, |a_{n_k}|/2]$ справедливо неравенство $n_f(B(a_{n_k},t)) \geqslant$ $\geqslant n(B(a_{n_k},t)) - q_{n_k}$, то

$$\int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n(B(a_{n_k},t)) - q_{n_k})^+}{t}\, dt \leqslant \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k},t))}{t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}| e^{i\varphi} \right) \right| d\varphi\,.$$

Полученное неравенство, соотношение $f \in \mathcal{E}_0$ и неравенство (12) в совокупности противоречивы. Тем самым, равенство (11) доказано.

Из равенства (5) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_{|a_n|/2}^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n,t)) - q_{n_k})^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Вместе с равенством (11) это дает

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_{0}^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n,t)) - q_{n_k})^+}{t}\, dt = 0\,. \tag{13}$$

Пусть z — произвольное комплексное число и $a = a(z)$ — ближайшая к z точка последовательности $\{a_n\}$, $q(z)$ — ее кратность. Обозначим через F_1 множество тех z, для которых выполняется неравенство $|z-a| > |z|/2$. Из условия (5) легко следует, что

$$\limsup_{\substack{z\to\infty\\ z\in F_1}} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int\limits_{0}^{r} \frac{(n(B(z,t)) - q(z))^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что выполняется неравенство $|z-a| \leqslant |z|/2$. Далее имеем

$$\int\limits_{0}^{r} \frac{(n(B(z,t)) - q(z))^+}{t}\, dt = \int\limits_{|z-a|}^{r} \frac{(n(B(z,t)) - q(z))^+}{t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|z-a|}^{r} \frac{(n(B(a,t+|z-a|)) - q(z))^+}{t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u)) - q(z))^+}{u-|z-a|}\, du \leqslant 2 \int\limits_{0}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u)) - q(z))^+}{u}\, du\,.$$

Из приведенных рассуждений, равенства (11) теперь следует, что

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int\limits_{0}^{r} \frac{(n(B(z,t)) - q(z))^+}{t}\, dt = 0\,.$$

После замены переменной $t = \alpha r$ в подынтегральном выражении последнего равенства получим соотношение (7). Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) доказана.

3. Доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 2)**.** Пусть выполняется условия (7) и (8). Напишем равенство (4) для функции $E(z)$ и круга $B(a_n, R)$:

$$\begin{gathered}\ln\frac{|E^{(q_n)}(a_n)|}{q_n!} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|E(a_n+Re^{i\varphi})|\,d\varphi- \\ -\int\limits_0^R\frac{n(B(a_n,t))-q_n}{t}\,dt - q_n\ln R\,.\end{gathered}\tag{14}$$

Равенство (14) перепишем в виде:

$$\begin{gathered}\ln\frac{q_n!}{|E^{(q_n)}(a_n)|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|E(a_n+Re^{i\varphi})|}\,d\varphi+ \\ +\int\limits_0^R\frac{n(B(a_n,t))-q_n}{t}\,dt + q_n\ln R\,.\end{gathered}\tag{15}$$

Далее мы воспользуемся следующей теоремой (см. теорему 11 из [4, Глава I, § 8]).

Теорема С. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0, 2eR)$ $(R > 0)$, $f(0) = 1$ и η — произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0, R)$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $4R\eta$, выполняется неравенство*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\left(2+\ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f, 2eR)\,.$$

Поскольку $E \in \mathcal{E}_0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует r_ε такое, что при $r > r_\varepsilon$ выполняется неравенство $\ln|E(z)| \leqslant r^\varepsilon$. Из этого неравенства и теоремы С, примененной к функции $E(z)$ и кругу $B(0, 3e|a_n|)$, следует, что существуют номер N_ε и число $R_1 \in \in [|a_n|/2, |a_n|]$ такие, что для всех φ и $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$\ln \frac{1}{|E(a_n+R_1e^{i\varphi})|} \leqslant r_n^{\varepsilon}$. Выбрав в равенстве (15) $R = R_1$, получим доказательство импликации (12) $\Rightarrow$ (11). Тем самым импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказана.

4. Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1)**.** Докажем, что из условия (6) следует условие (8). Действительно, запишем формулу (4) для функции $E(z)$ и круга $C(a_n, r_n)$:

$$q_n \ln r_n + \int_0^{r_n} \frac{n_D(C(a_n,t)) - q_n}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| E\left(a_n + r_n e^{i\theta}\right)\right| \, d\theta + \ln \frac{q_n!}{|E^{(q_n)}(a_n)|}\,.$$

Интеграл в левой части равенства — неотрицательный. Тогда (8) следует из (6) и определения класса $\mathcal{E}_0$. Обозначим далее

$$P_{n,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j-1} \frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\Bigg|_{z=a_n}, j = 1, 2, \ldots, q_n, n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Нам понадобится следующая лемма из [5].

Лемма. *Пусть дивизор D удовлетворяет условию* (6)*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln\ln \max_{1\le j\le q_n} \frac{|P_{n,j}|}{r_n^{q_n-j+1}} = 0\,. \quad (17)$$

Положим далее

$$\alpha_{n,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{q_n-m} \frac{1}{j!} P_{n,q_n+1-m-j} b_{n,j+1},\ m = 1, \ldots, q_n, n \in \mathbb{N}\,, \quad (18)$$

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{n,m} \left[\frac{1}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n}\right]^{(m-1)},$$

где $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, которую мы выберем ниже. Заметим [5], что формальный ряд

$$F(z) = E(z) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \quad (19)$$

решает интерполяционную задачу (2).

Покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ функция $F \in \mathcal{E}_0$. Из условия (1), равенств (17) и (18) получаем, что существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, такая, что при всех $m = 1, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_{n,m}| \leqslant \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!} \exp(r_n^{\varepsilon_n}) \,. \tag{20}$$

Кроме того, в силу условия (5), можно считать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-r_n^{\varepsilon_n}) \,. \tag{21}$$

Обозначим $u_{n,m}(z) = \left(\dfrac{1}{z-a_n}\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{S_n}\right)^{(m-1)}$, $m = 1, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, и оценим при $z \notin C(a_n, 2)$. Для этого обозначим через $C_z = \{t : |t-z| = = 1\}$ и воспользуемся интегральной формулой Коши для $u_{n,m}(z)$ в круге C_z, учитывая при этом, что если $|t-z| = 1$, то $|t-a_n| \geqslant 1$ и $|t| \leqslant |z| + 1$,

$$|u_{n,m}(z)| = \frac{(m-1)!}{2\pi r_n^{S_n}} \left| \int\limits_{C_z} \frac{t^{S_n}\, dt}{(t-a_n)(t-z)^m} \right| \leqslant \frac{(m-1)!(|z|+1)^{S_n}}{r_n^{S_n}} \,,$$

$m = 1, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда, с учетом определения функции $P_n(z)$ и (20), получим

$$|P_n(z)| \leq \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{n,m}||u_{n,m}(z)| \leqslant \exp(r_n^{\varepsilon_n}) \frac{(|z|+1)^{S_n}}{r_n^{S_n}} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{q_n} (q_n - m + 1) = \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n}) q_n (q_n+1)}{2 r_n^{S_n}} (|z|+1)^{S_n}$$

при $z \notin C(a_n, 2)$.

Используя равенство (8), получаем далее

$$|P_n(z)| \leqslant \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{r_n^{S_n}} (|z|+1)^{S_n} = \left(\frac{e^2(|z|+1)}{r_n}\right)^{S_n} \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{e^{2S_n}} \,. \tag{22}$$

Положим $S_n = [2r_n^{\varepsilon_n}]$, $n \in \mathbb{N}$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда из (22) получаем

$$|P_n(z)| \leqslant e \exp(-r_n^{\varepsilon_n}) \left(\frac{e^2(|z|+1)}{r_n}\right)^{2r_n^{\varepsilon_n}} \,. \tag{23}$$

Пусть $N = N(r)$ — наименьшее целое число, обладающее свойством $|a_n| \geqslant e^2(r+1)$, N_0 — фиксированное число такое, что $|a_{n_0}| \geqslant 1$. Функцию $F(z)$ представим в виде суммы

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{N_0-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N_0}^{N-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N}^{\infty} P_n(z) = \\ = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)\,.$$

Рассмотрим слагаемое $F_3(z)$. Из условия (21) и неравенства (23) следует, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} P_n(z) \leqslant C$, где C — некоторая постоянная.

Рассмотрим $F_2(z)$. Так как $|a_{n_0}| \geqslant 1$ при $n \geqslant N_0$, то в силу неравенства (23) справедлива оценка

$$|P_n(z)| \leqslant e\exp(-r_n^{\varepsilon_n})(er)^{4r_n^{\varepsilon_n}}\,,$$

из которой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|F_2(z)| < r^{\varepsilon}$.

Поскольку в представлении $F_1(z)$ сумма содержит конечное число слагаемых, то из полученных оценок следует, что $F(z) \in \mathcal{E}_0$. Теорема полностью доказана.

В заключение покажем, что если дивизор D, $|a_1| > 0$, является интерполяционным в классе $\mathcal{E}_0$, то и дивизор $D_0 = D \cup \{0, q_0\}$ также является интерполяционным в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу (2) для дивизора D_0. Пусть $f \in \mathcal{E}_0$ — решение интерполяционной задачи (2) для дивизора D. Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + E(z)\sum_{j=1}^{q_0} A_j[(-1)^{j-1}(j-1)!z^{q_0-j}],$$

где

$$A_j = \frac{(-1)^{j-1}}{(q_0-j)!(j-1)!}\sum_{i=0}^{q_0-j} C_{q_0-j}^{i}[b_{0,i+1} - f^{(j-1)}(0)]\left[\frac{1}{E(z)}\right]_{z=0}^{(q_0-j-i)}\,,$$

принадлежит классу $\mathcal{E}_0$ и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

Список литературы

[1] Леонтьев А. Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. АН СССР. — 1948. — **5**. — С. 785—787.

[2] Лапин Г. П. *Интерполирование в классе целых функциях конечного порядка* // Изв. вузов. — 1959. — **5**, № 12. — С. 146—153.

[3] Малютин К. Г. *Интерполяция голоморфными функциями.* — Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Харьков, 1980. — 104 с.

[4] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

[5] Малютін К. Г., Герасименко В. О. *Вільна інтерполяція цілими функціями скінченного гамма-типу* // Мат. студії. — 2007. — **28**, № 1. — С. 45—50.