Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 424–431

УДК 517.54

Виктор В. Горяйнов

(Волжский гуманитарный институт Волгоградского государственного университета, Волжский)

Эволюционные семейства конформных отображений с неподвижными точками

goryainov_vv@hotmail.com

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

В работе изучается полугруппа конформных отображений единичного круга в себя, оставляющих неподвижными начало координат и точку на границе, в которой отображение имеет конечную угловую производную. Решается вопрос дифференцируемости эволюционного семейства в этой полугруппе и определяется вид эволюционного уравнения, т. е. аналога уравнения Левнера–Куфарева.

1. Введение. Задача вложения отображения в дифференцируемое семейство, связывающее его с тождественным преобразованием, возникает в различных областях математики и ее приложений. Так в дифференциальной динамике одним из центральных вопросов является возможность вложения отображения в однопараметрическую группу (или полугруппу) диффеоморфизмов. В теории аналитических функций аналогичная задача связана с проблемой дробных итераций. В теории случайных ветвящихся процессов задача вложения вероятностной производящей функции в однопараметрическую полугруппу эквивалентна вложению процесса Гальтона–Ватсона в однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем.

В связи с развитием параметрического метода теории однолистных функций, направленного на решение проблемы коэффициентов (известной также как гипотеза Бибербаха), Левнер [1] выделил класс

[0]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00434-а).

$\mathfrak{L}$ конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя, нормированных условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Принципиальным моментом в исследовании Левнера было то, что $\mathfrak{L}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Однопараметрические полугруппы, т. е. непрерывные гомоморфизмы $t \mapsto f^t$, действующие из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geq 0\}$ с топологией вещественных чисел в $\mathfrak{L}$, представляют собой дифференцируемые по t семейства отображений. Однако, как сразу же заметил Левнер, класс отображений, вложимых в однопараметрические полугруппы, достаточно узок. Поэтому он пришел к выводу о необходимости расширения конструкции однопараметрической полугруппы с сохранением полугрупповых свойств. Это естественно (см., например, [2]) приводит к следующему понятию.

Определение. *Двупараметрическое семейство* $\{w_{t,s}\colon 0 \leq s \leq t \leq \leq T\}$ *функций* $w_{t,s}$ *из* $\mathfrak{L}$ *будем называть эволюционным семейством полугруппы* $\mathfrak{L}$ *на промежутке* $[0, T]$, *если выполняются следующие условия:*

(i) $w_{t,s}(z) = w_{t,\tau} \circ w_{\tau,s}(z)$ *при* $0 \leq s \leq \tau \leq t \leq T$,

(ii) $w_{t,s}(z) \to z$ *локально равномерно в* $\mathbb{D}$ *при* $(t - s) \to 0$.

В отличие от случая однопараметрической полугруппы вопрос дифференцируемости эволюционного семейства решается значительно сложнее. Для эволюционных семейств специального вида этот вопрос был решен в работе Левнера [1], а в общем случае в работах Куфарева [3] и Поммеренке [4].

Настоящая работа посвящена изучению эволюционных семейств полугруппы $\mathfrak{L}[0, 1]$ конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D}$ в себя, которые оставляют неподвижными точки $z = 0$ и $z = 1$, а также имеют конечную угловую производную в точке $z = 1$.

2. Угловая производная и окрестность тождественного преобразования. Обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность всех голоморфных (не обязательно однолистных) отображений f единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Для каждой f из $\mathfrak{P}$ определим

$$B(f) = \sup\left\{ \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \Big/ \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \,:\, z \in \mathbb{D} \right\}.$$

Заметим, что

$$B(f) \geq \frac{|1-f(0)|^2}{1-|f(0)|^2} \geq \frac{1-|f(0)|}{1+|f(0)|} \tag{1}$$

и $B(f) < \infty$ в том и только том случае (см., например, [5]), если существуют угловые пределы

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 1, \quad \lim_{z\to 1} f'(z) = \lim_{z\to 1} \frac{f(z)-1}{z-1} = B(f).$$

Поэтому в случае $B(f) < \infty$ эта величина называется угловой производной функции f в точке $z = 1$ и обозначается $f'(1)$.

Через $\mathfrak{P}[0,1]$ обозначим совокупность функций f из $\mathfrak{P}$, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$ и $f'(1) < \infty$, т. е. тех, которые оставляют неподвижными точки $z = 0$, $z = 1$ и имеют конечную угловую производную в точке $z = 1$. Заметим, что $\mathfrak{P}[0,1]$ представляет собой полугруппу относительно операции композиции, т. е., если f и g из $\mathfrak{P}[0,1]$, то их композиция $\varphi = f \circ g$ также принадлежит $\mathfrak{P}[0,1]$. При этом $\varphi'(1) = f'(1)g'(1)$. Из неравенства (1) и условия $f(0) = 0$ также следует, что $f'(1) \geq 1$ для любой функции f из $\mathfrak{P}[0,1]$ и $f'(1) = 1$ лишь в случае $f(z) \equiv z$. Оказывается в терминах $f'(1)$ можно описать окрестность тождественного преобразования в полугруппе $\mathfrak{P}[0,1]$. Более точно, имеет место следующий аналог леммы Левнера для полугруппы $\mathfrak{P}[0,1]$.

Лемма. *Пусть $f \in \mathfrak{P}[0,1]$ и $f'(1) = \beta > 1$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство*

$$|f(z) - z| \leq \frac{4|z|}{1-|z|}(\beta - 1) \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку $f(0) = 0$, то функция $\varphi(z) = f(z)/z$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ и $|\varphi(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{D}$, т. е. $\varphi \in \mathfrak{P}$. При этом $B(\varphi) = \beta - 1$. В силу теоремы Жюлиа–Каратеодори для всех $z \in \mathbb{D}$ будет выполняться неравенство

$$\frac{|1-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq (\beta-1)\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

Поскольку

$$\frac{|1-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \geq \frac{(1-|\varphi(z)|)|1-\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{|1-\varphi(z)|}{1+|\varphi(z)|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|1-\varphi(z)| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{z-f(z)}{z}\right|,$$

то

$$|f(z)-z| \leq 2|z|\frac{|1-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq 2|z|(\beta-1)\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \leq (\beta-1)\frac{4|z|}{1-|z|}$$

и лемма доказана.

3. Эволюционные семейства и эволюционное уравнение. Пусть $\{w_{t,s}\colon 0 \leq s \leq t \leq T\}$ — эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{L}[0,1]$ на промежутке $[0,T]$. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $F(z,s) = w_{T,s}(z)$, $0 \leq s \leq T$. Из условия (i) в определении эволюционного семейства следует, что

$$F(z,s) = F(\cdot,t) \circ w_{t,s}(z) \tag{3}$$

при $0 \leq s \leq t \leq T$. Это означает, что семейство областей $D_s = F(\mathbb{D},s)$, $0 \leq s \leq T$, расширяется с возрастанием параметра s и $D_T = \mathbb{D}$. Условие (ii) показывает, что это семейство областей зависит от параметра s непрерывно в смысле сходимости областей к ядру по Каратеодори. Будем называть $F(z,s) = w_{T,s}(z)$ производящей функцией эволюционного семейства $\{w_{t,s}\colon 0 \leq s \leq t \leq T\}$, поскольку по нему эволюционное семейство восстанавливается посредством равенств

$$w_{t,s}(z) = F^{-1}(F(z,s),t),$$

$0 \leq s \leq t \leq T$.

Поскольку $F(\cdot,s) \in \mathfrak{L}[0,1]$, то при всех $s \in [0,T]$ определена

$$\gamma(s) = F'(1,s),$$

где $F' = \partial F/\partial z$. Если $0 \leq s < t \leq T$, то из равенства (3) следует, что

$$\gamma(s) = \gamma(t)w'_{t,s}(1).$$

В силу неравенства $w'_{t,s}(1) \geq 1$ получаем $\gamma(s) \geq \gamma(t)$. Таким образом, $\gamma(s)$ является невозрастающей функцией на $[0,T]$ и $\gamma(T) = 1$.

Для формулировки следующего результата введем в рассмотрение класс $\mathcal{Q}$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций h, допускающих представление в виде

$$h(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-\varkappa}{1-\varkappa z}d\mu(\varkappa),$$

где μ – вероятностная мера на $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Теорема. *Пусть* $\{w_{t,s}\colon\ 0 \le s \le t \le T\}$ *— эволюционное семейство полугруппы* $\mathfrak{L}[0,1]$ *на промежутке* $[0,T]$ *и* $F(z,s) = w_{T,s}(z)$, $0 \le s \le$ $\le T$, *— ее производящая функция. Тогда, если* $\gamma(s) = F'(1,s)$ *является абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *функцией, то для каждого* $z \in \mathbb{D}$ *функция* $s \mapsto F(z,s)$ *также будет абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *и для почти всех* s *выполняется равенство*

$$\frac{\partial}{\partial s}F(z,s) \;=\; -\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}z(1-z)H(z,s)F'(z,s), \tag{4}$$

где $H(z,s)$ *— функция, определенная на* $\mathbb{D}\times[0,T]$, *голоморфная по* z, *измеримая по* s *и такая, что* $H(\cdot,s) \in \mathcal{Q}$ *для почти всех* $s \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $0 \le s < t \le T$ и $z \in \mathbb{D}$ фиксированы. Тогда

$$|F(z,t) - F(z,s)| \;=\; |F(z,t) - F\left(w_{t,s}(z),t\right)| \;=\; \left|\int\limits_{w_{t,s}(z)}^{z} F'(\zeta,t)d\zeta\right|.$$

Отсюда с использованием неравенства Пика (см., например, [5]) получаем

$$|F(z,t) - F(z,s)| \;\le\; \frac{1}{1-|z|^2}\left|w_{t,s}(z) - z\right| \;\le\; \frac{1}{1-|z|}\left|w_{t,s}(z) - z\right|.$$

Далее, в силу леммы об окрестности тождественного преобразования,

$$|F(z,t) - F(z,s)| \;\le\; \frac{4}{(1-|z|)^2}\left(w'_{t,s}(1) - 1\right).$$

Замечая также, что из равенства (3) следует соотношение $w'_{t,s}(1) =$ $= \gamma(s)/\gamma(t)$, приходим к неравенству

$$|F(z,t) - F(z,s)| \;\le\; \frac{4}{(1-|z|)^2}\left(\frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} - 1\right) \;\le\; \frac{4}{(1-|z|)^2}(\gamma(s) - \gamma(t)).$$

Полученное неравенство показывает, что вместе с функцией $\gamma(s)$ абсолютно непрерывной является функция $s \mapsto F(z,s)$. Следовательно, при каждом фиксированном $z \in \mathbb{D}$ почти всюду на $(0,T)$ существует производная $(\partial/\partial s)F(z,s)$. Используя теорему Витали (см., например, [6]), получаем, что для почти всех $s \in (0,T)$ существует локально равномерный в $\mathbb{D}$ предел

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left(F(z,s+\Delta s)-F(z,s)\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial s}F(z,s).$$

Таким образом, для почти всех s производная $(\partial/\partial s)F(z,s)$ определена и представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию. Остается определить ее вид. Для этого заметим вначале, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F(z,t) \;=\; \lim_{s\uparrow t}\frac{F(z,t)-F(z,s)}{t-s} \;=\; \lim_{s\uparrow t}\frac{F(z,t)-F(w_{t,s}(z),t)}{t-s} \;=$$
$$=\lim_{s\uparrow t}\frac{F(z,t)-F(w_{t,s}(z),t)}{z-w_{t,s}(z)}\,\frac{z-w_{t,s}(z)}{t-s} \;=\; F'(z,t)\lim_{s\uparrow t}\frac{z-w_{t,s}(z)}{t-s}\,.$$

Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование единичного круга $\mathbb{D}$ на себя

$$L_{t,s}(z) \;=\; \frac{(\gamma(s)+\gamma(t))z+\gamma(s)-\gamma(t)}{\gamma(s)+\gamma(t)+(\gamma(s)-\gamma(t))z}\,,$$

которое оставляет неподвижными точки $z=\pm 1$ и $L'_{t,s}(1)=\gamma(t)/\gamma(s)$. Определим также $\omega_{t,s}(z)=w_{t,s}\circ L_{t,s}(z)$. Очевидно, что $\omega_{t,s}$ оставляет неподвижной точку $z=1$ и $\omega'_{t,s}(1)=1$. Заметим, что

$$\frac{z-w_{t,s}(z)}{t-s} \;=\; \frac{z-\omega_{t,s}(z)}{t-s} \;+\; \frac{\omega_{t,s}(z)-w_{t,s}(z)}{t-s},$$

и выясним вид пределов каждого из слагаемых правой части этого равенства при $s\uparrow t$. Используя условие $w'_{t,s}(z)\to 1$ при $s\uparrow t$ и соотношение

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{L_{t,s}(z)-z}{t-s} \;=\; \lim_{s\uparrow t}\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{t-s}\,\frac{1-z^2}{\gamma(s)+\gamma(t)+(\gamma(s)-\gamma(t))z} \;=$$
$$=\; -\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}(1-z^2),$$

получаем

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{\omega_{t,s}(z)-w_{t,s}(z)}{t-s} \;=\; \lim_{s\uparrow t}\frac{w_{t,s}\circ L_{t,s}(z)-w_{t,s}(z)}{L_{t,s}(z)-z}\,\frac{L_{t,s}(z)-z}{t-s} \;=$$
$$=\; -\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}(1-z^2).$$

Далее, поскольку $\omega'_{t,s}(1)=1$, то по теореме Жюлиа–Каратеодори для всех $z\in\mathbb{D}$ выполняется неравенство

$$\frac{|1-\omega_{t,s}(z)|^2}{1-|\omega_{t,s}(z)|^2}\le\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\,,$$

которое можно переписать в эквивалентном виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1+\omega_{t,s}(z)}{1-\omega_{t,s}(z)}\right\}\ge\operatorname{Re}\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\},$$

откуда следует неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\omega_{t,s}(z)-z}{(1-z)(1-\omega_{t,s}(z))}\right\}\ge 0\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{\omega_{t,s}(z)-z}{(t-s)(1-z)(1-\omega_{t,s}(z))}=p(z,t),$$

где $p(z,t)$ является голоморфной в единичном круге $\mathbb{D}$ функцией по z и $\operatorname{Re}p(z,t)\ge 0$ при $z\in\mathbb{D}$. Отсюда с учетом условия $\omega_{t,s}(z)\to z$ при $s\uparrow t$ получаем

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{\omega_{t,s}(z)-z}{t-s}=(1-z)^2p(z,t).$$

В результате

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{z-w_{t,s}(z)}{t-s}=-(1-z)^2p(z,t)-\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}(1-z^2).$$

Поскольку $w_{t,s}(0)\equiv 0$, то правая часть последнего равенства должна обращаться в нуль при $z=0$, что приводит к соотношению

$$p(0,t)=-\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}\,.$$

Если $\gamma'(t)=0$, то в силу принципа открытости для аналитических функций $p(z,t)=0$ для всех $z\in\mathbb{D}$. Допустим, что $\gamma'(t)<0$ ($\gamma(t)$ является невозрастающей функцией). Тогда в силу теоремы Рисса–Герглотца функцию $p(z,t)$ можно представить в виде

$$p(z,t)=-\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\,d\mu_t(\varkappa),$$

где μ_t – вероятностная мера на $\mathbb{T}$. С учетом этого получаем

$$\lim_{s\uparrow t}\frac{z-w_{t,s}(z)}{t-s} = \frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}(1-z)^2\left[\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\,d\mu_t(\varkappa) - \frac{1+z}{1-z}\right] = \frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}(1-z)^2\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} - \frac{1+z}{1-z}\right)d\mu_t(\varkappa) =$$

$$= \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}z(1-z)\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varkappa-1}{1-\varkappa z}\,d\mu_t(\varkappa) = -\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}z(1-z)H(z,t),$$

где

$$H(z,t) = \int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1-\varkappa}{1-\varkappa z}\,d\mu_t(\varkappa)$$

— функция класса $\mathcal{Q}$.

В результате мы приходим к дифференциальному соотношению (4) и теорема доказана.

Заметим, что (4) можно рассматривать как аналог уравнения Левнера–Куфарева для полугруппы $\mathfrak{L}[0,1]$.

Список литературы

[1] Löwner K. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I* // Math. Ann. — 1923. — **89**. — P. 103—121.

[2] Горяйнов В. В. *Полугруппы конформных отображений* // Мат. сб. — 1986. — **129(171)**, № 4. — С. 451—472.

[3] Куфарев П. П. *Об однопараметрических семействах аналитических функций* // Мат. сб. — 1943. — **13(55)**, № 1. — С. 87—118.

[4] Pommerenke Ch. *Über die Subordination analytischer Funktionen* // J. Reine Angew. Math. — 1965. — **218**. — P. 159—173.

[5] Ahlfors L. V. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory.* — New York: McGraw–Hill Book Company, 1973. — 166 p.

[6] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.