Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 442–449

УДК 517.54

И. В. Денега

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Об одной экстремальной задаче о частично налегающих областях

iradenega@yandex.ru

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Досліджуються екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язані з оцінками функціоналів, заданих на системах частково перетинних областей. Основна увага приділяється узагальненню та посиленню деяких відомих результатів у даній тематиці.

Paper is devoted to extremal problems in geometric function theory of complex variables that are associated with estimates of functionals defined on systems of partially intersection domains. We generalize and strengthening some known results in this subject.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1 — 11]. Многие такие задачи сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности, результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий (см., например [3]). Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1 — 11]. В нашей работе усилены и обобщены некоторые результаты этой теории.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ =$

$= (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [5, 8, 7]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B (см. [7, 2]) соотношением

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \lg r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \lg r(B, a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\right\}$, назовем ***$n$-лучевой***, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < < \arg a_{k+1}\}$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, при $k = \overline{1, n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a \in D$, то будем говорить, что $D(a)$ есть связная компонента D, содержащая точку a; $D_k(a_p)$ — связная компонента множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p, $p \in \{k, k-1\}$, $k = \overline{1, n}$; $D_k(0)$ – связная компонента множества $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w = 0$.

Внутренним радиусом $r\,(D, a_k)$ ***открытого множества*** D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D, содержащей точку a.

Пусть открытое множество D содержит точку $w = 0$ и произвольную n-лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет ***условию неналегания*** относительно системы точек A_n, если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ попарно не пересекаются для каждого $k = \overline{1, n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=0}^n$ — произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\widehat{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$. Будем говорить, что система $\{B_k\}_{k=0}^n$ удовлетворяет ***условию частичного налегания*** относительно некоторой системы A_n, если множество $\widehat{D}$ удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n-лучевой системы точек A_n. Из определения совершенно очевидно, что произвольная система взаимно неналегающих областей (то есть $B_p \cap B_j = \emptyset$ при $p \neq j$) удовлетворяет условию частичного налегания.

Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционала следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — совокупность областей, удовлетворяющих условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$.

2. Основные результаты. Введем функцию

$$P_\delta(x) = 2^{x^2+6}\, x^{x^2+2-2\delta}\,(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$x \in (0, 2]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (0, 1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}6$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}\left(A_n\right) = 1$, и любого набора областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n, выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta \cdot n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\delta} \left[P_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}. \qquad (1)$$

Знак равенства здесь достигается в случае, когда a_k и B_k при $k = \overline{0, n}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (0, 1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}6$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$,* *и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, справедливо неравенство* (1), *знак равенства в котором достигается в том же случае, что и в теореме* 1.

Доказательство теоремы 1. При доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи работ [4 — 7, 9] и свойства разделяющего преобразования (см. [5, 8]).

Очевидно, что $r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r\left(\widehat{D}, a_k\right) = r\left(\widehat{D}(a_k), a_k\right)$. Отсюда $r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(\widehat{D}(a_0), 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(\widehat{D}(a_k), a_k\right)$. Аналогично тому, как это делается в работах [4, 5, 7, 9], получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2 \gamma}\left(G_0^{(k)}, 0\right) r\left(G_1^{(k)}, -i\right) r\left(G_2^{(k)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $G_0^{(k)}$, $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$ – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2$$

($0 \in G_0^{(k)}$, $-i \in G_1^{(k)}$, $i \in G_2^{(k)}$). Следуя работам [4, 6], переходим к функции

$$P_\delta(x) = 2^{x^2+6}\, x^{x^2+2-2\delta}\, (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\, (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0, 2],$$

и в результате получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta n}{2}} \Big(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)^{\delta} \left[\prod_{k=1}^{n} P_\delta\left(\alpha_k \sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\tilde{J}_n(\gamma) = \Big(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)^{-\delta} J_n(\gamma),$$

для которого справедлива оценка

$$\tilde{J}_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} P_\delta\left(\alpha_k \sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим функцию $P_\delta(x)$ при $\delta = 0,6$. Функция $P_{0,6}(x)$ — логарифмически выпуклая вверх на промежутке $[0, x_0]$, где $x_0 \approx \approx 1,129342$, $P_{0,6}(x_0) \approx 0,78817$. Эта функция возрастает на промежутке $[0, x_1]$ ($x_1 \approx 0,482354$ — точка максимума функции $P_{0,6}(x)$, $P_{0,6}(x_1) \approx 1,330486$) от значения $P_{0,6}(0) = 0$ до $P_{0,6}(x_1)$ и убывает на промежутке $(x_1, x_2]$, $x_2 \approx 1,912709$, от значения $P_{0,6}(x_1)$ до $P_{0,6}(x_2) \approx 0,428581$, и, наконец, на промежутке $(x_2, 2]$ она снова возрастает от значения $P_{0,6}(x_2)$ до $P_{0,6}(2) \approx 0,435275$.

Далее используем метод, предложенный в работах [4, 6]. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} P_\delta(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,6.$$

Пусть $F_\delta(x) = \ln\left(P_\delta(x)\right)$ и $X^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}$ — произвольный экстремальный набор точек этой задачи. Обозначим

$$Z_\delta(X^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n} F_\delta(x_k^{(0)}).$$

Повторяя рассуждения работы [6], приходим к утверждению: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то справедливо равенство

$$F'_\delta(x_k^{(0)}) = F'_\delta(x_j^{(0)}) \tag{2}$$

и при некотором $x_j^{(0)} = 2$ для произвольного $x_k^{(0)} < 2$ выполняются соотношения

$$F'_\delta(x_k^{(0)}) \leqslant F'_\delta(x_j^{(0)}) = F'_\delta(2) \leqslant 1, \tag{3}$$

где $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$.

Докажем, что если функция $Z_\delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} F_\delta(x_k)$ достигает максимума в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ при условиях $0 < x_k^{(0)} \leqslant 2$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{\gamma}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,6$, то $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Положим $\sigma_1 := \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}$, $\sigma_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1, n}$. Функция

$$F'_\delta(x) = 2x\ln(2x) + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x} - \frac{2\delta}{x}$$

убывает на промежутке $(0, x_0]$ $(1,129342 \leqslant x_0 \leqslant 1,324664)$ и возрастает на $[x_0, 2)$.

Функция $F''_\delta(x)$ строго возрастает на $(0,2)$ и существует x_0, $1,129342 \leqslant x_0 \leqslant 1,324661$ такое, что $\operatorname{sign} F''_\delta(x) \equiv \operatorname{sign}(x - x_0)$.

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{\gamma}$, получаем неравенство

$$\sigma_1 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma} - \sigma_0}{n-1} \leqslant \frac{2-\sigma_0}{n-1}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим случай $n = 3$. Если $\sigma_0 \leqslant x_0$, то в силу строгой монотонности $F'_\delta(x)$ на $[0,\, x_0]$ из условия задачи получаем, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)}$.

Пусть $x_0 < \sigma_0 \leqslant 1,7$, тогда $F'_\delta(\sigma_0) \leqslant F'_\delta(1,7) \leqslant F'_0(1,7) \leqslant 0,135284$. На основании неравенства (4), имеем

$$\sigma_1 < \frac{1}{2}\left(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) = (2\sqrt{\gamma} - \sigma_0)/2 \leqslant$$

$$\leqslant (2 - x_0)/2 \leqslant (2 - 1,129342)/2 < 0,435329,$$

отсюда $\sigma_1 < 0,435329$. В силу убывания $F'_\delta(x)$ на $(0,\, x_0)$ имеем

$$F'_\delta(\sigma_1) > F'_\delta(0,435329) > F'_{0,6}(0,435329) \geqslant 0,249922 > F'_0(1,7) \geqslant 0,135284,$$

что противоречит соотношению (2). Следовательно, получаем противоречие с экстремальностью набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ при $\sigma_0 \in (x_0;\, 1,7]$.

Пусть $1,7 < \sigma_0 \leqslant 2$. Тогда $F'_\delta(\sigma_0) \leqslant F'_\delta(2) \leqslant F'_0(2) = 1$ и

$$\frac{1}{2}\left(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) = (2\sqrt{\gamma} - \sigma_0)/2 \leqslant (2 - 1,7)/2 \leqslant 0,15,$$

отсюда $\sigma_1 < 0,15$ и

$$F'_\delta(\sigma_1) > F'_\delta(0,15) > F'_{0,6}(0,15) \geqslant 4,464479 > F'_\delta(2),$$

что противоречит соотношениям (2) и (3). Отсюда следует, что для произвольного $\sigma_0 \in (x_0; 2]$ набор $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ не может быть экстремальным. Из всего сказанного выше заключаем, что для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \in (0,\, x_0]$ и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)}$.

Рассмотрим случай $n \geqslant 4$. Если $\sigma_0 \leqslant x_0$, то в силу строгой монотонности $F'_\delta(x)$ на $[0,\, x_0]$ из условия задачи получаем, что

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Предположим, что $x_0 < \sigma_0 \leqslant 2$. Тогда в силу возрастания $F'_\delta(x)$ на $[x_0, 2]$ имеем $F'_\delta(\sigma_0) \leqslant F'_\delta(2) < F'_0(2) = 1$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = (2-b)/(t-1)$, $b < 2$. Она убывает при $t \geqslant 2$, поскольку $\varphi'(t) < 0$ для всех $t \geqslant 2$. Следовательно, в силу неравенства (4) для всех $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,1]$

$$\sigma_1 < (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = (2\sqrt{\gamma} - \sigma_0)/(n-1) \leqslant$$

$$\leqslant (2 - x_0)/(n-1) \leqslant (2 - 1,129342)/3 < 0,290219,$$

отсюда $\sigma_1 < 0,290219$. В силу убывания $F'_\delta(x)$ на $(0,\, x_0)$ имеем неравенства

$$F'_\delta(\sigma_1) > F'_\delta(0,290219) > F'_{0,6}(0,290219) \geqslant 1,460079 > F'_\delta(2),$$

которые противоречат соотношениям (2) и (3). Таким образом, получено противоречие с экстремальностью набора $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ при $\sigma_0 \in (x_0;\, 2]$. Следовательно, для экстремального набора $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ возможен только случай, когда $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1,n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Таким образом, окончательно имеем соотношение

$$\tilde{J}_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta n}{2}} \left[P_\delta \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Реализация знака равенства в этом неравенстве проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159—245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[4] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48—66.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3—76.

[6] Ковалев Л. В. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96—98.

[7] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — 308 с.

[8] Дубинин В. Н. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Владивосток: "Дальнаука" ДВО РАН. — 2009. — 390 с.

[9] Бахтин А. К., Денега И. В. *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек* // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. — **8**, № 1. — С. 12—21.

[10] Денега И. В. *Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей* // Доп. НАН України, 2012. — № 5. — С. 19—22.

[11] Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Denega I. V. *Inequalities in problems on non-overlapping domains* // arXiv:1108.2383 [math. CV] 11 Aug 2011.