

УДК 532.595

**А. В. Константинов**

*(Институт математики НАН Украины, Киев)*

## Обобщенная задача Фарадея для резервуара, частично заполненного жидкостью, совершающего наклонные движения

akonst.im@mail.ru

*Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается*

В работе рассмотрено обобщение классической задачи Фарадея о развитии параметрического резонанса в механической системе “резервуар на маятниковом подвесе — жидкость со свободной поверхностью”. При этом точка подвеса движется в вертикальной плоскости по заданному гармоническому закону. Исследование выполнено на основе эффективной нелинейной многомодовой математической модели, учитывающей совместные наклонные движения резервуара и колебания жидкости со свободной поверхностью. Показано, что учет новых факторов может существенно повлиять на качественную картину развития параметрического резонанса в системе.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. Резервуар представляет собой физический маятник с внутренними степенями свободы — жидкостью со свободной поверхностью. Точка подвеса резервуара движется поступательно в вертикальной плоскости по заданному гармоническому закону  $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ . Резервуар может совершать наклонные движения за счет колебаний свободной поверхности жидкости. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым.

Исследование параметрического резонанса проведем на основе математической модели, разработанной в работе [1]. Следуя [1], запишем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров:  $a_i$  — коэффициентов разложений в ряд возмущений свободной поверхности жидкости  $\xi$  по формам колебаний  $\psi_i$  и  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  — углов поворота резервуара относительно условно неподвижной системы отсчета:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \quad (1) \\
& + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \\
& = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} - E_{prji}^{3*}) \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \\
& \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pijr}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{prij}^4) \right] + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + \\
& +g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3), \\
& \sum_i \ddot{a}_i \left[ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right] + \quad (2) \\
& + 2\ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{tank}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{tank}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) - \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
& - 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) - \\
& - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) - \\
& - 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \right. \\
& \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2),$$

где  $\delta_{ir}$  — символ Кронекера,  $\rho$  — плотность жидкости;  $M_T$  — масса резервуара;  $M_F$  — масса жидкости;  $h_T$  и  $h_F$  — смещение центров тяжести резервуара и жидкости относительно плоскости невозмущенной свободной поверхности жидкости;  $H$  — уровень заполнения резервуара;  $\vec{\varepsilon}$  — радиус-вектор поступательного перемещения резервуара.

Система уравнений (1), (2) описывает динамику совместного движения механической системы “резервуар на подвесе — жидкость со свободной поверхностью” при заданном законе движения точки подвеса резервуара  $\vec{\varepsilon}$ .

**2. Определение собственных частот механической системы.** Определим низшие собственные частоты механической системы “резервуар — жидкость со свободной поверхностью”. В соответствии с теорией механических колебаний [2] запишем уравнения (1), (2) только для первой антисимметричной формы  $\psi_1$  с возможностью наклонного движения по координате  $\alpha_1$  вокруг оси  $OX$  в виде

$$\ddot{a}_1 + \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v} \ddot{\alpha}_1 + \frac{N_1 g}{\alpha_1^v} a_1 = 0,$$

$$E_{11}^{1*} \ddot{a}_1 + 2\left(\frac{1}{\rho} J_{tank}^{11} + A_{11}^2\right) \ddot{\alpha}_1 + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \alpha_1 = 0$$

и с учетом обозначений  $a = a_1$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\lambda_F = \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v}$ ,  $\lambda_T = \frac{\rho E_{11}^{1*}}{2(J_{tank}^{11} + \rho A_{11}^2)}$ ,  $\omega_F^2 = \frac{N_1 g}{\alpha_1^v}$ ,  $\omega_T^2 = \frac{g(M_T h_T + M_F h_F)}{J_{tank}^{11} + \rho A_{11}^2}$  представим далее в каноническом виде

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\alpha} + \omega_F^2 a = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\alpha} + \omega_T^2 \alpha = 0, \quad (4)$$

где  $\omega_F^2$  и  $\omega_T^2$  — соответственно парциальные частоты свободной поверхности жидкости и физического маятника (резервуара на подвесе). Представляя периодические решения системы уравнений (3), (4) в виде

$$a = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t), \quad \alpha = A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

и используя метод Бубнова–Галеркина, запишем уравнения для амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ :

$$(\omega^2 - \omega_F^2) A_1 + \lambda_F \omega^2 A_2 = 0, \quad \lambda_T \omega^2 A_1 + (\omega^2 - \omega_T^2) A_2 = 0.$$

Записанная система уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Приравнивая этот определитель к нулю и решая алгебраическое уравнение 4-й степени

$$(1 - \lambda_T \lambda_F) \omega^4 - (\omega_T^2 + \omega_F^2) \omega^2 + \omega_T^2 \omega_F^2 = 0,$$

получаем формулу для определения собственных частот механической системы

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_T^2 + \omega_F^2 \mp \sqrt{(\omega_T^2 - \omega_F^2)^2 + 4\omega_T^2 \omega_F^2 \lambda_T \lambda_F}}{2(\lambda_T \lambda_F - 1)}}, \quad (5)$$

Пусть резервуар радиуса  $R = 1$  м с высотой стенок  $R = 1,5H$ , толщиной боковых стенок  $0,015$  м и толщиной дна и верхней крышки  $0,006$  м частично заполнен водой до глубины  $H = R$ . Массы резервуара  $M_T$  и жидкости  $M_F$  связаны соотношением  $M_T = 0,1M_F$ . Для таких параметров парциальная частота жидкости  $\omega_F = 4,144$  Гц всегда постоянна (поскольку истечение жидкости отсутствует), а парциальная частота резервуара на подвесе, как физического маятника, зависит от длины подвеса (Рис. 1) и имеет максимальное значение при нулевой длине подвеса ( $\omega_T^{max} = 5,236$  Гц).

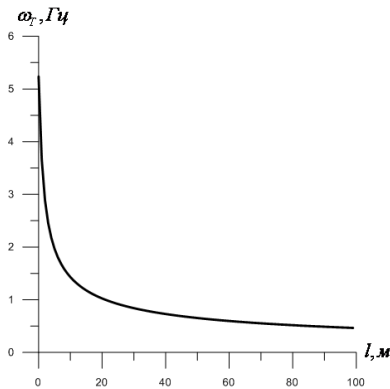


Рис. 1

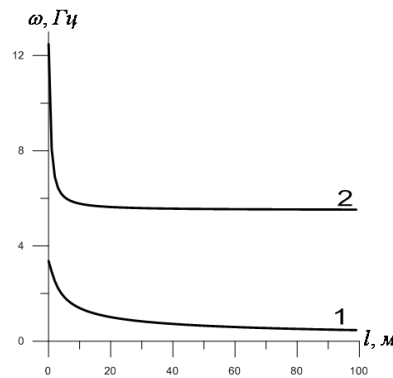


Рис. 2

На Рис. 2 показаны зависимости значений первой (1) и второй (2) собственной частот системы “резервуар на подвесе — жидкость со свободной поверхностью” в зависимости от длины подвеса. Как видно

из графиков, увеличение длины подвеса способствует уменьшению значений собственных частот. Поскольку при увеличении длины подвеса характер движения резервуара с жидкостью все более и более близок к поступательному движению, значения собственных частот системы также приближаются к значениям, характерным для поступательного движения ( $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 5,319$ ). Однако полного совпадения не наблюдается, поскольку наличие подвеса создает возвращающую силу, которая отсутствует при поступательном движении.

**3. Построение областей неустойчивости и исследование условий выхода системы на режим параметрического резонанса.** Уравнения (1), (2) описывают процесс развития параметрических колебаний в механической системе “резервуар — жидкость со свободной поверхностью“, когда точка подвеса резервуара движется вертикально по заданному гармоническому закону  $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ . Как известно из теории параметрического резонанса [2], на плоскости параметров  $(p, H_z)$  существуют области, в которых решения уравнений (1), (2) будут неограниченно возрастать, т.е. области динамической неустойчивости. Построение областей неустойчивости будет ответом на вопрос: при каких значениях внешних параметров движения точки подвеса  $(p, H_z)$  система “резервуар — жидкость со свободной поверхностью“ при наличии малого начального возмущения свободной поверхности жидкости или малого углового отклонения подвеса от вертикального положения выйдет на режим параметрического резонанса, т.е. на режим больших возмущений свободной поверхности или угловых отклонений подвеса.

Для построения зон параметрического резонанса в обобщенной задаче Фарадея воспользуемся линеаризованными уравнениями (4), (5), дополнив их параметрическим вертикальным возбуждением точки подвеса резервуара по гармоническому закону  $\varepsilon_z = H_z \cos pt$

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\alpha}_F + \omega_F^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\alpha} + \omega_T^2 \alpha = 0, \quad (7)$$

где  $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{N_1 g}$ .

Зоны неустойчивости по первому резонансу ограничены периодическими решениями с частотой  $\frac{p}{2}$ , поэтому периодические решения для системы (6), (7) представляем в виде

$$a = A_1 \cos\left(\frac{pt}{2}\right) + B_1 \sin\left(\frac{pt}{2}\right), \quad \alpha = A_2 \cos\left(\frac{pt}{2}\right) + B_2 \sin\left(\frac{pt}{2}\right),$$

и с использованием метода Бубнова–Галеркина получаем уравнения границ первого параметрического резонанса

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda_T \lambda_F - 1 - 2\nu H_z \omega_F^2}} \left( -\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2 (-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 p_2 &= \sqrt{\frac{2}{1 + 2\nu H_z \omega_F^2 - \lambda_T \lambda_F}} \left( -\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2 (-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 p_3 &= \sqrt{\frac{2}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}} \left( -\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2 (1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 p_4 &= \sqrt{\frac{2}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}} \left( -\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2 (1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

На Рис. 3 и Рис. 4 на плоскости “внешняя частота — амплитуда возбуждения” построены области неустойчивости для первой (Рис. 3) и второй (Рис. 4) собственной частот для разных длин подвеса (1 —  $l = 100$  м, 2 —  $l = 10$  м, 3 —  $l = 1$  м). Области неустойчивости для каждой выбранной длины подвеса ограничены кривыми с одинаковыми номерами. Как видно из графиков, увеличение длины подвеса способствует смещению областей неустойчивости в область низких частот, что характерно для поступательного движения. Кроме того, увеличение длины подвеса сужает области неустойчивости для обеих собственных частот. Расположение областей неустойчивости для второй собственной частоты более существенно зависит от длины подвеса, чем для первой, — их пересечение будет происходить только в диапазоне больших амплитуд внешнего воздействия.

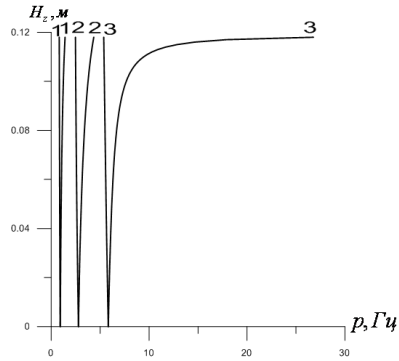


Рис. 3

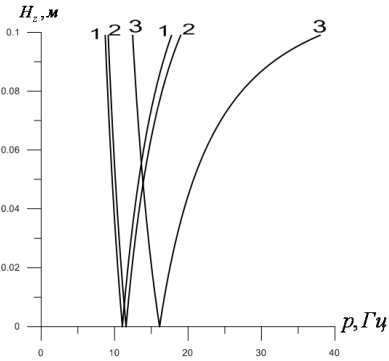


Рис. 4

**4. Выводы.** В работе рассмотрено обобщение классической задачи Фарадея о развитии параметрического резонанса в механической системе “резервуар на маятниковом подвесе — жидкость со свободной поверхностью”. При этом точка подвеса движется в вертикальной плоскости по заданному гармоническому закону. Показано, что условия выхода системы на режим параметрического резонанса в совместном движении существенно зависят от длины подвеса — этот параметр обуславливает и расположение, и ширину областей неустойчивости.

## Список литературы

- [1] Лимарченко О. С., Ясинский В. В. *Нелинейная динамика конструкций с жидкостью*. — Киев: Нац. техн. ун-т Украины "КПИ", 1997. — 338 с.
- [2] Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 600 с.