Збірник праць Ін-ту математики НАН України   2013, том 10, N 4–5, 496–506

УДК 517.518.8

А. В. Покровский

(Институт математики НАН Украины, Киев)

О существовании и единственности полинома наилучшего приближения в среднем со знакочувствительным весом

pokrovsk@imath.kiev.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Найдены необходимые и достаточные условия на чебышевское пространство L и знакочувствительный вес p на отрезке $\Delta = [-1, 1]$, при которых каждая функция $f \in C(\Delta)$ имеет единственный элемент наилучшего приближения пространством L в среднем с суммируемым знакочувствительным весом p.

Введение. В 1924 г. Д. Джексон [1] доказал, что любая вещественная непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ имеет единственный алгебраический полином наилучшего приближения степени не выше n в метрике $L(\Delta)$. М. Г. Крейн [2, статья IV] обобщил (методом отличным от метода Джексона) этот результат на случай приближения непрерывных функций в метрике $L(\Delta)$ чебышевским пространством. Однако, оригинальное доказательство Джексона непосредственно переносится и на случай приближения чебышевскими пространствами.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: при каких условиях на чебышевское пространство L и знакочувствительный вес $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ, компоненты которого являются суммируемыми функциями на Δ, каждая функция $f \in C(\Delta)$ имеет единственный элемент наилучшего приближения пространством L в среднем со знакочувствительным весом p.

Чтобы пояснить постановку этой задачи и сформулировать результат, дающий ее решение, напомним некоторые определения и введем ряд обозначений.

Как обычно, $C(\Delta)$ обозначает линейное пространство всех вещественных непрерывных функций f на отрезке Δ с нормой $\|f\|_{C(\Delta)} := \max_{x\in\Delta} |f(x)|$, $L(\Delta)$ — линейное пространство всех вещественных измеримых функций f на Δ, для которых конечна норма $\|f\|_{L(\Delta)} := \int_\Delta |f(x)|dx$. Напомним, что чебышевским пространством на Δ мы называем конечномерное линейное пространство $L \subset C(\Delta)$ размерности n такое, что каждая функция $l \in L$, тождественно не равная нулю, имеет на Δ не более, чем $n-1$ нуль. В дальнейшем мы будем называть элементы чебышевского пространства обобщенными полиномами.

Следуя работам Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [3, 4], определим знакочувствительный вес p как упорядоченную пару неотрицательных функций $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ. Знакочувствительный вес p мы будем называть суммируемым на отрезке Δ, если обе функции p_- и p_+ принадлежат $L(\Delta)$. Для функции $f \in C(\Delta)$ обозначим через $f^+(x)$ и $f^-(x)$ соответственно ее положительную и отрицательную часть: $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$. Для суммируемого знакочувствительного веса p на Δ определим на множестве функций $f \in C(\Delta)$ неотрицательный сублинейный функционал $P_{p,\Delta}$ равенством $P_{p,\Delta}(f) := \int_\Delta (f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x))dx$.

Пусть L — линейное подпространство $C(\Delta)$, p — суммируемый знакочувствительный вес на Δ. Будем говорить, что элемент $g \in L$ является элементом наилучшего приближения функции $f \in C(\Delta)$ пространством L в среднем со знакочувствительным весом p, если спрведливо равенство $P_{p,\Delta}(g - f) = \inf_{l\in L} P_{p,\Delta}(l - f) =: E(p, L, f)$.

Следуя упомянутым выше работам Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова, определим свободу системы "суммируемый знакочувствительный вес p — линейное пространство $L \subset C(\Delta)$" равенством

$$W(p, L) := \sup_{l\in L\setminus\{0\}} \frac{\|l\|_{C(\Delta)}}{P_{p,\Delta}(l)}.$$

Для суммиремого знакочувствительного веса $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ определим носители $\operatorname{supp} p_-$ и $\operatorname{supp} p_+$ функций p_- и p_+ как соответственно носители борелевских мер μ_- и μ_+ на Δ, определенных равенствами $d\mu_-(x) = p_-(x)dx$, $d\mu_+(x) = p_+(x)dx$. Носитель $\operatorname{supp} p$ знакочувствительного веса p определим равенством $\operatorname{supp} p = \operatorname{supp} p_- \cup \cup \operatorname{supp} p_+$.

В принятых выше обозначениях сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на отрезке Δ, $\operatorname{supp} p = \Delta$, L — чебышевское подпространство в $C(\Delta)$. Тогда для того, чтобы каждая функция $f \in C(\Delta)$ имела единственный элемент наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $W(p, L) < \infty$.*

1. Вспомогательные результаты. Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм. Чтобы сформулировать первую из них для функции $f \in C(\Delta)$ и суммируемого знакочувствительного веса $p = = (p_-, p_+)$ на Δ введем обозначения: $Z(f) := \{x \in \Delta : f(x) = 0\}$, $(f, p)(x) := f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x)$. Поскольку для суммируемого знакочувствительного веса p сублинейный функционал $P_{p,\Delta}$ конечен на линейном пространстве $C(\Delta)$, то для любых $f, g \in C(\Delta)$ существует конечная односторонняя производная

$$dP_{p,\Delta}(f, g) := \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{P_{p,\Delta}(f + \varepsilon g) - P_{p,\Delta}(f)}{\varepsilon}.$$

В самом деле, из сублинейности функционала $P_{p,\Delta}$ следует, что разностное отношение под знаком предела в определении $dP_{p,\Delta}(f, g)$ является возрастающей функцией от ε и оно ограничено снизу величиной $-P_{p,\Delta}(-g)$. Легко проверяется (см., например, [5, стр. 34]), что при фиксированном f функционал $dP_{p,\Delta}(f, g)$ сублинеен по g. В следующей лемме дается явный вид односторонней производной $dP_{p,\Delta}(f, g)$.

Лемма 1. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на отрезке Δ, $f, g \in C(\Delta)$. Тогда имеет место равенство*

$$dP_{p,\Delta}(f, g) = \int_{Z(f)} |(g, p)(x)|dx + \int_{\Delta} g(x)(\operatorname{sign} f, p)(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f, g \in C(\Delta)$, $\varepsilon > 0$, $A(\varepsilon) := \{x \in \Delta : |f(x)| \leq \varepsilon\}$. Ввиду отмеченной выше сублинейности функционала $dP_{p,\Delta}(f, g)$ по g можно без уменьшения общности считать, что

$\|g\|_{C(\Delta)} \le 1$. Тогда имеем цепочку соотношений

$$P_{p,\Delta}(f+\varepsilon g) - P_{p,\Delta}(f) = \int_\Delta |(f+\varepsilon g, p)(x)|dx - \int_\Delta |(f,p)(x)|dx =$$

$$= \varepsilon \int_{Z(f)} |(g,p)(x)|dx + \int_{\Delta\setminus A(\varepsilon)} |(f+\varepsilon g, p)(x)|dx +$$

$$+ \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |(f+\varepsilon g, p)(x)|dx - \int_{\Delta\setminus A(\varepsilon)} |(f,p)(x)|dx - \int_{A(\varepsilon)} |(f,p)(x)|dx =$$

$$= \varepsilon \int_{Z(f)} |(g,p)(x)|dx + \varepsilon \int_{\Delta\setminus A(\varepsilon)} g(x)(\operatorname{sign} f, p)(x)dx +$$

$$+ \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |f+\varepsilon g, p)(x)|dx - \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |(f,p)(x)|dx =$$

$$= \varepsilon \int_{Z(f)} |(g,p)(x)|dx + \varepsilon \int_\Delta g(x)(\operatorname{sign} f, p)(x)dx +$$

$$+ \left\{ \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |(f+\varepsilon g, p)(x)|dx - \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |(f,p)(x)|dx - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} g(x)(\operatorname{sign} f, p)(x)dx \right\}.$$

Оценим сверху модуль слагаемого в фигурных скобках. Пользуясь тем, что мера множества $A(\varepsilon) \setminus Z(f)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$ и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, имеем

$$\left| \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |f+\varepsilon g, p)(x)|dx - \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} |(f,p)(x)|dx - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} g(x)(\operatorname{sign} f, p)(x)dx \right| \le$$

$$\le 2\varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} (p_-(x) + p_+(x))dx + \varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} (p_-(x) + p_+(x))dx +$$

$$+ \varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} (p_(x) + p_+(x))dx \le 4\varepsilon \int_{A(\varepsilon)\setminus Z(f)} (p_-(x) + p_+(x))dx = o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to +0$. Отсюда сразу получаем (1). Лемма доказана.

Следующая лемма — критерий элемента наилучшего приближения типа Крипке–Ривлина (см. [6]).

Лемма 2. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на Δ, L — линейное подпространство в $C(\Delta)$. Тогда для того, чтобы элемент $g \in L$ доставлял наилучшее приближение функции $f \in C(\Delta)$ подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p, необходимо и достаточно, чтобы при всех $l \in L$ выполнялось условие*

$$\int_{Z(g-f)} |(l,p)(x)|dx + \int_{\Delta} l(x)(\mathrm{sign}(g-f),p)(x)dx \geq 0\,. \tag{2}$$

Доказательство. Из определения односторонних производных сублинейного функционала $P_{p,\Delta}$ вытекает, что $g \in L$ является элементом наилучшего приближения функции $f \in C(\Delta)$ в среднем со знакочувствительным весом p тогда и только тогда, когда при всех $l \in L$ выполнено условие $dP_{p,\Delta}(g-f,l) \geq 0$. Принимая во внимание лемму 1, получаем заключение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на отрезке Δ, $\operatorname{supp} p = \Delta$, и пусть g_1 и g_2 — элементы наилучшего приближения функции $f \in C(\Delta)$ в среднем со знакочувствительным весом p линейным подпространством $L \subset C(\Delta)$. Тогда при всех $x \in \Delta$ выполняется условие*

$$(g_1-f)(x)(g_2-f)(x) \geq 0\,. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 3, а ее заключение нарушается. Тогда найдется отрезок $\delta = [a,b] \subset \subset \Delta$, $a < b$, такой что при всех $x \in \delta$ выполнено условие $(g_1-f)(x)(g_2-f)(x) < 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что всюду на δ выполняются неравенства $(g_1-f)(x) > 0$, $(g_2-f)(x) < 0$. Из сублинейности функционала $P_{p,\Delta}$ следует, что функция $(g_1+g_2)/2$ является элементом наилучшего приближения функции f подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. Отсюда получаем равенство

$$\int_{\Delta} |(g_1-f,p)(x)|dx + \int_{\Delta} |(g_2-f,p)(x)|dx =$$
$$= \int_{\Delta} |(g_1-f+g_2-f,p)(x)|dx. \tag{4}$$

Пусть $\int_{\delta} |(g_1-f+g_2-f,p)(x)|dx = 0$. Тогда из условия $\operatorname{supp} p = \Delta$ получаем неравенство

$$\int_\delta |(g_1 - f, p)(x)|dx + \int_\delta |(g_2 - f, p)(x)|dx > \int_\delta |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx.$$

Складывая это неравенство с неравенством

$$\int_{\Delta\setminus\delta} |(g_1 - f, p)(x)|dx + \int_{\Delta\setminus\delta} |(g_2 - f, p)(x)|dx \geq \int_{\Delta\setminus\delta} |(g_1 - f + g_2 - f)(x)|dx,$$

получаем неравенство

$$\int_\Delta |(g_1 - f, p)(x)|dx + \int_\Delta |(g_2 - f, p)(x)|dx > \int_\Delta |(g_1 - f + g_2 - f)(x)|dx, \quad (5)$$

противоречащее равенству (4).

Пусть теперь $\int_\delta |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx > 0$. Тогда для одного из непрересекающихся множеств $\delta_+ := \{x \in \delta : (g_1 - f + g_2 - f)(x) \geq 0\}$ и $\delta_- := \{x \in \delta : (g_1 - f + g_2 - f)(x) < 0\}$ выполнено либо неравенство $\int_{\delta_+} |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx > 0$, либо $\int_{\delta_-} |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx >$ > 0. Пусть для определенности имеет место первое из этих неравенств. Тогда $0 \leq (g_1 - f + g_2 - f)(x) < (g_1 - f)(x)$ при всех $x \in \delta_+$, откуда

$$\int_{\delta_+} |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx < \int_{\delta_+} |(g_1 - f, p)(x)|dx. \quad (6)$$

С другой стороны, всегда выполнено неравенство

$$\int_{\Delta\setminus\delta_+} |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx \leq \int_{\Delta\setminus\delta_+} |(g_1 - f, p)(x)|dx + \int_{\Delta\setminus\delta+} |(g_2 - f, p)(x)|dx.$$

Складывая это неравенство с (6), получаем неравнство (5), противоречащее равенству (4).

Аналогично рассматривается случай $\int_{\delta_-} |(g_1 - f + g_2 - f, p)(x)|dx > 0$. Лемма 3 полностью доказана.

Следующие две леммы являются частными случаями результатов Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [3] (следствие 3.1а и теорема 2.1).

Лемма 4. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на Δ, L — конечномерное линейное подпространство в $C(\Delta)$, $W(p, L) < \infty$. Тогда каждая функция $f \in C(\Delta)$ имеет хотя бы один* *элемент наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p.*

Лемма 5. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на Δ, L — конечномерное линейное подпространство в $C(\Delta)$, $W(p, L) = \infty$. Тогда существует такая функция $l \in L$, что $\|l\|_{C(\Delta)} = 1$ и $P_{p,\Delta}(l) = 0$.*

В следующей лемме приведено одно из свойств чебышевских пространств (см. [7, с. 13]).

Лемма 6. *Пусть L — n-мерное чебышевское подпространство в $C(\Delta)$. Тогда для любого $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и для любого набора точек $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$ существует такая функция $l \in L$, что $\|l\|_{C(\Delta)} = 1$ и*

$$(-1)^i l(x) \geq 0, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, \ldots, m.$$

2. Доказательство теоремы 1. Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на Δ, $\operatorname{supp} p = \Delta$, L — n-мерное чебышевское подпространство в $C(\Delta)$.

Необходимость. Предположим противное: $W(p, L) = \infty$. Пусть f — произвольная функция из $C(\Delta)$. Тогда для нее либо не существует элемента наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p, либо он существует. Пусть, для определенности, g — элемент наилучшего приближения функции f подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. По лемме 5 существует такая функция $l \in L$, что $\|l\|_{C(\Delta)} = 1$ и $P_{p,\Delta}(l) = \|(l, p)\|_{L(\Delta)} = 0$. Но тогда из цепочки соотношений

$$E(p, L, f) \leq P_{p,\Delta}(g - f + l) \leq P_{p,\Delta}(g - f) + P_{p,\Delta}(l) = E(p, L, f) + 0$$

следует, что $g + l$ является элементом наилучшего приближения функции f подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. При этом $g + l \neq g$. Таким образом, у функции f есть два различных элемента наилучшего приближения пространством L в среднем со знакочувствительным весом p. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Воспользуемся рассуждениями, приведенными в монографии Г. Нюрнбергера [7, с. 59]. Пусть $W(p, L) < \infty$. По лемме 4 каждая функция $f \in C(\Delta)$ имеет хотя бы один элемент наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. Предположим, что для некоторой $\bar{f} \in C(\Delta)$

такой элемент не единственный. Пусть g_1 и g_2 — два различных элемента наилучшего приближения функции $\bar{f}$ подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. Положим $f = \bar{f} - g_1$ и $g_0 = g_2 - g_1$. Тогда $0 \in L$ и $g_0 \in L$ — два различных элемента наилучшего приближения функции f подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p. По лемме 3 при всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство $f(x)(f(x) - g_0(x)) \geq 0$. Отсюда следует, что

$$\Big|f(x) - \frac{1}{2}g_0(x)\Big| = \Big|\frac{1}{2}(f(x) - g_0(x)) + \frac{1}{2}f(x)\Big| = \\ = \frac{1}{2}\Big|f(x) - g_0(x)\Big| + \frac{1}{2}\Big|f(x)\Big|, \qquad x \in \Delta.$$

Поэтому, если $f(x) - \frac{1}{2}g_0(x) = 0$, то $|f(x) - g_0(x)| + |f(x)| = 0$, откуда вытекает, что $g_0(x) = 0$. Следовательно,

$$Z\big(\frac{1}{2}g_0 - f\big) \subset Z(g_0)\,. \tag{7}$$

Поскольку L — n-мерное чебышевское пространство, то из (7) следует, что функция $\frac{1}{2}g_0 - f$ имеет на Δ не более, чем $n-1$ нуль. Поэтому существуют $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, точки $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < < x_m = 1$ и $\sigma \in \{-1, 1\}$ такие, что

$$\sigma(-1)^i\Big(\frac{1}{2}g_0(x) - f(x)\Big) > 0, \qquad x \in (x_{i-1}, x_1), \qquad i = 1, 2, \dots, m\,.$$

По лемме 6 существует функция $l \in L$ такая, что $\|l\|_{C(\Delta)} = 1$ и

$$\sigma(-1)^i l(x) \geq 0, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, m\,.$$

Тогда для такой функции l, принимая во внимание леммы 1 и 2, имеем

$$dP_{p,\Delta}(\frac{1}{2}g_0 - f, -l) = \\ = \int_{Z(\frac{1}{2}g_0 - f)} |(-l,p)(x)|dx - \int_\Delta l(x)(\mathrm{sign}(\frac{1}{2}g_0 - f), p)(x)dx = \\ = 0 - \|(l,p)\|_{L(\Delta)} = -P_{p,\Delta}(l) < 0$$

(поскольку $P_{p,\Delta}(l) > 0$ ввиду условия $W(p, L) < \infty$). С другой стороны, $\frac{1}{2}g_0$ — элемент наилучшего приближения функции f подпространством L со знакочувствительным весом p (ввиду сублинейности функционала $P_{p,\Delta}$) и, следовательно, $dP_{p,\Delta}(\frac{1}{2}g_0 - f, -l) \geq 0$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что функция $\bar{f}$ имеет два различных элемента наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p неверно. Это завершает доказательство теоремы 1.

3. Заключительные замечания. В связи с формулировкой и доказательством теоремы 1 сделаем несколько замечаний.

Пусть $p \equiv (1,1)$ на отрезке Δ. Тогда $P_{p,\Delta}(f) = \|f\|_{L(\Delta)}$ при всех $f \in C(\Delta)$. Поскольку нормы $\|\cdot\|_{C(\Delta)}$ и $\|\cdot\|_{L(\Delta)}$ эквивалентны на любом чебышевском пространстве $L \subset C(\Delta)$ как две нормы на конечномерном линейном пространстве, то $W(p,L) < \infty$ и теорема 1 дает в этом случае упомянутые во введении результаты Д. Джексона и М. Г. Крейна.

Следующий пример показывает существенность условия $\operatorname{supp} p = \Delta$ для справедливости заключения теоремы 1.

Пусть функция $f \in C(\Delta)$ задана равенствами $f(x) = -1$ при $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, $f(x) = 2x$ при $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f(x) = 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, и пусть знакочувствительный вес $p = (p_-, p_+)$ определен равенствами $p_-(x) = p_+(x) = 1$ при $x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, $p_-(x) = p_+(x) = 0$ при $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Пусть L — одномерное чебышевское пространство, состоящее из всех постоянных функций на Δ. Тогда любая функция $l(x) \equiv c \in [-1,1]$ является элементом наилучшего приближения функции f пространством L в среднем со знакочувствительным весом p, при этом $W(p,L) < \infty$, но $\operatorname{supp} p = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Приведем теперь пример, показывающий, что при нарушении условия $W(p,L) < \infty$ элемент наилучшего приближения в теореме 1 может не существовать. Пусть L — двумерное чебышевское пространство на Δ, состоящее из всех линейных функций, $f(x) \equiv x^{1/3}$, и пусть знакочувствительный вес $p = (p_-, p+)$ определен равенствами $p_-(x) = x$ при $x \geq 0$, $p_-(x) = 0$ при $x < 0$, $p_+(x) = 0$ при $x \geq 0$, $p_-(x) = |x|$ при $x < 0$. Тогда легко проверяется, что для любой функции $l \in L$ выполняется равенство $P_{p,\Delta}(l - f) > 0$, при этом для функций вида $l_a(x) \equiv ax$, $a = \text{const}$, имеем $P_{p,\Delta}(l_a - f) \to 0$ при $a \to \infty$. Таким образом, $E(p,L,f) = 0$, но функция $g \in L$, для которой $P_{p,\Delta}(g - f) = 0$, не существует. В этом примере $\operatorname{supp} p = \Delta$, а $W(p,L) = \infty$. Заметим также, что в этом примере компоненты знакочувствительного веса p непрерывны на Δ.

В заключении укажем одно достаточное условие для конечности свободы $W(p,L)$. Для этого нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, формулировка и доказательство которого во многом аналогичны формулировке и доказательству леммы 3.3 из работы [3].

Лемма 7. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на отрезке Δ, L — чебышевское подпространство в $C(\Delta)$, $W(p,L) = \infty$, и пусть m — некоторая функция из L, для которой $\|m\|_{C(\Delta)} = 1$, $P_{p.\Delta}(m) = 0$. Тогда для любой функции $f \in C(\Delta)$ выполняется равенство $E(p,L,f) = 0$.*

Доказательство. Пусть $l \in L$, $l(x)$ интерполирует $f(x)$ в нулях функции m, $t = \mathrm{const} > 0$. Через $\Delta(t)$ обозначим множество всех $x \in \Delta$, в которых $tm(x) - (f(x) - l(x))$ отлично от нуля и имеет тот же знак, что и $m(x)$. Поскольку $\sup_{x\in\Delta\setminus\Delta(t)} |tm(x) - (f(x) - l(x))| \to 0$ при $t \to \infty$, то

$$P_{p,\Delta}(tm - (f - l)) = \int_\Delta |((tm - (f - l)), p)(x)|dx =$$

$$= \int_{\Delta(t)} |((tm - (f - l)), p)(x)|dx + \int_{\Delta\setminus\Delta(t)} |((tm - (f - l)), p)(x)|dx \leq$$

$$\leq 0 + \left(\sup_{x\in\Delta\setminus\Delta(t)} |tm(x) - (f(x) - l(x))|\right) \int_{\Delta\setminus\Delta(t)} (p_-(x) + p_+(x))dx \to 0$$

при $t \to \infty$. Следовательно, $E(p,L,f) = 0$ и лемма доказана.

Непосредственно из леммы 7 и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть p — суммируемый знакочувствительный вес на отрезке Δ, $\operatorname{supp} p = \Delta$, L — чебышевское подпространство в $C(\Delta)$ и $E(p,L,f) > 0$ для некоторой функции $f \in C(\Delta)$. Тогда $W(p,L) < \infty$ и каждая функция из $C(\Delta)$ имеет единственный элемент наилучшего приближения подпространством L в среднем со знакочувствительным весом p.*

Список литературы

[1] Jackson D. *A general class of problems in approximation* // Amer. J. of Math. — 1924. — **46**. — P. 215—234.

[2] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. *О некоторых вопросах теории моментов.* — Харьков: Гос. изд-во науч.-технич. лит-ры, 1938.

[3] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. *Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности)* // Изв. РАН. Сер. мат. — 1998. — **62**. — № 6. — С. 59—102.

[4] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. *Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)*// Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — **63**. — № 3. — С. 77—118.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*. — Москва: Эдиториал УРСС, 2000.

[6] Kripke B. B., Rivlin T. J. *Approximation in the metric of* $L^1(X,\mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — **115**. — P. 101—122.

[7] Nürnberger G. *Approximation by Spline Functions*. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.