Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 532–541

УДК 517.927

Г. Чеханова

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач

anna0024@i.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Найдены достаточные условия сходимости матриц Грина по параметру ε для многоточечных линейных краевых задач дифференциальных уравнений высоких порядков в пространствах непрерывно дифференцируемых функций.

1. Введение и основной результат. Пусть заданы числа $k-1$, $m, n \in \mathbb{N}$. На конечном интервале (a,b) рассмотрим разбиение $a =: a_1 < a_2 < \ldots < a_k := b$ и полуоднородную многоточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения порядка $m \geqslant 2$:

$$y^{(m)}(\cdot) + p_{m-1}(\cdot)y^{(m-1)}(\cdot) + \ldots + p_0(\cdot)y(\cdot) = f(\cdot), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \beta_{j_{r,i}} y^{(r-1)}(a_j) = 0, \quad j = \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{2}$$

где $p_{r-1}(\cdot;\varepsilon) \in C^{(n-1)}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in C^{(n-1)}$, $\beta_{j_{r,i}}(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ при $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Введем параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и рассмотрим на данном интервале (a,b) семью полуоднородных многоточечных краевых задач для линейного дифференциального уравнения порядка $m \geqslant 2$:

$$y^{(m)}(t;\varepsilon) + p_{m-1}(t;\varepsilon)y^{(m-1)}(t;\varepsilon) + \ldots + p_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m}\beta_{j_{r,i}}(\varepsilon)y^{(r-1)}(a_j;\varepsilon)=0, \quad j=\overline{1,k}. \tag{4}$$

Решение $y(\cdot)$, а также функции Грина задач (3), (4) будут также зависеть от параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

В работе [1] получены достаточные условия сходимости матриц Грина общих краевых задач по норме пространства L_∞. В [2] для многоточечных краевых задач найдены условия равномерной сходимости матриц Грина к матрице Грина предельной краевой задачи.

Цель данной работы состоит в нахождении достаточных условий сходимости матриц Грина для многоточечных краевых задач для уравнений высоких порядков по норме пространств $C^{(n)}$.

Будем считать далее, что выполнено

Предложение $\mathcal{I}$. *Однородная предельная краевая задача*

$$y^{(m)}(t;0)+p_{m-1}(t;0)y^{(m-1)}(t;0)+...+p_0(t;0)y(t;0)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m}\beta_{j_{r,i}}(0)y^{(r-1)}(a_j;0)=0, \quad j=\overline{1,k},$$

имеет лишь тривиальное решение.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть выполняется предложение $\mathcal{I}$ и при $\varepsilon\to+0$ условия:*

1) $\|p_{r-1}(\cdot;\varepsilon)-p_{r-1}(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0, \quad r=\overline{1,m}\,;$
2) $\beta_{j_{r,i}}(\varepsilon)\to\beta_{j_{r,i}}(0), \quad r,i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,k}\,.$

Тогда для достаточно малых ε существуют функции Грина $G(t,s;\varepsilon)$ задач (3), (4) *и на полосах $(a_j,a_{j+1})\times(a,b)$*

$$\|G(t,s;\varepsilon)-G(t,s;0)\|_{(n)}\to 0, \quad \varepsilon\to+0\,.$$

2. Вспомогательные результаты. Для доказательства основной теоремы рассмотрим параметризованную числом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ семью полуоднородных многоточечных краевых задач

$$y'(t;\varepsilon)=A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon)+f(t;\varepsilon), \quad t\in(a,b), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k}B_j(\varepsilon)y(a_j;\varepsilon)=0\,, \tag{6}$$

где матрица-функция $A(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$, вектор-функция $f(\cdot;\varepsilon) \in \in (C^{(n-1)})^{m}$, матрицы $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $j = \overline{1,k}$, и где $a = a_1 < a_2 < < \ldots < a_k = b$.

Будем далее везде предполагать, что справедливо

Предложение $\mathcal{E}$. *Однородная предельная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0),$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(0)y(a_j;0) = 0$$

имеет лишь тривиальное решение.

Как известно (см. [3]) для многоточечных краевых задач (3), (4) существуют матрицы Грина $G(\cdot,\cdot)$ такие, что при всех $t \in (a,b)$ $G(t,s) \in C^{(n)}([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, и с помощью которых решение полуоднородной многоточечной краевой задачи представляется в виде

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds, \quad t \in (a,b), \quad f(\cdot) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}.$$

Как известно (см., например, [3]), для многоточечной краевой задачи существует нормированная матрица Грина, которая представима в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)[B_1 + \sum\limits_{j=2}^{k} B_jY(a_j)]^{-1}Z(s), & t \leqslant s; \\ Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)[B_1 + \\ \qquad + \sum\limits_{j=2}^{k} B_jY(a_j)]^{-1}Z(s), & s < t. \end{cases} \tag{7}$$

где $Z(s) := \sum\limits_{j:a_j\leqslant s} B_jY(a_j)Y^{-1}(s)$, а матрица-функция $Y(\cdot)$ — единственное решение (матрицант) линейного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \in (a,b), \tag{8}$$

с начальным условием в некоторой фиксированной точке

$$Y(t_0) = I_m, \quad t_0 \in (a,b). \tag{9}$$

Доказательство главной теоремы будет опираться на следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\det[B_1 + \sum_{j=2}^{k} B_j Y(a_j)] \neq 0$$

и выполнены следующие условия:

1) $\|A(t;\varepsilon) - A(t;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to +0;$

2) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to +0, \quad j = \overline{1,k}.$

Тогда для достаточно малых ε *существуют матрицы Грина задач* (5), (6), *для которых на полосах выполняется предельное соотношение* $(a_j, a_{j+1}) \times (a, b)$

$$\|G(t,s;\varepsilon) - G(t,s;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{10}$$

Доказательство. Матрица Грина $G(t,s)$ разрывна в точках $s = a_j$, поэтому корректно будет исследовать ее непрерывность по параметру ε на каждой из полос $(a_j, a_{j+1}) \times (a, b)$, $j = \overline{1,k}$.

Сделаем некоторые обозначения, пользуясь видом нормированной матрицы Грина, которая представлена формулой (7).

$$G(t,s,\varepsilon) = \begin{cases} -Y(t;\varepsilon)[B_1(\varepsilon) + \sum\limits_{j=2}^{k} B_j(\varepsilon) Y(a_j;\varepsilon)]^{-1} Z(s;\varepsilon) = \\ \qquad = S_\varepsilon(t,s) + X_\varepsilon(t,s), \quad t \leqslant s, \\ Y(t;\varepsilon) Y^{-1}(s;\varepsilon) - \\ \qquad -Y(t;\varepsilon)[B_1(\varepsilon) + \sum\limits_{j=2}^{k} B_j(\varepsilon) Y(a_j;\varepsilon)]^{-1} Z(s;\varepsilon) = \\ \qquad = S_\varepsilon(t,s), \quad s < t. \end{cases}$$

$$G(t,s,0) = \begin{cases} -Y(t;0)[B_1(0) + \sum\limits_{j=2}^{k} B_j(0) Y(a_j;0)]^{-1} Z(s;0) = \\ \qquad = S_0(t,s) + X_0(t,s), \quad t \leqslant s, \\ Y(t;0) Y^{-1}(s;0) - \\ \qquad -Y(t;0)[B_1(0) + \sum\limits_{j=2}^{k} B_j(0) Y(a_j;0)]^{-1} Z(s;0) = \\ \qquad = S_0(t,s), \quad s < t. \end{cases}$$

Достаточно показать справедливость следующих утверждений (см. [1]):

$$\det[B_1 + \sum_{j=2}^{k} B_j Y(a_j)] \neq 0, \tag{11}$$

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to +0, \tag{12}$$

$$\|Z(s;\varepsilon)-Z(s;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to +0. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательную лемму, которая доказана в [4].

Лемма 2.1. *Если выполняется предложение* $\mathcal{E}$ *и условия*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0,$

2) $\|B_j(\varepsilon)-B_j(0)\|\to 0,\quad j=\overline{1,k},$

то для достаточно малых ε

$$\det[B_1(\varepsilon)+\sum_{j=2}^{k}B_j(\varepsilon)Y(a_j;\varepsilon)]\neq 0.$$

Лемма 2.1 показывает справедливость первого необходимого нам равенства (11).

Введем метрическое пространство невырожденных матриц-функций $\mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}:=\{Y(t)\in (C^{(n)})^{m\times m}: Y(t_0)=I_m, \det Y(t)\neq 0\}$ с метрикой $d_{(n)}(Y,Z):=\|Y(\cdot)-Z(\cdot)\|_{(n)}$, которая не зависит от выбора точки t_0 и параметров $m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$.

Теорема 2.2. *Нелинейное отображение* $A(\cdot)\mapsto Y(\cdot)$ *в задаче, заданной уравнениями* (8), (9), *является гомеоморфизмом банахова пространства* $(C^{(n-1)})^{m\times m}$ *на метрическое пространство* $\mathcal{Y}_{t_0}^{(n)}$ *при всех рассматриваемых значениях параметров* n, m *и* t_0.

Доказательство данной теоремы приведено в [4].

В теореме 2.2 доказана непрерывная зависимость матрицанта $Y(t)$ от коэффициента $A(t)$ и доказано, что как только

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,,$$

то

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Из условия 1) теоремы 2.1 следует, что выполняется (12).

Опираясь на то, что *отображение* $S\mapsto S^{-1}$ *в банаховой алгебре непрерывно на множестве обратимых элементов* (см., например, [5]), получаем согласно доказанному соотношению (12), что верно

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)-Y^{-1}(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to +0\,. \tag{14}$$

Условия (12), (14) выполняются на целом квадрате $(a,b)\times(a,b)$, и, тем более, на отдельных полосах $(a_j,a_{j+1})\times(a,b)$.

Покажем тепер справедливость предельного соотношения (13) на каждой j-ой полосе.

$$\|Z_j(s;\varepsilon) - Z_j(s;0)\|_{(n)} =$$

$$= \| \sum_{a_j \leqslant s} B_j(\varepsilon) Y(a_i;\varepsilon) Y^{-1}(s_k;\varepsilon) - \sum_{a_j \leqslant s} B_j(0) Y(a_j;0) Y^{-1}(s_k;0)\|_{(n)} \to 0,$$

$$\varepsilon \to +0\,.$$

Последнее соотношение следует из 2-го условия теоремы 2.1 и условий (12), (14).

Таким образом, получаем, что функция $S(t,s)$ непрерывна по параметру ε на полосах $(a_j, a_{j+1}) \times (a,b)$.

Осталось исследовать непрерывность функции $X(t,s)$. Исходя из представления матриц Грина $G(t,s,\varepsilon)$ и $G(t,s,0)$, функцию $X(t,s)$ можно представить в виде

$$X(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s), & t \leqslant s, \\ 0, & s < t. \end{cases}$$

Учитывая вид $X(t,s)$, соотношения (12) и (14), получаем

$$\|X(t,s,\varepsilon) - X(t,s,0)\|_{(n)} = \|Y(t;\varepsilon)Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y(t;0)Y^{-1}(s;0)\| \leq$$

$$\leq \|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\| \cdot \|Y^{-1}(s;\varepsilon)\| +$$

$$+ \|Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)\| \cdot \|Y(t;0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, предельное соотношение (10) и тем самым теорема 2.1 доказаны.

3. Доказательство основной теоремы. Рассмотрим леммы, необходимые для доказательства основной теоремы.

Лемма 3.1. *Неоднородная многоточечная краевая задача* (1), (2) *эквивалентна неоднородной многоточечной краевой задаче для системы m дифференциальных уравнений первого порядка вида*

$$\hat{Y}'(t) = \hat{P}(t)\hat{Y}(t) + \hat{F}(t), \quad t \in (a,b), \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j \hat{Y}(a_j) = \hat{c}\,, \tag{16}$$

где квадратные матрицы-функции

$$\hat{P}(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_0(\cdot) & -p_1(\cdot) & -p_2(\cdot) & \ldots & -p_{m-2}(\cdot) & -p_{m-1}(\cdot) \end{pmatrix} \in \tag{17}$$

$$\in (C^{(n-1)})^{m\times m},$$

векторы

$$B_j = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \ldots & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \ldots & \beta_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \tag{18}$$

$$\hat{F}(\cdot) = (0, 0, \ldots, 0, f(\cdot)) \in (C^{(n-1)})^m\,, \tag{19}$$

$$\hat{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m) \in \mathbb{C}^m\,. \tag{20}$$

Доказательство данной леммы приведено в работе [4].

Теперь для задачи (15), (16) введем параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и получим параметризованную многоточечную краевую задачу для системы m дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\hat{Y}'(t;\varepsilon) = \hat{P}(t;\varepsilon)\hat{Y}(t;\varepsilon) + \hat{F}(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)\hat{Y}(a_j;\varepsilon) = 0, \tag{22}$$

где квадратные матрицы-функции $\hat{P}(\cdot)$, векторы $\hat{F}(\cdot)$, числа B_j и $\hat{c}$ определяются формулами (17) — (20).

Предположение $\mathcal{J}$. *Пусть однородная многоточечная краевая задача относительно функции $y(\cdot)$ для $m \geqslant 2$*

$$y^{(m)}(t;\varepsilon) + p_{m-1}(t;\varepsilon)y^{(m-1)}(t;\varepsilon) + ... + p_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{m} \beta_{j_{r,i}}(\varepsilon)y^{(r-1)}(a_j;\varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{24}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Лемма 3.2. *Пусть выполняется предположение $\mathcal{J}$. Тогда существует функция Грина $G(t,s;\varepsilon)$ полуоднородной многоточечной краевой задачи, которая задается уравнениями* (3), (4); *при этом*

$$G(t,s;\varepsilon) = G_{1m}(t,s;\varepsilon),$$

где $G_{1m}(t,s;\varepsilon)$ — соответствующий элемент матрицы Грина

$$\hat{G}(t,s;\varepsilon) = (G_{r,i}(t,s;\varepsilon))_{r,i=1}^{m}$$

полуоднородной многоточечной краевой задачи (21), (22).

Доказательство. С учетом леммы 3.1 однородная многоточечная краевая задача (23), (24) для линейного дифференциального уравнения порядка $m \geqslant 2$ эквивалентна однородной многоточечной краевой задаче для системы m дифференциальных уравнений первого порядка

$$\hat{Y}'(t;\varepsilon) = \hat{P}(t;\varepsilon)\hat{Y}(t;\varepsilon), \quad \sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)\hat{Y}(a_j;\varepsilon) = 0. \tag{25}$$

То есть условие единственности решения задачи (23), (24) равносильно тому, что однородная краевая задача (25) будет иметь лишь тривиальное решение.

Тогда существует матрица Грина $\hat{G}(t,s;\varepsilon) = G_{r,i}(t,s;\varepsilon)$ многоточечной краевой задачи (21), (22), с помощью которой решение полуоднородной многоточечной краевой задачи (21), (22) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered}\hat{Y}(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b \hat{G}(t,s;\varepsilon)\hat{F}(s;\varepsilon)ds, \ t \in (a,b), \\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \qquad \hat{F}(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n-1)})^m.\end{gathered} \tag{26}$$

Принимая во внимание, что

$$\hat{Y}(t;\varepsilon) = (y(t;\varepsilon), y'(t;\varepsilon), \ldots, y^{(m-1)}(t;\varepsilon)) \in (C^{(n)})^m,$$

и учитывая выражения (17) — (19), равенство (26) можно записать в виде следующей системы уравнений

$$
\begin{cases}
y(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{1m}(t,s;\varepsilon) f(s;\varepsilon) ds, \\
y'(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{2m}(t,s;\varepsilon) f(s;\varepsilon) ds, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^{(m-2)}(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{m-1,m}(t,s;\varepsilon) f(s;\varepsilon) ds, \\
y^{(m-1)}(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{m,m}(t,s;\varepsilon) f(s;\varepsilon) ds,
\end{cases}
\tag{27}
$$

где $y(t;\varepsilon)$ — единственное решение полуоднородной многоточечной краевой задачи (3), (4). Поэтому, учитывая равенства системы (27) получаем, что $G(t,s;\varepsilon) = G_{1m}(t,s;\varepsilon)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Согласно лемме 3.2, для доказательства теоремы достаточно показать, что при выполнении ее условий для достаточно малых ε существуют матрицы Грина $\hat{G}(t,s;\varepsilon)$ рассмотреных задач (21), (22) и на полосах $(a_j, a_{j+1}) \times (a,b)$ выполняется предельное соотношение

$$\|\hat{G}(t,s;\varepsilon) - \hat{G}(t,s;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{28}$$

Учитывая лемму 3.1, однородная многоточечная краевая задача (23), (24) эквивалентна однородной предельной многоточечной краевой задаче

$$\hat{Y}'(t;0) = \hat{P}(t;0)\hat{Y}(t;0), \tag{29}$$

$$\hat{\beta}_0 \hat{Y}(a;0) = 0. \tag{30}$$

Условие существования лишь тривиального решения однородной задачи (23), (24) равносильно тому, что однородная краевая задача (29), (30) также имеет лишь тривиальное решение.

Из условий 1, 2 теоремы 1.1, учитывая формулы (17) — (19) соответственно, получаем следующие соотношения

$$\|\hat{P}(\cdot;\varepsilon) - \hat{P}(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$B_j(\varepsilon) \to B_j(0), \quad \varepsilon \to 0.$$

Тогда согласно теореме 2.1 для достаточно малых ε существуют матрицы Грина рассмотренных задач (21), (22) и на полосах $(a_j, a_{j+1}) \times (a,b)$ выполняется предельное соотношение (28).

Теорема 1.1 доказана.

Список литературы

[1] Рева Н. В. *Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач*: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2009. — 148 с.

[2] Кодлюк Т. И., Михайлец В. А. *Предельный переход в классе многоточечных краевых задач* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 203—216.

[3] Кодлюк Т. И., Михайлец В. А. *Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева* // Доп. НАН України. — 2012. — № 11. — С. 15—19.

[4] Чеханова Г. О. *Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2.

[5] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. *Коммутативные нормированные кольца.* — Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры. — 1960. — 316 с.