Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 552–556

УДК 517.54

В. Є. В'юн

(Інститут математики НАН України, Київ)

Екстремальна задача про добуток внутрішніх радіусів поліциліндричних областей

vvikev@mail.ru

Присвячена світлій пам'яті Промарза Меліковича Тамразова

В роботі розглядається задача про добуток узагальнених внутрішніх радіусів поліциліндричних неперетинних областей, одержано певне узагальнення результата Є. Г. Ємельянова [9] на комплексному просторі $\mathbb{C}^l$, $l \geqslant 2$.

В даній роботі розглядається задача про добуток узагальнених внутрішніх радіусів поліциліндричних неперетинних областей. Ця задача відноситься до ряду задач з так званими "вільними" полюсами (див., наприклад, [1 — 3]). Просторові аналоги ряду відомих результатів про неперетинні області на площині отримано в роботі [4]. Для цього в [4] узагальнено поняття внутрішнього радіуса, введено поняття гармонічного радіуса просторової області $B \subset \mathbb{R}^n$ відносно деякої внутрішньої точки. Мабуть, робота [4] є єдиною роботою, де вдалося істотне просування в теорії задач з неперетинними областями в просторі. В 2011 році О.К. Бахтін в роботі [5] запропонував підхід, який дозволив узагальнити деякі відомі результати теорії однолистих функцій на багатовимірні комплексні простори (див., наприклад, [6, 7]).

В 1978 році в роботі В. М. Дубініна [8] отримано результат, з якого, зокрема, випливає розв'язок екстремальної задачі з повним описом множини екстремалей для функціонала

$$J = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

де $A_{n,2} = \{a_{k,p} \ : \ k = \overline{1,n},\, p = 1,2\}$ — $(n,2)$-променева система точок така, що $|a_{k,1}| = \rho$ і $a_{k,2} = a_{k,1}\, R^2/\rho^2$, $\rho,\, R \in \mathbb{R}^+$, $\rho < R$, а система попарно неперетинних (багатозв'язних) областей задовольняє умови: $B_{k,1} \subset U_R$, а $B_{k,2}$ — симетрична $B_{k,1}$ відносно кола ∂U_R, $k = \overline{1,n}$. В 1987 році в роботі Є. Г. Ємельянова [9] розглянуто більш загальну задачу у випадку однозв'язних областей для такого ж функціонала і $(n,2)$-променевої системи точок, які розташовані на двох концентричних колах, причому умова $B_{k,1} \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, була знята. В цій роботі запропоновано оригінальний метод дослідження і отримано вичерпний результат. В 1997 році в роботі В. М. Дубініна [3] отримано нестандартне узагальнення цього результату на випадок спеціальних систем відкритих множин. В роботі [10] О.К. Бахтіним запропоновано метод дослідження (метод "керуючих функціоналів"), що базується на кусково-розділяючому перетворенні (див., наприклад, [3]), який дозволив значно посилити попередні результати. Подальше просування в дослідженні екстремальних задач для (n,m)-променевих систем точок при $m = 2$ здійснено в роботі [11], а саме: в ній отримано узагальнення відомого результата Є. Г. Ємельянова на певний клас відкритих множин.

Основні поняття і результати. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Розглянемо довільну $(n,2)$-променеву систему точок $A_{n,2} = \{a_{k,p} \ : \ k = \overline{1,n}$, $p = 1,2\}$. Визначимо "керуючий" функціонал

$$L\left(A_{n,2}\right) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_{k,p}|.$$

Величини α_k і функції $\zeta_k(w)$, $\chi(t)$ детально описані в роботах [10, 11].

Для заданої $(n,2)$-променевої системи точок $A_{n,2}$ четвірка точок

$$\{\zeta_k(a_{k,1}),\, \zeta_k(a_{k+1,1}),\, \zeta_k(a_{k,2}),\, \zeta_k(a_{k+1,2})\}\,, \quad k = \overline{1,n},$$

розташована на уявній осі, причому інтервал $\big(\zeta_k(a_{k,1}), \zeta_k(a_{k+1,1})\big)$ містить початок координат. Конформний автоморфізм комплексної площини $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ перетворює вказану четвірку в четвірку точок на одиничному колі. Нехай z_1, z_2, z_3, z_4 різні точки одиничного кола. Позначимо через z_0 точку відкритого одиничного круга, в якій перетинаються неевклідові геодезичні, що з'єднують відповідно пари точок z_1, z_3 і z_2, z_4. Тоді конформний автоморфізм комплексної площини $z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, перетворює задану четвірку точок в вершини деякого (невиродженого) прямокутника зі сторонами, паралельними координатним осям. Отже, розглянемо при кожному $k = 1, 2, \ldots, n$ конформні автоморфізми $T_k(z)$ комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ такі, що

$$T_k\big(\zeta_k(a_{k,1})\big) = -i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad T_k\big(\zeta_k(a_{k,2})\big) = -i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$T_k\big(\zeta_k(a_{k+1,1})\big) = i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad T_k\big(\zeta_k(a_{k+1,2})\big) = i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Позначимо $\mathbb{C}^l = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C})}_{l-\text{разів}}$, $l \in \mathbb{N}$. $\overline{\mathbb{C}}^l = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}})}_{l-\text{разів}}$ — компактифікація простору $\mathbb{C}^l$. Позначимо через $[D]^l \subset \overline{\mathbb{C}}^l$ декартовий добуток областей $\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{l-\text{разів}}$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, а через $[d]^l \in \overline{\mathbb{C}}^l$ — декартовий добуток точок $d \in \overline{\mathbb{C}}$ з координатами $\underbrace{(d, d, \ldots, d)}_{l-\text{разів}}$. Нескінченними точками $\overline{\mathbb{C}}^l$ є ті точки, у яких хоча б одна координата нескінченна. Топологія в $\overline{\mathbb{C}}^l$ вводиться так, як і у декартовому добутку топологічних просторів.

Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_l \subset \overline{\mathbb{C}}^l$ називається поліциліндричною областю в $\overline{\mathbb{C}}^l$, а області B_s, $s = \overline{1, l}$, — координатними областями області $\mathbb{B}$. Узагальненим внутрішнім радіусом поліциліндричної області $\mathbb{B}$ в точці $\mathbb{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_l) \in \mathbb{B}$ будемо називати величину

$$R(\mathbb{B}, \mathbb{A}) := \Big[\prod_{s=1}^{l} r(B_s, a_s)\Big]^{\frac{1}{l}},$$

де $r(B_s, a_s)$ — внутрішній радіус координатної області B_s в точці a_s.

Систему точок $\mathbb{A}_{n,2} := A^1_{n,2} \times A^2_{n,2} \times \ldots \times A^l_{n,2}$, де $A^j_{n,2} = \{a^j_{k,p} : k = \overline{1, n}, \, p = 1, 2\}$ є $(n, 2)$-променевою системою точок відповідної комплексної площини $\mathbb{C}$ при кожному фіксованому j, $j = \overline{1, l}$, назвемо $(n, 2)$-променевою в просторі $\mathbb{C}^l$.

Система $\{\mathbb{B}_{k,p} : k = \overline{1, n}, \, p = 1, 2\}$ називається системою поліциліндричних неперетинних областей $\mathbb{B}_{k,p} := B^1_{k,p} \times B^2_{k,p} \times \ldots \times B^l_{k,p}$, якщо при кожному фіксованому j, $j = \overline{1, l}$, система областей $\{B^j_{k,p} : k = \overline{1, n}, \, p = 1, 2\}$ є системою неперетинних областей в $\overline{\mathbb{C}}$. Тоді для довільної $(n, 2)$-променевої системи точок $\mathbb{A}_{n,2}$ позначимо

$$\mathbb{L}\left(\mathbb{A}_{n,2}\right) := \Big(L\left(A^1_{n,2}\right), L\left(A^2_{n,2}\right), \ldots, L\left(A^l_{n,2}\right)\Big).$$

Розглянемо функціонал

$$\mathbb{J}_n = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} R\left(\mathbb{B}_{k,p}, \mathbb{A}_{k,p}\right),$$

де $\mathbb{A}_{k,p} \in \mathbb{B}_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}^l$ і $\mathbb{B}_{k,p}$ — взаємно неперетинні поліциліндричні області в $\overline{\mathbb{C}}^l$ при $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$.

Теорема. *Нехай $n, l \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тоді, для будь-якої $(n,2)$-променевої системи точок $\mathbb{A}_{n,2}$ такої, що $\mathbb{L}(\mathbb{A}_{n,2}) = (1, 1, \ldots, 1)$, і для довільної системи взаємно неперетинних поліцилiндричних областей $\mathbb{B}_{k,p}$ таких, що $\mathbb{A}_{k,p} \in \mathbb{B}_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}^l$ при $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, справедлива нерівність*

$$\mathbb{J}_n \leqslant 2^{2n}\Big(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\Big)^2\Bigg(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\Bigg)^2; \qquad (1)$$

однією з екстремальних систем є система

$$\{\mathbb{B}_{k,p}\}_{k=1}^{n} = \Big\{[B_{1,p}^{(0)}]^l, [B_{2,p}^{(0)}]^l, \ldots, [B_{n,p}^{(0)}]^l\Big\},$$

$$\{\mathbb{A}_{k,p}\}_{k=1}^{n} = \Big\{[a_{1,p}^{(0)}]^l, [a_{2,p}^{(0)}]^l, \ldots, [a_{n,p}^{(0)}]^l\Big\}, \quad p = 1, 2,$$

де області $B_{k,p}^{(0)}$ і точки $a_{k,p}^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, є відповідно круговими областями та полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-(R^0)^n)^2(1-(R^0)^n w^n)^2}\, dw^2.$$

Доведення. Зробимо наступне перетворення

$$\mathbb{J}_n = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\Big[\prod_{j=1}^{l} r\left(B_{k,p}^j, a_{k,p}^j\right)\Big]^{\frac{1}{l}} = \Big[\prod_{j=1}^{l}\Big(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}^j, a_{k,p}^j\right)\Big)\Big]^{\frac{1}{l}}.$$

Зазначимо, що при фіксованому $j = \overline{1,l}$ області $B_{k,p}^j$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, утворюють систему неперетинних областей в $\overline{\mathbb{C}}$. Тому, використовуючи відповідний результат роботи [11], отримуємо нерівність (1) і решту тверджень теореми. Теорему доведено.

Література

[1] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях.* — Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[2] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях* // Мат. сб. — 1985. — **128**, № 1. — С. 110—123.

[3] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3—76.

[4] Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г. *Об экстремальном разбиении пространственных областей* // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1998. — **254**. — С. 95—107.

[5] Бахтин А. К. *Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства* // Доп. НАН України. — 2011. — № 3. — С. 7—11.

[6] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Денега И. В. *Задача о произведении степеней обобщенных конформных радиусов для неналегающих областей в* $\mathbb{C}^n$ // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 180—186.

[7] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Заболотний Я. В. *Деякі оцінки для узагальнених внутрішніх радіусів поліциліндричних областей, що не перетинаються* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 322—326.

[8] Дубинин В. Н. *О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей* // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 24—31.

[9] Емельянов Е. Г. *О связи двух задач об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1987. — **160**. — С. 91—98.

[10] Бахтин А. К. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 2007. — 294 с.

[11] Бахтин А. К., Вьюн В. Е., Трохимчук Ю. Ю. *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей* //Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 7—10.