Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 565–569

УДК 517.54

О. В. Карупу

(Національний авіаційний університет, Київ, Україна)

Властивості інтегральних модулів гладкості конформних відображень однозв'язних областей

karupu@ukr.net

Присвячена світлій пам'яті Промарза Меліковича Тамразова

Рассмотрены оценки интегральных модулей гладкости произвольного порядка для производных функции, осуществляющей конформное отображение односвязных областей в комплексной плоскости.

Estimates for integral moduli of smoothness of arbitrary order for the derivatives of the function realizing conformal mapping of simply connected domains in complex plane are considered.

1. Вступ. Нехай у комплексній площині задано однозв'язну область G, обмежену спрямлюваною гладкою жордановою кривою Γ. Позначимо через $\tau = \tau(s)$ кут між дотичною до Γ та додатною дійсною віссю, через $s = s(w)$ позначимо довжину дуги на кривій Γ. Нехай $w = \varphi(z)$ — гомеоморфізм замкненого одиничного круга $\overline{D} = \{z : |z| \le 1\}$ на замикання $\overline{G}$ області G, конформний у відкритому крузі $D = \{z : |z| < 1\}$, а функція $z = \psi(w)$ — обернена до функції $w = \varphi(z)$.

Змістовним є питання про зв'язок між властивостями функції $\tau = \tau(s)$ та функцій $w = \varphi(z)$ і $z = \psi(w)$.

Келлог у 1912 році довів, що, якщо функція $\tau = \tau(s)$ належить класу Гельдера з показником α, $0 < \alpha < 1$, то тому ж класу належить і функція $\varphi'(e^{i\theta})$. Згодом в роботах С. Е. Варшавського, Я. Л. Альпера, С. Я. Геронімуса, Р. Н. Ковальчука, Л. І. Колесник було отримано багато різноманітних узагальнень цього результату.

П. М. Тамразов [1] одержав тілесне посилення для модулів неперервності функції $\varphi(z)$ на $\overline{D}$. В дещо іншій постановці задача вивчалася в роботах Є. П. Долженка.

Відмітимо, що результати С. Е. Варшавського, Р. Н. Ковальчука, Л. І. Колесник для модулів гладкості другого порядку було отримано за допомогою методу оцінки скінченних різниць, основаного на введенні додаткових точок, запропонованого С. Е. Варшавським.

В 1976 — 77 рр. цей метод і результати були узагальнені автором на випадок модулів гладкості третього порядку для класів Гельдера з показником α, що задовольняв умову $0 < \alpha \leq 2$ (а не $0 < \alpha < 3$, що було б природнім для модулів гладкості порядку $k = 3$). Причиною цього є те, що метод С. Е. Варшавського містить момент певного огрублення, пов'язаного з тим, що при оцінці скінченних різниць (і модулів гладкості) за допомогою цього методу не можна уникнути доданку, що містить скінченні різниці (і модулі гладкості) другого порядку.

В 1977 р. П. М. Тамразов [2] розв'язав проблему оцінювання скінченних різниць суперпозиції функцій і запропонував новий метод оцінювання модулів гладкості. Використання цього методу дало можливість автору [3] отримати узагальнення та обернення теорем типу Келлога для загальних модулів гладкості довільного порядку різних типів.

Зокрема, узагальнення та обернення теорем типу Келлога у термінах інтегральних модулів гладкості були отримані у роботах автора [3 — 6] (більш детально історію питання див. в [7, 3, 5]).

2. Інтегральні модулі гладкості похідних функції, що реалізує конформне відображення одиничного круга на жорданову область. Нехай $\omega_{k,z}(f(z), delta)$ — нецентрований локальний арифметичний модуль гладкості порядку k ($k \in \mathbb{N}$) функції $w = f(z)$ на кривій γ, тобто

$$\omega_{k,z}(f(z), \delta) = \sup_{(z_0,\ldots,z_k)\in\gamma_{z,\delta}(N)} \left|[z_0, \ldots, z_k; f, z_0]\right|,$$

де $\gamma_{z,\delta}(N)$ — множина наборів $(z_0, \ldots, z_k)$ таких, що криволінійні (відносно кривої γ) відстані між точками $z_0, \ldots, z_k \in \gamma$ задовольняють умову $\rho(z_i, z_{i+1})/\rho(z_j, z_{j+1}) \leq N$, $N \in [1, \infty)$, $\rho(z_i, z) \leq \delta$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Введемо інтегральний модуль гладкості порядку k функції $w = f(z)$ на кривій γ за формулою

$$\omega_k(f(z),\delta)_p = \left\{ \int\limits_\gamma [\omega_{k,z}(f(z),\delta)]^p \, d\lambda(z) \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < +\infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\lambda = \lambda(z)$ — лінійна лебегова міра на кривій γ.

Такі інтегральні модулі гладкості є частинним випадком загальних інтегральних модулів гладкості, введених П. М. Тамразовим. Він означив інтегральні модулі як усереднення за довільною мірою на кривій відповідних локальних модулів гладкості. Різниця між цими модулями та традиційними інтегральними модулями гладкості, які означаються як точна верхня грань усереднених абсолютних величин скінченних різниць, полягає в тому, що оператори усереднення та взяття точної верхньої грані застосовуються у зворотному порядку.

Теорема 1 [5]. *Нехай інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p$ довільного порядку k похідної порядку m, $m < k$, функції $\tau(s)$ задовольняє умову Гельдера*

$$\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta \to 0,$$

де $0 < \alpha < k$. Тоді існує неперервна на $\overline{D}$ похідна $\varphi^{(m+1)}(z)$ функції $\varphi(z)$, що не перетворюється в нуль в жодній точці $z \in \overline{D}$. Крім того, інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta}),\delta)_{pk}$ того ж порядку k похідної $\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta})$ функції $\varphi(z)$ на ∂D задовольняє умову

$$\omega_k(\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta}),\delta)_{pk} = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta \to 0.$$

Теорема 2 [5]. *Нехай інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta}),\delta)_{pk}$ довільного порядку k похідної $\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta})$ порядку $m+1$, $m < k$, функції $\varphi(z)$ на ∂D задовольняє умову*

$$\omega_k(\varphi^{(m+1)}(e^{i\theta}),\delta)_{pk} = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta \to 0,$$

де $0 < \alpha < k$. Тоді інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p$ того ж порядку k похідної порядку m функції $\tau(s)$ задовольняє умову Гельдера

$$\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta \to 0.$$

3. Інтегральні модулі гладкості похідних функції, що реалізує конформне відображення жорданової області на одиничний круг. Розглянемо результати, що є аналогом для інтегральних модулів гладкості оцінок, отриманих у [8] для рівномірних модулів гладкості.

Теорема 3. *Нехай інтегральний модуль гладкості* $\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p$ *порядку* k *похідної порядку* m, $m<k$, *функції* $\tau(s)$ *задовольняє умову Гельдера*

$$\omega_k(\tau^{(m)}(s),\delta)_p = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta\to 0,$$

де $0<\alpha<k$. *Тоді існує неперервна на* $\overline{G}$ *похідна* $\psi^{(m+1)}(w)$ *функції* $\psi(w)$, *що не перетворюється в нуль в жодній точці* $w\in\overline{G}$. *Крім того, інтегральний модуль гладкості* $\omega_k(\psi^{(m+1)}(w(s)),\delta)_{pk}$ *того ж порядку* k *похідної* $\psi^{(m+1)}(w)$ *функції* $\psi(w)$ *на кривій* Γ *задовольняє умову*

$$\omega_k(\psi^{(m+1)}(w(s)),\delta)_{pk} = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta\to 0.$$

Теорема 3 доводиться індукцією по k з використанням відомої теореми Ліндельофа, нерівностей П. М. Тамразова [2] для скінченних різниць суперпозиції функцій і нерівностей типу нерівностей Маршу, що зв'язують модулі гладкості нижчих порядків довільної функції і її модулі гладкості вищих порядків.

4. Інтегральні модулі гладкості похідних функції, що реалізує конформне відображення жорданових областей. Нехай G_1 та G_2 — однозв'язні області в комплексній площині, обмежені спрямлюваними жордановими кривими Γ_1 та Γ_2. Нехай $\tau_1=\tau_1(s_1)$ — кут між дотичною до Γ_1 та додатною дійсною віссю, $s_1=s_1(\zeta)$ — довжина дуги на кривій Γ_1. Нехай $\tau_2=\tau_2(s_2)$ — кут між дотичною до Γ_2 та додатною дійсною віссю, $s_2=s_2(w)$ — довжина дуги на кривій Γ_2. Нехай $w=f(\zeta)$ — гомеоморфізм замикання $\overline{G}_1$ області G_1 на замикання $\overline{G}_2$ області G_2, конформний в G_1.

Теорема 4. *Якщо при деякому* α, $0<\alpha<k$, *інтегральний модуль гладкості* $\omega_k(\tau_1^{(m)}(s_1),\delta)_p$ *порядку* k *похідної порядку* m, $m<k$, *функції* $\tau_1=\tau_1(s_1)$ *задовольняє умову Гельдера*

$$\omega_k(\tau_1^{(m)}(s_1),\delta)_p = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta\to 0,$$

з показником α, *а інтегральний модуль гладкості* $\omega_k(\tau_2^{(m)}(s_2),\delta)_p$ *порядку* k *похідної порядку* m, $m<k$, *функції* $\tau_2=\tau_2(s_2)$ *задовольняє*

умову Гельдера

$$\omega_k(\tau_2^{(m)}(s_2), \delta)_p = O\left(\delta^\alpha\right) , \quad \delta \to 0,$$

з тим же показником α*, то на* $D_1 \bigcup \Gamma_1$ *існує неперервна, відмінна від нуля похідна* $f^{(m+1)}(\zeta)$ *функції* $f(\zeta)$*, а її інтегральний модуль гладкості* $\omega_k(f^{(m+1)}(\zeta), \delta)_{pk}$ *порядку* k *задовольняє умову Гельдера*

$$\omega_k(f^{(m+1)}(\zeta), \delta)_{pk} = O\left(\delta^\alpha\right) , \quad \delta \to 0,$$

з тим же показником α*.*

Теорема 4 випливає з теорем 1 і 2 та оцінок для скінченних різниць суперпозиції функцій.

Література

[1] Тамразов П. М. *Гладкости и полиномиальные приближения.* — Киев: Наукова думка, 1975. — 274 с.

[2] Тамразов П. М. *Конечно-разностные тождества и оценки модулей гладкости суперпозиций функций.* — Препр./ АН УССР, Ин-т математики, 77.5. — Киев, 1977. — 24 с.

[3] Карупу Е. В. *О модулях гладкости конформных отображений* // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, № 4. — С. 540—545.

[4] Карупу О. В. *Про деякі властивості модулів гладкості конформних відображень* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — **31**, № 4. — С. 237—243.

[5] Karupu O. W. *On properties of moduli of smoothness of conformal mappings* // Complex Analysis and Potential Theory, Proc. of Conf. Satellite to ICM 2006. — World Scientific, Singapore, 2007. — P. 231—238.

[6] Karupu O. W. *On some properties of integral moduli of smoothness of conformal mappings* // Bulletin Soc. Sci. et Lettr. Łódź. — 2012. — **62**, № 2. — P. 111—116.

[7] Tamrazov P. M. *Divided differences and moduli of smoothness of functions, function superpositions and their application* // Constructive Theory of Functions, Proc. of Intern. Conf. — Bulgarian Acad. Sci., Sofia, Bulgaria, 1984. — P. 840—851.

[8] Карупу О. В. *Про деякі скінченно-різницеві властивості конформних гомеоморфізмів однозв'язних областей* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 365—368.