Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 570–574

УДК 517.54

І. О. Шевчук, Ю. С. Семікіна, Т. М. Жеребко

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ)

Локально однолисте наближення многочленами

shevchuk@univ.kiev.ua

Присвячена світлій пам'яті Промарза Меліковича Тамразова

Розглядається питання наближення локально однолистої в області функції локально однолистими многочленами.

Мета замітки — звернути увагу на задачі про наближення локально однолистих (або однолистих) функцій локально однолистими многочленами; або загальніше, задача про формозберігаюче наближення (Shape preserving approximation — SPA) аналітичних функцій.

Зазначимо, SPA на відрізку на сьогоднішній день набуло практично такої ж завершеності, як і наближення без обмежень, див. огляд Kopotun, Leviatan, Prymak, Shevchuk [1]. Початок сучасного SPA на відрізку пов'язують з роботою Shisha [2], в якій він звернув увагу на наближення монотонних функцій монотонними многочленами. Що є аналогом монотонної функції в області $G \subset \mathbf{C}$? *Локально однолиста функція, тобто аналітична в G функція f така, що $f'(z) \neq 0,\ z \in G$.* Отже слід очікувати, що до таких функцій можна застосувати добре розвинений апарат SPA на відрізку. На жаль, авторам невідомо жодної оцінки *величини*

$$E_n^{(1)}(f) = \inf_{P_n \subset \mathcal{P}_n^{(1)}} \sup_{z \in G} |f(z) - P_n(z)|$$

найкращого локально однолистого наближення такої функції f множиною $\mathcal{P}_n^{(1)}$ многочленів P_n степеня $< n$ таких, що $P_n'(z) \neq 0,\ z \in G$, навіть для областей зі строго гладкою межею. Будемо говорити, що *область $G \subset \mathbf{C}$ є областю зі строго гладкою межею, якщо її межа є гладкою жордановою кривою та існує конформне відображення $\Phi : G \to D$ області G в одиничний круг $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, похідну Φ' якого можна продовжити на замикання $\overline{G}$ області G до неперервної на $\overline{G}$ функції Φ', і таке, що*

$$|\Phi'(z)| \geq c = \mathrm{const} > 0, \quad z \in G.$$

Достатні умови того, щоб G була областю зі строго гладкою межею дає, скажімо, теорема Келлога. Згідно з Warschawski [3], область, обмежена гладкою замкненою жордановою кривою , у якої кут нахилу дотичної до дійсної осі, як функція довжини дуги кривої, задовольняє умову Діні, є областю зі строго гладкою межею. Нагадаємо, на замиканні такої області має місце конструктивна характеристика наближення функцій, див., наприклад, Тамразов [4]. Таким чином, виникає задача.

Задача 1. *Довести або спростувати наступне твердження. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{C}$ — область зі строго гладкою межею, функція $f : G \to \mathbf{C}$ є неперервною на $\overline{G}$ і аналітичною в G. Якщо*
а) $f'(z) \neq 0, \quad z \in G,$ *та* б) $|f^{(r)}(z)| \leq 1, \quad z \in G,$ *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leq \frac{\mathrm{const}}{n^r}, \quad n \geq r\,.$$

В разі позитивної відповіді довести відповідні оцінки для модуля неперервності та для модулів гладкості (див. означення в монографії П. М. Тамразова [4]) для областей з кусково-гладкою межею, квазіконформною межею.

Зауважимо, що в питанні, яке розглядається, невідомими є навіть теореми типу Вейєрштраса про збіжність. Автори дякують професорів В. В. Андрієвського та S. Ruscheweyh, які люб'язно повідомили, що $E_n^{(1)}(f) \to 0, \quad n \to \infty$, якщо $G = D$. В наступній теоремі ми поширюємо цей факт на області зі строго гладкою межею.

Теорема 1. *Нехай G — область зі строго гладкою межею, функція $f : G \to \mathbf{C}$ є неперервною на $\overline{G}$ і аналітичною в G. Якщо $f'(z) \neq 0, \quad z \in G$, то*

$$E_n^{(1)}(f) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Іншими словами, будь-яку локально однолисту в G і неперервну на $\overline{G}$ функцію можна рівномірно наблизити локально однолистим в G многочленом.

Доведення. Оскільки G є областю зі строго гладкою межею, то існує конформне відображення $\Phi : G \to D$ області G в одиничний круг, похідну Φ' якого можна продовжити на замикання $\overline{G}$ області G до неперервної на $\overline{G}$ функції Φ', і таке, що

$$|\Phi'(z)| \geq c = \text{const} > 0, \quad z \in G.$$

Візьмемо $\varepsilon > 0$. Слідуючи Gauthier та Andersson, розглянемо функцію

$$H(z) = f(\Phi^{-1}((1-\epsilon)\Phi(z))),$$

де $\epsilon > 0$ вибране так, щоб

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z) - H(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

За умовою теореми, похідна

$$H'(z) = f'(\Phi^{-1}((1-\epsilon)\Phi(z)))\frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}((1-\epsilon)\Phi(z)))}(1-\epsilon)\Phi'(z) \neq 0, \;\; z \in G.$$

Більше того, функція H' може бути продовжена до неперервної на $\overline{G}$ функції такої, що $H'(z) \neq 0, \;\; z \in \overline{G}$. Тому

$$\min_{z \in \overline{G}} |H'(z)| =: d > 0\,.$$

Отже за класичною теоремою Мергеляна [5] існує $N \in \mathbf{N}$ таке, що при кожному $n \geq N$ знайдеться многочлен p_n степеня $< n$ такий, що

$$|H'(z) - p_n(z)| < \min\left\{d, \frac{\varepsilon}{2L}\right\},$$

де $L = L(G)$ — число, вибране з умови: для кожної пари точок $z \in G$ та $\zeta \in G$ існує спрямлювана крива з кінцями в цих точках, яка міститься в G, довжина якої не перевищує числа L. Таке число існує для кожної обмеженої області з гладкою межею. Нарешті, зафіксуємо яку-небудь точку $z_0 \in G$ та позначимо

$$P_{n+1}(z) := H(z_0) + \int_{z_0}^{z} p_n(\zeta) d\zeta\,.$$

Тоді при всіх $z \in \overline{G}$

$$|P'_{n+1}(z)| = |p_n(z)| \geq |H'(z)| - |H'(z) - p'_n(z)| > d - d = 0,$$

звідки $P_{n+1} \subset \mathcal{P}^{(1)}_{n+1}$ і, отже, при всіх $n \geq N$

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{n+1}(f) &\leq \max_{z\in\overline{G}} |f(z) - P_{n+1}(z)| \leq \\ &\leq \max_{z\in\overline{G}} |f(z) - H(z)| + \max_{z\in\overline{G}} |H(z) - P_{n+1}(z)| < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \max_{z\in\overline{G}} \left| \int_{z_0}^{z} (H'(\zeta) - p_n(\zeta))d\zeta \right| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Постає наступна задача 2. Для множини $M \subset \mathbf{C}$ позначимо через $A(M)$ простір функцій $f : M \to \mathbf{C}$, неперервних на M та аналітичних у внутрішності M^o множини M. Кажуть, що множина $M \subset \mathbf{C}$ є мергелянівською множиною, якщо вона є замкненою, обмеженою та має зв'язне доповнення $\mathbf{C} \setminus M$ (саме така множина фігурує в класичній теоремі Мергеляна [5]).

Задача 2. *Знайти якнайзагальнішу умову на мергелянівську множину M, при якій кожну функцію $f \in A(M)$ таку, що $f'(z) \neq 0$, $z \in M^o$, можна як завгодно добре наблизити на M многочленом P таким, що $P'(z) \neq 0, \quad z \in M$.*

Зауваження. Andersson [6], Gauthier [7], та Хрущев [8] дали близьку до вичерпної відповідь на поставлену ними задачу 3.

Задача 3. *Знайти якнайзагальнішу умову на мергелянівську множину M, при якій кожну функцію $f \in A(M)$ таку, що $f(z) \neq 0$, $z \in M^o$, можна як завгодно добре наблизити на M многочленом P таким, що $P(z) \neq 0, \quad z \in M$.*

Література

[1] Kopotun K. A., Leviatan D., Prymak A., Shevchuk I. A. *Uniform and pointwise shape preserving approximation by algebraic polynomials* // Surveys in Approx. Theory. — 2011. — **6**. — P. 24—74.

[2] Shisha O. *Monotone approximation* // Pacific J. Math. — 1965. — **15**. — P. 667—671.

[3] Stefan Warschawski. *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung* // Math. Z. — 1932. — **35**. — № 1. — P. 321—456.

[4] Тамразов П. М. *Гладкости и полиномиальные приближения.* — Киев: Наукова думка, 1975. — 271 с.

[5] Мергелян С. Н. *О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов на замкнутых множествах* // Докл. АН СССР. — 1951. — **78**. — P. 405—408.

[6] Andersson J. *Mergelyan's approximation theorem with nonvanishing polynomials and universality of zeta-functions* // J. Approx. Theory. — 2013. — **167**. — P. 201—210.

[7] Gauthier P. M. *Approximating functions by the Riemann zeta-function and by polynomials with zero constraints* // Comput. Methods Funct. Theory. — 2012. — **12**. — P. 257—271.

[8] Khrushchev S. *Mergelyan's theorem for zero free functions* // J. Approx. Theory. — 2013. — **169**. — P. 1—6.