Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 141–152

УДК 517.54

***О.К. Бахтін*[1], *Г.П. Бахтіна*[2], *В.Є. В'юн*[1]**

[1] *Інститут математики НАН України, Київ,*
[2] *Національний технічний університет "Київський політехнічний інститут"*

alexander.bahtin@yandex.ru, bakhtina_galina@mail.ru, vvikev@mail.ru

Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей

In the paper we consider the extremal problems in geometric theory of functions of complex variables that are associated with estimates of functionals defined on the systems of non-overlapping domains. In particular, we generalize some known results of this topic.

Робота присвячена дослідженню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язаних з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей. Зокрема, основна увага приділяється посиленню одного відомого результату у даній тематиці.

Задачі про екстремальне розбиття займають важливе місце в геометричній теорії функцій комплексної змінної і мають багату історію (див., наприклад, [1–19]). Вперше екстремальні розбиття розглядались при отриманні оцінок добутку степенів конформних радіусів неперетинних областей. Ця тематика бере початок зі статті М. О. Лаврєнт'єва 1934 року [1] і далі розвивалась в дослідженнях багатьох авторів (див., наприклад, [2–19]). Слід зауважити, що важливим елементом дослідження таких екстремальних задач є глибокі результати теорії квадратичних диференціалів, які описують локальну і глобальну структуру їх траєкторій [3].

1. Основні поняття. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [5, с. 14]; [7, с. 71]; [8, с. 30]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} :\, k = \overline{1, n}\right\}$ таку, що $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$ та $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, будемо називати n-променевою. Позначимо

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$. Величини $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, будемо називати кутовими параметрами n-променевої системи точок A_n. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Дана робота базується на застосуванні кусково-розділяючого перетворення, розвинутого в роботах [4, с. 48–50]; [5, с. 27–30]; [8, с. 120].

Метою даної роботи є отримання точних оцінок зверху для функціонала наступного вигляду:

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-променева система точок, яка розташована на одиничному колі, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність неперетинних областей, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geq 2$ оцінка функціоналу (1) для системи неперетинних областей була отримана В.М. Дубініним [4, с. 59]. Г.В. Кузьміна [6, с. 267], посилила результат роботи [4] і показала, що дана оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geq 2$. Зазначимо, що при $n = 2$ оцінка функціоналу (1) роботи [6] в точності співпадає з оцінкою роботи [4]. В роботах О.К. Бахтіна та І.В. Денеги [19], [17], [18] було отримано оцінку функціоналу (1) для $\gamma \in \left(0, \frac{3}{5}\right]$ (при $n = 2$), $\gamma \in \left(0, \frac{6}{5}\right]$ (при $n = 3$) та $\gamma \in (0, 2, 1]$ (при $n = 4$).

В даній роботі отримано посилену оцінку функціоналу (1) для значень $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_2$, $\gamma_2 = 0,65$. *Тоді для довільної* 2-*променевої системи точок* $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^2$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 2}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$*), справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma\, r\,(B_1,a_1)\, r\,(B_2,a_2) \leqslant$$
$$\leqslant [r\,(\Lambda_0,0)\,r\,(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma\, r\,(\Lambda_1,\lambda_1)\, r\,(\Lambda_2,\lambda_2)\,, \qquad (2)$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + (4-2\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_3$, $\gamma_3 = 1,22$. *Тоді для довільної* 3-*променевої системи точок* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^3$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, B_3, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_3 \in B_3 \subset \overline{\mathbb{C}}$*), справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r\,(B_k,a_k) \leqslant$$
$$\leqslant [r\,(\Lambda_0,0)\,r\,(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r\,(\Lambda_k,\lambda_k)\,, \qquad (4)$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, Λ_3 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2, λ_3 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + (9-2\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\,dw^2. \qquad (5)$$

Теорема 3. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_4$, $\gamma_4 = 2,15$. *Тоді для довільної* 4-*променевої системи точок* $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^4$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,4}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_k, B_∞ *(*$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,4}$*), справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r\,(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r(\Lambda_k, \lambda_k), \qquad (6)$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, Λ_3 *і* Λ_4 *— кругові області, а точки* 0, ∞, λ_1, λ_2, λ_3 *і* λ_4 *— полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^8 + (16 - 2\gamma)w^4 + \gamma}{w^2(w^4 - 1)^2}\, dw^2. \qquad (7)$$

3. Доведення теореми 1. При доведенні теорем 1 — 3 буде зручно скористатися результатом наступної леми.

Нехай $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1 - \tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1 + \tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau \geqslant 0$.

Лема. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$), справедлива нерівність

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left(\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right)^{1/2}, \qquad (8)$$

де $\tau_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$. Знак рівності в нерівності (8) досягається тоді, коли області B_0, B_∞, B_k і точки 0, ∞, a_k, $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Доведення леми. При доведенні данної леми наші дослідження проводяться із застосуванням розділяючого перетворення (див., наприклад, [4, с. 48]; [5, с. 27–30]; [8, с. 120–124]; [7, с. 87–92]). Аналогічно міркуванням, проведеним в роботі [7, с. 261], розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. В свою чергу, через

$\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, позначимо область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, що містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. Набір областей $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ є результатом розділяючого перетворення довільної області B_∞ відносно набору $\{P_k\}_{k=1}^n$ і $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ в точці $\zeta = \infty$. Позначимо $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k \in \{1,n\}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$.

Із визначення функцій π_k випливає, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Тоді, використовуючи відповідні результати робіт [4, с. 54]; [5, с. 29], маємо нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$k = \overline{1,n}, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Умови реалізації знаку рівності в нерівностях (9) – (11) повністю описані в теоремі 1.9 [5, с. 29]. На основі цих співвідношень отримуємо нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2 (|a_k||a_{k+1}|)^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, враховуючи методи робіт [7, с. 262]; [9, с. 300]; [11, с. 871], із останнього має місце

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Вираз, що стоїть у фігурних дужках отриманої нерівності, є значенням функціоналу

$$K_\tau = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\tau^2} \cdot \frac{r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right)}{|a_1 - a_2|^2} \tag{12}$$

на системі неперетинних областей $\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\}$, і відповідній системі точок $\{0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}, \infty\}$ $(k \in \{1, 2\})$.

Оцінка функціоналу (12), у випадку фіксованих полюсів, була знайдена вперше В.М. Дубініним [4], [14], пізніше — Г.В. Кузьміною [12], Є.Г. Ємельяновим [13], А.Л. Таргонським [15].

На основі теореми 4.1.1 [7, с. 167] та інваріантності функціоналу (12) отримуємо оцінку

$$K_\tau \leqslant \Phi(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

де $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1 - \tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1 + \tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тоді

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\gamma}\right) \left[\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right]^{1/2} = \tag{13}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1 - \tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1 + \tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$. Реалізація знаку рівності перевіряється безпосередньо. *Лема доведена.*

Повертаємось до доведення теореми 1. Враховуючи результат леми і умову теореми 1, що $n = 2$, із нерівності (13) маємо

$$J_2(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 \cdot \left(\prod_{k=1}^{2} \alpha_k \sqrt{\gamma}\right) \left[\prod_{k=1}^{2} \Phi(\tau_k)\right]^{1/2} \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma} \cdot \left[\prod_{k=1}^{2} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,2}$.

Розглянемо детальніше функцію $\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}$. $\Psi(x)$ — логарифмічно випукла на проміжку $[0, x_0]$, де $x_0 \approx 0,88441$, $\Psi(x_0) = 0,07002$. На проміжку $[0, x_1]$ ($x_1 \approx 0,58142$ — точка максимуму функції $\Psi(x)$, $\Psi(x_1) \approx 0,08674$) функція зростає від значення $\Psi(0) = 0$ до $\Psi(x_1)$, і спадає на проміжку $(x_1, \infty]$. Далі, застосовуючи до функції $\Psi(x)$ ідеї робіт [16],[19], а також деякі додаткові міркування, отримуємо твердження теореми 1.

4. Доведення теореми 2. Доведення теореми 2, в основному, аналогічне доведенню теореми 1, але відмітимо різницю між доведеннями цих теорем.

Враховуючи, що $n = 3$, з нерівності (13) отримаємо співвідношення

$$J_3(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^3 \left(\prod_{k=1}^{3} \alpha_k \sqrt{\gamma}\right) \left(\prod_{k=1}^{3} \Phi(\tau_k)\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{8}{\gamma\sqrt{\gamma}} \left[\prod_{k=1}^{3} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,3}$.

Розглянемо функцію

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}.$$

Нехай $\gamma = \gamma_3$. Покажемо, що для довільних τ_1, τ_2, τ_3 таких, що $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\sqrt{\gamma_3}$, виконується нерівність

$$\Psi(\tau_1)\Psi(\tau_2)\Psi(\tau_3) \leqslant \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right). \tag{15}$$

Для $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$, твердження (15) слідує з логарифмічної опуклості функції $\Psi(x)$.

Нехай $\tau_3 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2 \in (0, x_0]$, тоді

$$\prod_{k=1}^{3} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi(x_0)\Psi^2(x_1) \leqslant \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right) \tag{16}$$

(так як $\Psi(x_0)\Psi^2(x_1) \approx 5,268 \cdot 10^{-4}$, а $\Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right) \approx 5,289 \cdot 10^{-4}$).

Нехай $\tau_2, \tau_3 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1 \in (0,\, x_0]$, тоді

$$\Psi^2(\tau_2)\Psi(\tau_1) \leqslant \Psi^2(x_0)\Psi(x_1) < \Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right)$$

(так як $\Psi(x_0)^2 \cdot \Psi(x_1) \approx 4,252 \cdot 10^{-4}$, а $\Psi^3\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma_3}\right) \approx 5,289 \cdot 10^{-4}$).

Звідси маємо, що твердження (15) має місце для всіх τ_1, τ_2, τ_3. Справедливість теореми 2 при $\gamma \in (0; 1,125]$ слідує з роботи [6, с. 267]. Якщо $1,125 < \gamma < \gamma_3$, то в нерівності (16) величина $\Psi^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_3}\right)$ буде збільшуватися, а добуток $\Psi(x_0)\Psi^2(x_1)$ залишиться незмінним. Таким чином, приходимо до висновку, що нерівність (16), а отже і (15), має місце і для $\gamma \in (0, \gamma_3]$. Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо.

Теорема 2 доведена.

5. Доведення теореми 3. Аналогічно доведенню теорем 1 та 2, враховуючи, що $n = 4$ маємо співвідношення

$$J_4(\gamma) \leqslant \frac{16}{\gamma^2}\left(\prod_{k=1}^{4}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,4}$. Нехай

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}.$$

Розглянемо випадок $\gamma = \gamma_4$. Покажемо, що для довільних τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 таких, що $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 2\sqrt{\gamma_4}$, виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_4}\right). \tag{17}$$

Для $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$, твердження (17) слідує з логарифмічної опуклості функції $\Psi(x)$.

Нехай для простоти $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant \tau_4$. Нехай $\tau_4 \in [x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (0, x_0)$, тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) = \prod_{k=1}^{3} \Psi(\tau_k) \cdot \Psi(\tau_4) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi^3(\tau_1) \cdot \Psi(x_0) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(оскільки $\Psi^3(\tau_1) \cdot \Psi(x_0) \approx 4,14751 \cdot 10^{-5}$, а $\Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right) \approx 4,32133 \cdot 10^{-5}$). Додатково використовуючи деякі проміжні обрахунки приходимо до висновку, що нерівність (17) має місце для всіх $\tau_k \in (0, x_0]$, $k = \overline{1,3}$, $\tau_4 \in (x_0, \infty]$.

Розглянемо випадок $\tau_3, \tau_4 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1, \tau_2 \in (0,\, x_0]$. Тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi^2(x_0) \Psi^2(x_1) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(так як $\Psi(x_0)^2 \cdot \Psi^2(x_1) \approx 3,68887 \cdot 10^{-5}$).

Нехай $\tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (x_0, \infty)$, $\tau_1 \in (0,\, x_0]$, тоді

$$\prod_{k=1}^{4} \Psi(\tau_k) \leqslant \Psi(x_1) \Psi^3(x_0) < \Psi^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma_4} \right)$$

(оскільки $\Psi(x_1) \cdot \Psi^3(x_0) \approx 2,97777 \cdot 10^{-5}$).

Звідси слідує, що твердження (17) має місце для всіх τ_1, τ_2, τ_3, τ_4. Із всього вище сказаного, отримуємо, що для екстремального набору можливий тільки випадок, коли $\tau_k \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1,4}$, і $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$. Справедливість теореми 3 при $\gamma \in (0; 2]$ слідує з роботи [6, с. 267]. Для всіх $\gamma < \gamma_4$ всі попередні міркування зберігаються. Таким чином, (17) має місце і для $\gamma \in (0, \gamma_4]$. Отже, виконується наступне співвідношення

$$J_4(\gamma) \leqslant \frac{16}{\gamma^2} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \right) \right)^2, \quad \gamma \in (0, \gamma_4].$$

Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 3 доведена.

6. Наслідки. Наведемо декілька цікавих наслідків, отриманих з основних результатів. Нехай $\mathfrak{L}$ позначає клас всіх однолистих і регулярних в крузі $|z| < 1$ функцій $w = f_k(z)$, $k \in \{0, \overline{1,n}, \infty\}$, які відображають круг $|z| < 1$ на неперетинні області B_0, B_k, B_∞ такі, що містять відповідні точки 0, a_k, ∞, $k = \overline{1,n}$, і причому $f_0(0) = 0$, $f_k(0) = a_k$, $f_\infty(0) = \infty$, $k = \overline{1,n}$.

Наслідок 1. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_2$, $\gamma_2 = 0,65$. *Тоді для довільної* 2-*променевої системи точок* $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^{2}$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,2}$, *і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей* B_0, B_1, B_2, B_∞ $(0 \in B_0,\ \infty \in B_\infty,\ a_1 \in B_1,\ a_2 \in B_2)$, *і набору функцій* $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ *класу* $\mathfrak{L}$, *справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)| \cdot |f_\infty'(0)|]^\gamma \prod_{k=1}^{2} |f_k'(0)| \leqslant [r\,(\Lambda_0, 0)\, r\,(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{2} r\,(\Lambda_k, \lambda_k)\,,$$

де області $\Lambda_0 = B_0$, $\Lambda_\infty = B_\infty$, $\Lambda_1 = B_1$, $\Lambda_2 = B_2$ *— кругові області, а точки* 0, ∞, $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$ *— полюси квадратичного диференціалу (3).*

Наслідок 2. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_3$, $\gamma_3 = 1,22$. *Тоді для довільної* 3-*променевої системи точок* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^{3}$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$, *і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей* B_0, B_k, B_∞ $(0 \in B_0,\ \infty \in B_\infty,\ a_k \in B_k)$, *і набору функцій* $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_k(z)$ *класу* $\mathfrak{L}$, $k = \overline{1,3}$, *справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)| \cdot |f_\infty'(0)|]^\gamma \prod_{k=1}^{3} |f_k'(0)| \leqslant [r\,(\Lambda_0, 0)\, r\,(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{3} r\,(\Lambda_k, \lambda_k)\,,$$

де області $\Lambda_0 = B_0$, $\Lambda_\infty = B_\infty$, $\Lambda_k = B_k$ *— кругові області, а точки* 0, ∞, $\lambda_k = a_k$, $k = \overline{1,3}$, *— полюси квадратичного диференціалу (5).*

Наслідок 3. *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_4$, $\gamma_4 = 2,15$. *Тоді для довільної* 4-*променевої системи точок* $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^{4}$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,4}$, *і довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей* B_0, B_k, B_∞ $(0 \in B_0,\ \infty \in B_\infty,\ a_k \in B_k)$, *і набору функцій* $f_0(z)$, $f_\infty(z)$, $f_k(z)$ *класу* $\mathfrak{L}$, $k = \overline{1,4}$, *справедлива нерівність*

$$[|f_0'(0)| \cdot |f_\infty'(0)|]^\gamma \prod_{k=1}^{4} |f_k'(0)| \leqslant [r\,(\Lambda_0, 0)\, r\,(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r\,(\Lambda_k, \lambda_k)\,,$$

де області $\Lambda_0 = B_0$, $\Lambda_\infty = B_\infty$, $\Lambda_k = B_k$ *— кругові області, а точки* 0, ∞, $\lambda_k = a_k$, $k = \overline{1,4}$, *— полюси квадратичного диференціалу (7).*

Література

[1] М.А. Лаврентьев. *К теории конформных отображений.* Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР. **5**, (1934), 159–245.

[2] Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[3] Дж.А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[4] В.Н. Дубинин. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. **168**, (1988), 48–66.

[5] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного.* Успехи мат. наук. **49**, № 1(295), (1994), 3–76.

[6] Г.В. Кузьмина. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **276**, (2001), 253–275.

[7] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Праці ін-ту мат-ки НАН України.**73**, (2008).

[8] В.Н. Дубинин. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток: "Дальнаука"ДВО РАН, 2009.

[9] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы.* Нелінійні коливання. **8**, (3), (2005), 298–303.

[10] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *О произведении внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств.* Доп. НАН України. **5**, (2008), 7–12.

[11] А.К. Бахтин. *Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности.* Укр. мат. журн.**58**, (7), (2006, 867–886.

[12] Г.В. Кузьмина. *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **302**, (2003), 52–67.

[13] Е.Г. Емельянов. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* Зап. науч. сем. ПОМИ. **286**, (2002), 103–114.

[14] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций.* Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988.

[15] А.Л. Таргонский. *Екстремальні задачі теорії однолистих функцій.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Київ, 2005.

[16] Л.В. Ковалев. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности.* Дальневосточный матем. сборник. **2**, (1996), 96–98.

[17] А.К. Бахтин, И.В. Денега. *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек.* Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем., **8**, (1), (2011), 12–21.

[18] И.В. Денега. *Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей.* Доп. НАН України. **5**, (2012), 19–22.

[19] А.К. Бахтин, И.В. Денега. *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек.* Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем., **8**, (1), (2011), 12 – 21.