Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 1, 153–165

УДК 517.9+531.19+530.145

В.А. Болух

Інститут математики НАН України, Київ

Розклад Бріджеса–Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією

The Mayer series expansion in the Bridges–Federbush form for a system of point particles interacting by the nonintegrable interaction potential is constructed.

В роботі побудовано розклад Майєра у формі Бріджеса–Федербуша для системи точкових частинок, які взаємодіють за допомогою неінтегрованого потенціалу взаємодії.

1 Вступ

Одним із методів дослідження статистичних систем є розклад величин, що їх характеризують, за степенями активності z. Такий розклад називають розкладом Майєра. Існують методи, за допомогою яких можна обчислювати коефіцієнти такого розкладу, одним із яких є метод Бріджеса–Федербуша [1]. Особливістю цього методу є нова форма запису коефіцієнтів розкладу, аналітичний вигляд яких описується вкладами від графів-дерев на відміну від майєрівських графів. Аналітичним вкладом кожної лінії, що з'єднує дві вершини $x \in \mathbb{R}^d$ і $y \in \mathbb{R}^d$

такого графа є парний потенціал взаємодії $\phi(|x-y|)$, який повинен бути інтегрованим. В методі Бріджеса–Федербуша значно спрощується доведення збіжності рядів в області малих значень параметра активності.

У роботі розглядається система точкових частинок, які взаємодіють неінтегровним в околі нуля потенціалом. Такі системи можна розглядати в рамках моделі так званого *коміркового газу*, яка була введена О.Л. Ребенком [2] як апроксимація неперервних систем статистичної механіки з посилено надстійкими взаємодіями [3]. Потенціали таких взаємодій не є інтегровними, тому безпосередньо застосувати метод Бріджеса-Федербуша до таких системи не можна. В роботі [1] була запропонована ідея побудови такого розкладу коли потенціал складається з стійкого інтегровного потенціалу і деякого неінтегровного позитивного швидко спадаючого потенціалу, але самі розклади не були побудовані. Посилено надстійкі потенціали, які ми розглядаємо не задовольняють цим вимогам. Тому потрібно застосувати деякі проміжні технічні конструкції, щоб коректно побудувати цей розклад. У цьому короткому повідомленні ми проробляємо цю технічну роботу і приводимо доведення збіжності. Зауважимо, також, що для більш розгорнутого знайомства з проблемами статистичної механіки, яким присв'ячена ця робота, читач може звернутись до монографій [4, 5].

2 Означення системи

В роботі буде розглядатися нескінченна система тотожних точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, взаємодію яких будемо описувати парним потенціалом $\phi(|x - y|)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ми позначимо сім'ю всіх борелівських множин в $\mathbb{R}^d$. Визначимо простір конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ як множину локально скінчених підмножин (множину положень частинок у просторі $\mathbb{R}^d$):

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \, |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \quad \text{для} \quad \text{всіх} \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \qquad (1)$$

де $|A| := card\{A\}$ це кількість точок множини A, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ будемо позначати систему всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Визначимо також простір скінчених конфігурацій Γ_0:

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^d \mid |\eta| = n,\ n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2}$$

Простір скінчених конфігурацій в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ позначимо через Γ_Λ:

$$\Gamma_\Lambda := \left\{ \gamma \in \Gamma_0 \middle| \ \gamma \subset \Lambda,\ \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}. \tag{3}$$

Позначимо через σ міру Лебега на $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо міру $\sigma^{\otimes n}$ на множині

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \middle| \ x_k \neq x_l, \text{ якщо } k \neq l \right\}, \tag{4}$$

а отже як міру $\sigma^{(n)}$ на $\Gamma^{(n)}$ через відображення

$$sym_n : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\} \in \Gamma^{(n)}. \tag{5}$$

За допомогою міри $\sigma^{(n)}$ визначимо міру Лебега–Пуассона (або ненормовану міру Пуассона)λ_σ на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ формулою:

$$\lambda_{z\sigma} := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \sigma^{(n)}. \tag{6}$$

Звуження міри λ_σ на $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ ми також будемо позначати $\lambda_\sigma \equiv \lambda_\sigma^\Lambda$.

(A): Умови на потенціал взаємодії. *Розглянемо потенціали загального вигляду ϕ, які є неперервними функціями на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, і для яких існують константи*
$r_0 > 0$, $R > r_0$, $\varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$, *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що:*

$$1)\ \phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для} \quad |x| \geq R, ; \tag{7}$$

$$2)\ \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s},\ s \geq d \quad \text{для} \quad |x| \leq r_0, \tag{8}$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\},\ \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}, \tag{9}$$

а

$$\phi(|x|)\} \ = \ \phi^+(|x|) \ - \ \phi^-(|x|). \tag{10}$$

Потенціали такого класу є посилено надстійкими (див., наприклад, [3, 2]), але для побудови розкладу достатньою умовою є умова стійкості взаємодії:

$$U(\gamma) \ := \ U_\phi(\gamma) \ = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \phi(|x-y|) \ \geq \ -B|\gamma| \tag{11}$$

з деякою константою $B \geq 0$.

У молекулярній фізиці має безпосереднє застосування потенціал Ленарда–Джонса

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{12}} - \frac{D}{|x|^6}, \tag{12}$$

де $C > 0$, $D > 0$ – деякі константи. В роботі ми будемо розглядати потенціали такого ж типу.

3 Розклад Бріджеса–Федербуша

Велика статистична сума для системи, яка знаходиться в деякому обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ визначається формулою:

$$Z_\Lambda = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{13}$$

Термодинамічний потенціал, який відповідає тиску визначається за формулою:

$$p(z,\beta) \ = \ \frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z,\beta). \tag{14}$$

Розклад Майєра, який ми зараз побудуємо є ряд

$$\beta p(z,\beta) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta) z^n. \tag{15}$$

Представимо велику статистичну суму $Z_\Lambda = Z_\Lambda(z,\beta)$ у вигляді:

$$Z_\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_\Lambda(N), \tag{16}$$

де

$$Z_\Lambda(N) = \int_{\Gamma_\Lambda^{(N)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_\sigma(d\gamma) = \frac{1}{N!}\int_{\Lambda^N} (dx)^N e^{-\beta U^{(N)}}, \tag{17}$$

де для $\gamma = \{x_1, ..., x_N\}$, $|\gamma| = N$, а

$$U^{(N)} := U(\{x_1, ..., x_N\}) = \sum_{1\le i<j\le N} \phi(|x_i - x_j|) := \sum_{1\le i<j\le N} \phi_{ij}. \tag{18}$$

Якщо ми виділимо перші k частинок, то енергія $N-k$ частинок

$$\begin{aligned} U^{(N-k)} &:= U(\{x_{k+1}, ..., x_N\}) = \\ &= \sum_{k+1\le i<j\le N} \phi(|x_i - x_j|) := \sum_{k+1\le i<j\le N} \phi_{ij}. \end{aligned} \tag{19}$$

Перш ніж побудувати розклад Бріджеса–Федербуша, зробимо деяке проміжне розбиття потенціалу ϕ. Нехай v позитивний інтегрований парний потенціал, такий, що

$$w(|x|) := \phi^+(|x|) - v(|x|) \ge 0, \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^d, \tag{20}$$

а потенціал

$$\varphi = v - \phi^- \tag{21}$$

є стійким, тобто

$$U_\varphi(\gamma) = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \varphi(|x-y|) \ge -B_1|\gamma| \tag{22}$$

з деякою константою $B_1 \ge 0$. Тоді

$$\phi = w + \varphi,\ U(\gamma) = U_\phi(\gamma) = U_w(\gamma) + U_\varphi(\gamma). \tag{23}$$

Введемо параметри інтенсивності взаємодії. Нехай s_k ($0 \le s_k \le 1$) характеризує інтенсивність взаємодії перших k частинок з рештою

$N-k$ частинками. Підставимо спершу параметр s_1 у вираз для енергії N частинок таким чином, щоб при $s_1 = 0$ взаємодія першої частинки з іншими виключалася, а при $s_1 = 1$ зберігалася повна взаємодія усіх N частинок. Спершу введемо ці параметри в енергію $U_\varphi(\gamma)$. Тоді при $0 < s_1 < 1$ енергію $U_\varphi^{(N)}$ можна записати таким чином:

$$V_1^{(N)}(s_1) \ = \ (1-s_1)V_0^{(N),(1)} \ + \ s_1 V_0^{(N)}, \tag{24}$$

де

$$V_0^{(N),(1)} \ := \ U_\varphi^{(1)} \ + \ U_\varphi^{(N-1)}, \text{ а } V_0^{(N)} \ := \ U_\varphi^{(N)}. \tag{25}$$

Тепер у цей вираз підставимо параметр s_2, відокремлюючи взаємодію 1-ї і 2-ї частинки від $(N-2)$-х частинок, що залишились. В результаті отримуємо вираз:

$$V_2^{(N)}(s_1, s_2) \ = \ (1-s_2)V_1^{(N),(2)}(s_1) \ + \ s_2 V_1^{(N)}(s_1), \tag{26}$$

де $V_1^{(N),(2)}(s_1) \ := \ V_1^{(N)}(s_1) \ + \ U_\varphi^{(N-2)}$. Після підстановки параметра s_k маємо:

$$\begin{aligned} V_k^{(N)}(s_1, ..., s_k) \ &= \ (1-s_k)V_{k-1}^{(N),(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) \ + \\ &+ \ s_k V_{k-1}^{(N)}(s_1, ..., s_{k-1}), \end{aligned} \tag{27}$$

де $V_{k-1}^{(N),(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) \ := \ V_{k-1}^{(k)}(s_1, ..., s_{k-1}) + U_\varphi^{(N-k)}$,
а при $k = N-1$

$$V_{N-1}^{(N)}(\sigma_{N-1}) \ := \ V^{(N)}(\sigma_{N-1}) = \sum_{1 \le i < j \le N} s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1} \varphi_{ij}, \tag{28}$$

де для скорочення запису введено позначення

$$\sigma_{N-1} \ := \ (s_1, ..., s_{N-1}) \ := \ (s)_{N-1}. \tag{29}$$

Відповідну послідовність для потенціалу w означимо наступним чином:

$$W^{(N)}(\sigma_{N-1}) = -\frac{1}{\beta} \sum_{1 \le i < j \le N} \ln(1 + s_i \ldots s_{j-1} u_{ij}), \tag{30}$$

де

$$u_{ij} = e^{-\beta w_{ij}} - 1. \tag{31}$$

При $s_1 = \ldots = s_{N-1} = 1$

$$W^{(N)}((1)_{N-1}) \ = \ U_w \ = \sum_{1 \le i < j \le N} w_{ij}. \tag{32}$$

Вигляд енергії (30) виникає після підстановки параметра s не перед потенціалом w, як ми це робили у виразі для U_φ, а заміною експоненти $\exp[-\beta w_{ij}]$ на вираз $1 + su_{ij}$, який при $s = 1$ збігається з експонентою $\exp[-\beta w_{ij}]$, а при $s = 0$ взаємодія між i-ю і j-ю частинками зникає.

Повну потенціальну енергію N-частинок з введеними параметрами інтенсивності позначимо наступним чином:

$$U^{(N)}(\sigma_{N-1}) \ := \ V^{(N)}(\sigma_{N-1}) \ + \ W^{(N)}(\sigma_{N-1}) \tag{33}$$

Введемо також додаткові позначення, які надалі будуть використані:

$$\varphi'_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{1}{\beta} \frac{u_{ij}}{1 + s_i \ldots s_{j-1} u_{ij}} \tag{34}$$

$$K_l^\Lambda = \frac{1}{l} \int\limits_{\Lambda^l} (dx)^l J^{(l)}(x)_l, \tag{35}$$

де

$$\begin{aligned} J^{(1)}(x)_1 = J^{(1)}(x_1) \ &= \ 1, \\ J^{(l)}(x)_l = (-\beta)^{l-1} \int\limits_0^1 d\sigma_{l-1} e^{-\beta U(\sigma_{l-1})} &\prod_{j=2}^{l} [s_1 \ldots s_{j-2} \varphi'_{1j} + \\ + s_2 \ldots s_{j-2} \varphi'_{2j} + \ldots + s_{j-2} &\varphi'_{(j-2)j} + \varphi'_{(j-1)j}], \end{aligned} \tag{36}$$

де $l \geq 2$, а

$$Z_\Lambda(N-l) = \frac{1}{(N-l)!} \int\limits_{\Lambda^{N-l}} (dx)^{N-l} \prod_{l+1 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij} + \varphi_{ij})}. \tag{37}$$

В (36) ми також ввели позначення:

$$\int_0^1 d\sigma_{N-1} = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 ds_{N-1}. \tag{38}$$

Перетворимо функціонал $Z_\Lambda(N)$ наступним чином. Для початку відокремимо взаємодію першої частинки від решти, ввівши параметр інтенсивності взаємодії s_1 і використовуючи тотожність:

$$e^{f(1)} \ = \ e^{f(0)} \ + \ \int_0^1 ds_1 f^{'}(s_1) e^{f(s_1)}. \tag{39}$$

Тоді вираз (17) набуде вигляду:

$$Z_\Lambda(N) = \frac{1}{N!} \int_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{1 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} = \tag{40}$$

$$= \frac{1}{N!} \int_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{2 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \prod_{j=2} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} =$$

$$= \frac{1}{N!} \int_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{2 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \times$$

$$\times [1 + \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} [\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j})]],$$

де u_{1j} визначено в (31). В інтегралі за змінною s_1 виконаємо диференціювання:

$$\int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} [\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j})]] = \tag{41}$$

$$= (-\beta) \int_0^1 ds_1 \sum_{j'=2}^{N} \left(\varphi_{1j'} + \frac{u_{1j'}}{1 + s_1 u_{1j'}} \right) \prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j}).$$

Підставимо (41) у вираз (40) і скористаємося симетричністю підінтегральної функції відносно перестановки змінних $x_1, \ldots, x_N$. В результаті отримаємо рівність, враховуючи позначення (35), (36) для $l = 1$:

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(N) = & \frac{1}{N} K_1^\Lambda Z_\Lambda(N-1) + \\ & + \frac{(-\beta)}{(N-2)!N} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{2 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij} + \varphi_{ij})} \times \\ & \times \int\limits_0^1 ds_1 \varphi_{12}^{'} \prod_{j=2}^N e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j}), \end{aligned} \tag{42}$$

де $\varphi_{12}^{'}$ визначено формулою (34).

В множниках добутків правої частини (42) встановимо параметр інтенсивності взаємодії s_2 між першими двома частинками та іншими $(N-2)$-ма, використавши тотожність:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=3}^N e^{-\beta(w_{2j} + \varphi_{2j})} e^{-\beta s_1 \varphi_{1j}} (1 + s_1 u_{1j}) = \\ & = 1 + \int\limits_0^1 ds_2 \frac{d}{ds_2} \left[\prod_{j=3}^N e^{-\beta s_1 s_2 \varphi_{1j}} (1 + s_1 s_2 u_{1j}) e^{-\beta s_2 \varphi_{2j}} (1 + s_2 u_{2j}) \right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Проробляючи усі операції як і на першому кроці і враховуючи позначення (28),(30), (33), (34), (35), (36) для $l = 2$, отримаємо наступний член розкладу рівності (42):

$$
\begin{aligned}
Z_\Lambda(N) = {} & \frac{1}{N} K_1^\Lambda Z_\Lambda(N-1) + \frac{2}{N} K_2^\Lambda Z_\Lambda(N-2) + \\
& + \frac{(-\beta)^2}{(N-3)!N} \int\limits_{\Lambda^N} (dx)^N \prod_{3 \le i < j \le N} e^{-\beta(w_{ij}+\varphi_{ij})} \times \\
& \times \int\limits_0^1 ds_1 \int\limits_0^1 ds_2 \varphi'_{12}(s_1\varphi'_{13} + \phi'_{23}) e^{-\beta U^{(2)}(s_1)} \times \\
& \times \prod_{j=3}^N e^{-\beta[s_1 s_2 \varphi_{1j} \; + \; s_2\varphi_{2j}} (1 + s_1 s_2 u_{1j})(1 + s_2 u_{2j}).
\end{aligned} \tag{44}
$$

Продовжуючи цей процес до тих пір, доки не буде вичерпано усі змінні, отримаємо розклад:

$$
Z_\Lambda(N) = \sum_{l=1}^N \frac{l}{N} K_l^\Lambda Z_\Lambda(N-l). \tag{45}
$$

Підставимо праву частину тотожності (45) у вираз для статистичної суми (16) і продиференціюємо за змінною z, припускаючи, що ряд $\sum_{n \ge 1} n z^{n-1} K_n^\Lambda$ рівномірно збігається в деякому околі точки $z = 0$ (це буде доведено нижче). Тоді отримаємо просте рівняння:

$$
\frac{dZ_\Lambda}{dz} = \left(\sum_{n=1}^\infty n z^{n-1} K_n^\Lambda \right) Z_\Lambda. \tag{46}
$$

Остаточно для статистичної суми отримуємо представлення:

$$
Z_\Lambda \; = \; \exp\left(\sum_{n=1}^\infty z^n K_n^\Lambda \right), \tag{47}
$$

а враховуючи означення (14) і (15):

$$
b_n(\beta) \; = \; \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} K_n^\Lambda. \tag{48}
$$

4 Доведення збіжності

Збіжність розкладу Майєра виражає наступна теорема.

Теорема 1. Нехай потенціал взаємодії задовольняє умови **(A)** (див. (7)-(9)). Тоді існує границя

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z,\beta) \ = \ \beta p(z,\beta) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta) z^n \tag{49}$$

для достатньо малих значень активності z, які визначаються нерівністю:

$$z\beta e^{\beta B_1+1}(\|\varphi\|_1 \ + \ \|u\|_1) \ < \ 1, \tag{50}$$

де

$$\|f\|_1 \ := \ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx \ < \infty. \tag{51}$$

Доведення. Представимо тепер добуток сум в $J^{(n)}(x)_n$ (див. формулу (36)) у вигляді суми добутків. Тоді

$$J^{(n)}(x)_n = \sum_{\eta} J^{(n)}_{\eta}(x)_n, \tag{52}$$

де

$$J^{(n)}_{\eta}(x)_n = (-\beta)^{n-1} \int\limits_0^1 d\sigma_{n-1} f(\eta,\ \sigma_{n-1}) \left(\prod_{i=2}^{n} \varphi^{'}_{\eta(i)i} \right) e^{-\beta U^{(n)}(\sigma_{n-1})}, \tag{53}$$

а η це відображення

$$\eta \ : \ \{2,3,...,n\} \ \mapsto \ \{1,2,...,n-1\}, \ \eta(i) \ < \ i, \tag{54}$$

тобто $\eta(k)$ може приймати значення тільки у множині $\{1,2,...,k-1\}$. Добуток в (53) можна розглядати як внесок графа-дерева з вершинами у точках $\{x_1,...,x_n\}$, а кожній лінії, що з'єднує вершину $x_{\eta(i)}$ і вершину x_i, відповідає фактор $\varphi^{'}_{\eta(i)i}$. З визначення відображення (54) слідує, що кожний граф-дерево побудовано таким чином, що кожна

k-та вершина x_k(починаючи з другої) приєднується до вершини $x_{\eta(k)}$ графа, що складається з $(k-1)$-ї вершини. Зрозуміло, що усіх таких графів у сумі (56) буде $(n-1)!$. Але цей факторіал буде контролюватись інтегралом від функції $f(\eta,\ \sigma_{n-1})$, яка має такий вигляд:

$$f(\eta,\ \sigma_{n-1})\ :=\ \begin{cases} 1, \text{ якщо } n=2 \\ \prod\limits_{i=2}^{n-1} s_{\eta(i)}\cdots s_{i-1}, \text{ якщо } n>2, \end{cases} \tag{55}$$

який слідує безпосередньо з побудови розкладу. Легко переконатись (див. [1]), що

$$\sum_{\eta}\int\limits_{0}^{1} d\sigma_{n-1} f(\eta,\ \sigma_{n-1})\ \le\ e^{n-1}. \tag{56}$$

Враховуючи цю оцінку легко довести наступну пропозицію.

Пропозиція 4.1. Нехай потенціал взаємодії задовольняє умовам **(A)** (див. (7)-(9)). Тоді

$$|K_n^{\Lambda}|\ \le\ \beta^{n-1}(\|\varphi\|_1\ +\ \|u\|_1)^{n-1} e^{n(\beta B_1+1)-1}\sigma(\Lambda). \tag{57}$$

Доведення слідує з того очевидного факту, що

$$0\ <\ 1+s_i\ldots s_{j-1}u_{ij}\ <\ 1, \tag{58}$$

внаслідок чого

$$|\varphi'_{\eta(i)i}(1+s_{\eta(i)}\ldots s_{i-1}u_{\eta(i)i})|\ \le\ |\varphi_{\eta(i)i}|\ +\ |u_{\eta(i)i}|, \tag{59}$$

трансляційної інваріантності добутку у правій частині (53) за змінними $x_1,\ldots,x_n$, умови (22) та визначень (30)–(36) та (51)–(53).

Оцінка (57) забезпечує існування границі (48) і теореми 1. □

Автор висловлює подяку професору О.Л. Ребенку за критичні зауваження і увагу до роботи.

Література

[1] D. Brydges, P. Federbush. *A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics.* – J. Math. Phys., 1978, **19**, No.10, 2064–2067.

[2] A.L. Rebenko. *Cell gas model of classical statistical systems.* – Reviews in Math. Phys., 2013, **25**, № 4, 1330006-1–28.

[3] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics* . – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2008, **14**, № 3, 287–296.

[4] Д. Рюэль. *Статистическая механика. Строгие результаты.* М.: Мир, 1971.

[5] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Малышев. *Математические основы классической статистической механики.* Изд. 2, М.: ЛИБРОКОМ, 2014.